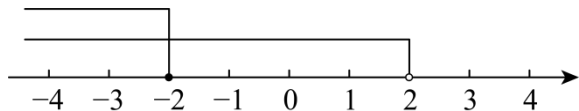


2024 学年第二学期期末练习七年级数学试卷

(考试时间 90 分钟, 总分 100 分)

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分)

1. 如图, 数轴上公共部分表示的是某个关于 x 的一元一次不等式组的解集, 那么这个不等式组可以是 ()



A. $\begin{cases} x > -2 \\ x < 2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x < 2 \\ x \leq -2 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x \geq -2 \\ x < 2 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x < -2 \\ x < 2 \end{cases}$

【答案】B

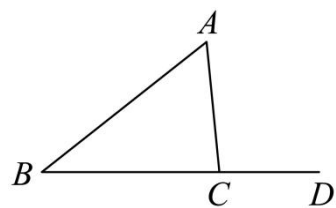
【解析】

【分析】本题主要考查了在数轴上表示不等式组的解集, 根据数轴表示的不等式解集求解即可, 掌握知识点的应用是解题的关键.

【详解】解: 由数轴知, 这个不等式组可以为 $\begin{cases} x < 2 \\ x \leq -2 \end{cases}$,

故选: B.

2. 如图, 点 D 是线段 BC 延长线上的点, $\angle ACD = 108^\circ$, $\angle B = \frac{1}{2}\angle A$, 则 $\angle A$ 的度数为 ()



A. 36°

B. 70°

C. 82°

D. 72°

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了三角形外角的性质, 利用性质求解即可.

【详解】 $\therefore \angle ACD$ 是 $\triangle ABC$ 的外角

$$\therefore \angle ACD = \angle A + \angle B$$

$$\because \angle B = \frac{1}{2}\angle A$$

$$\therefore \frac{1}{2}\angle A + \angle A = 108^\circ$$

解得： $\angle A = 72^\circ$

故选： D.

3. 下列命题中，假命题是（ ）

- A. 三个角对应相等的两个三角形全等
- B. 腰和顶角分别对应相等的两个等腰三角形全等
- C. 全等三角形对应边上的中线相等
- D. 全等三角形的面积相等

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查全等三角形的判定与性质，根据全等三角形的判定与性质逐一分析各选项的正确性.

【详解】 解： A、三个角对应相等的两个三角形全等.

全等三角形的判定方法中没有“角角角（AAA）”，三个角相等不能保证全等. 例如，两个大小不同的等边三角形三个角都相等，但显然不全等. 故原命题为假命题，故此选项符合题意.

B、腰和顶角分别对应相等的两个等腰三角形全等.

等腰三角形的腰相等，顶角对应相等则底角也相等. 根据“边角边（SAS）”，两腰及其夹角（顶角）对应相等，可判定全等. 是真命题，故此选项不符合题意.

C、全等三角形对应边上的中线相等.

全等三角形的对应边、对应角均相等，对应边上的中线、高、对应角的角平分线也相等. 是真命题，故此选项不符合题意.

D、全等三角形的面积相等.

全等三角形形状和大小完全相同，全等三角形的对应边、对应边上的中线、高、对应角的角平分线也相等，所以等三角形面积相等. 是真命题，故此选项不符合题意.

故选： A.

4. 等腰三角形的两边分别是 8、17，则它的周长是（ ）

- A. 25
- B. 33
- C. 42
- D. 33 或 42

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了三角形的三边关系、等腰三角形的定义. 分①腰长为 8 和②腰长为 17 两种情况，再结合三角形的三边关系，利用三角形的周长公式即可得.

【详解】解：由题意，分以下两种情况：

①当腰长为 8 时，则这个等腰三角形的三边长分别为 8、8、17，

此时 $8+8<17$ ，不满足三角形的三边关系，舍去；

②当腰长为 17 时，则这个等腰三角形的三边长分别为 8、17、17，

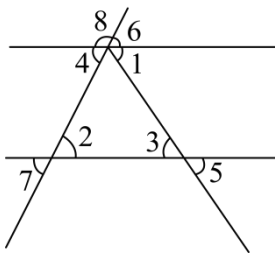
此时 $8+17>17$ ，满足三角形的三边关系，

所以它的周长为 $8+17+17=42$ ；

综上，这个等腰三角形的周长为 42，

故选：C.

5. 如图，要使得 $\angle 8$ 与 $\angle 5$ 互补，可以添加的条件是（ ）



A. $\angle 1 = \angle 3$

B. $\angle 2 = \angle 3$

C. $\angle 1 = \angle 3 = \angle 5$

D. $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了平行线的判定以及补角，将选项作为条件代入，证明 $\angle 8$ 与 $\angle 5$ 互补即可得到答案.

【详解】当 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ 时

$\because \angle 1 = \angle 3$

$\therefore$ 直线 L_1 和直线 L_2 平行

$\therefore \angle 6 = \angle 2 = \angle 3$

$\because \angle 3 = \angle 5$

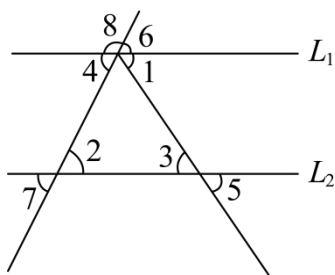
$\therefore \angle 6 = \angle 5$

$\because \angle 8 + \angle 6 = 180^\circ$

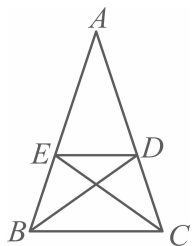
$\therefore \angle 8 + \angle 5 = 180^\circ$

$\therefore \angle 8$ 与 $\angle 5$ 互补

故选：D.



6. 如图, 在 ABC 中, 线段 $AB = AC$, BD, CE 都是 ABC 的角平分线, 连接 DE , 则图中的全等三角形的对数是 ()



- A. 3 对 B. 4 对 C. 5 对 D. 6 对

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了角平分线、全等三角形的判定、等腰三角形的性质, 根据已知条件得到 $\angle ABD = \angle ACE = \angle DBC = \angle ECB$, 利用全等三角形的判定即可.

【详解】 令 EC 和 BD 的交点为 O .

$$\because AB = AC$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB$$

$\because BD, CE$ 都是 ABC 的角平分线

$$\therefore \angle ABD = \angle ACE = \angle DBC = \angle ECB$$

$\because \angle A$ 是 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 的公共角

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE (\text{ASA})$$

$$\therefore BD = CE$$

$$\therefore \triangle BCE \cong \triangle CBD (\text{AAS})$$

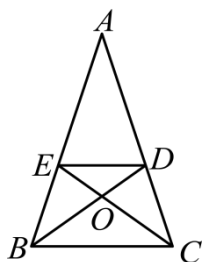
$$\therefore BE = DC$$

$$\therefore \triangle BED \cong \triangle CDE (\text{SAS})$$

$$\therefore \angle EOB = \angle DOC$$

$$\therefore \triangle EOB \cong \triangle DOC (\text{AAS})$$

故选：B.



二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 2 分, 满分 24 分)

7. “ x 与 y 的积不小于 4” 用不等式表示为_____.

【答案】 $xy \geq 4$

【解析】

【分析】 本题考查了列不等式, 根据 x 与 y 的积即为 xy , 不小于即为 $\geq$, 列不等式即可.

【详解】 解: 根据题意, 得 $xy \geq 4$,

故答案为: $xy \geq 4$.

8. 解不等式 $3x + 12 < 40 - x$ 得到的解集是_____.

【答案】 $x < 7$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元一次不等式, 根据解一元一次不等式的步骤解答即可求解, 掌握解一元一次不等式的步骤是解题的关键.

【详解】 解: 移项, 得 $3x + x < 40 - 12$,

合并同类项, 得 $4x < 28$,

系数化为 1, 得 $x < 7$,

故答案为: $x < 7$.

9. “和为钝角的两个角都是锐角” 是_____ (填写 “真” 或 “假”) 命题.

【答案】 假

【解析】

【分析】 本题考查的是命题与定理, 任何一个命题非真即假. 要说明一个命题的正确性, 一般需要推理、论证, 而判断一个命题是假命题, 只需举出一个反例即可.

根据锐角、钝角的概念判断即可.

【详解】解： $30^{\circ}+120^{\circ}=150^{\circ}$ ，即 30° 与 120° 的和是 150° ，而 120° 、 150° 都是钝角，

$\therefore$ “和为钝角的两个角都是锐角”是假命题，

故答案为：假.

10. 已知命题：全等三角形的对应边相等，这个命题的逆命题是：_____.

【答案】对应边相等的两个三角形是全等三角形

【解析】

【分析】根据逆命题的概念解答即可.

【详解】解：命题“全等三角形的对应边相等”的题设是“两个三角形是全等三角形”，结论是“它们的对应边相等”，故其逆命题是对应边相等的两个三角形是全等三角形.

故答案为：对应边相等的两个三角形是全等三角形.

【点睛】本题主要考查了逆命题，掌握交换原命题的题设与结论即可得出原命题的逆命题是解答本题的关键.

11. 若线段 AD 是等边 ABC 的中线，则 $\angle DAC$ 的度数是_____.

【答案】 30° ##30 度

【解析】

【分析】本题考查了等边三角形的性质，根据 ABC 是等边三角形，得 $\angle BAC = 60^{\circ}$ ，再结合三线合一的性质得 $\angle DAC = \frac{1}{2}\angle BAC = 30^{\circ}$ ，即可作答.

【详解】解： $\therefore ABC$ 是等边三角形，

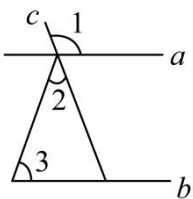
$\therefore \angle BAC = 60^{\circ}$ ，

$\therefore$ 线段 AD 是等边 ABC 的中线，

$\therefore \angle DAC = \frac{1}{2}\angle BAC = 30^{\circ}$ ，

故答案为： 30° .

12 如图，直线 a ， b 被直线 c 所截，若 $a \parallel b$ ， $\angle 1 = 110^{\circ}$ ， $\angle 2 = 30^{\circ}$ ，则 $\angle 3 =$ _____度.



【答案】 80

【解析】

【分析】 本题考查了对顶角相等，平行线的性质，掌握“两直线平行，内错角相等”是解题的关键.

由对顶角相等求得 $\angle 4 = 80^\circ$ ，再根据平行线的性质即可求解.

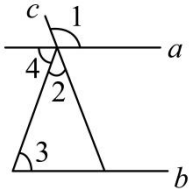
【详解】 解： $\because \angle 1 = 110^\circ$,

$$\therefore \angle 4 + \angle 2 = \angle 1 = 110^\circ,$$

$$\therefore \angle 4 = 110^\circ - \angle 2 = 110^\circ - 30^\circ = 80^\circ,$$

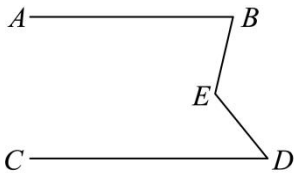
$$\therefore a \parallel b,$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 4 = 80^\circ,$$



故答案为：80.

13. 如图，已知 $AB \parallel CD$ ，且 $\angle BED = 130^\circ$ ，则 $\angle B + \angle D =$ _____ 度.



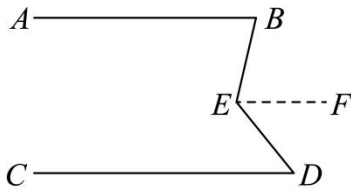
【答案】 130

【解析】

【分析】 本题考查平行线的性质，解题的关键是通过作辅助线，利用平行线的内错角相等性质来求解.

过点 E 作平行于 AB 、 CD 的直线，将 $\angle BED$ 分成与 $\angle B$ 、 $\angle D$ 相等的角，进而得出 $\angle B + \angle D$ 与 $\angle BED$ 的关系.

【详解】 如图：



过点 E 作 $EF \parallel AB$,

$$\therefore \angle B = \angle BEF,$$

$$\because AB \parallel CD,$$

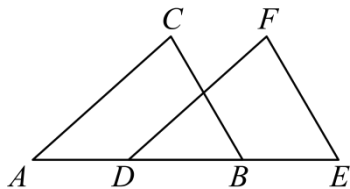
$$\therefore EF \parallel CD,$$

$$\therefore \angle D = \angle DEF,$$

$$\therefore \angle B + \angle D = \angle BEF + \angle DEF = \angle BED = 130^\circ.$$

故答案为：130.

14. 如图，已知 $AC \parallel DF$ ， $CB \parallel FE$ ，添加一个条件，使得 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，这个条件可以是_____（填写一个即可）.



【答案】 $AD = BE$ （答案不唯一）

【解析】

【分析】此题主要考查三角形全等的判定方法，判定两个三角形全等的一般方法有：SSS、SAS、ASA、AAS、HL、注意：AAA、SSA 不能判定两个三角形全等，判定两个三角形全等时，必须有边的参与，若有两边一角对应相等时，角必须是两边的夹角.

要使得 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，由条件可得到 $\angle A = \angle FDB$ ， $\angle E = \angle CBD$ ，再加条件 $AD = BE$ ，可以用 (ASA) 证明其全等.

【详解】解：添加条件 $AD = BE$ ；

$$\because AD = BE$$

$$\therefore AD + DB = BE + DB$$

$$\text{即： } AB = DE,$$

$$\because AC \parallel DF,$$

$$\therefore \angle A = \angle FDB,$$

$$\because CB \parallel FE,$$

$$\therefore \angle E = \angle CBD,$$

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中，

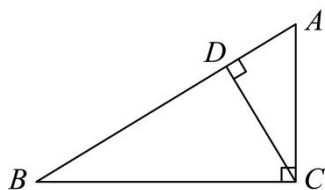
$$\begin{cases} \angle A = \angle FDB \\ AB = DE \\ \angle E = \angle CBD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF (\text{ASA})$$

故答案为： $AC = DF$ （答案不唯一）.

15. 如图，在直角三角形 ABC 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D ，则线段_____的长可

以表示点 B 到直线 CD 的距离.



【答案】 BD ## DB

【解析】

【分析】 本题考查了点到直线的距离的定义（垂线段的长度），能熟记点到直线的距离的定义的内容是解此题的关键．根据点到直线的距离的定义得出即可．

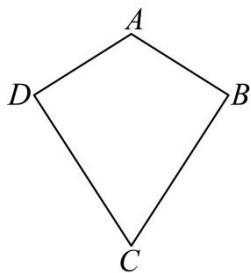
【详解】 解： 结合图形，

$\because CD \perp AB$ ，

$\therefore$ 点 B 到 CD 的距离是线段 BD 的长度，

故答案为： BD ．

16. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle A = 115^\circ$ ， $\angle C = 65^\circ$ ， 若线段 $AD = AB = a$ ， 线段 $CD = CB = b$ ， 则四边形 $ABCD$ 的面积为_____（用含有 a 、 b 的代数式表示）．

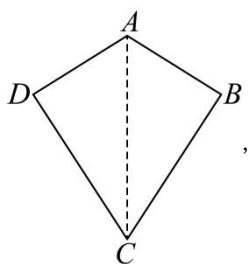


【答案】 ab ## ba

【解析】

【分析】 本题考查了全等三角形的判定与性质，连接 AC ， 证明 $\triangle ADC \cong \triangle ABC$ (SSS) 得出 $\angle D = \angle B$ ， 再由四边形的内角和求出 $\angle D = \angle B = 90^\circ$ ， 最后由面积公式计算即可得解， 熟练掌握以上知识点并灵活运用是解此题的关键．

【详解】 解： 如图， 连接 AC ，



在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle ABC$ 中,

$$\begin{cases} AD = AB \\ DC = BC, \\ AC = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle ABC (SSS),$$

$$\therefore \angle D = \angle B,$$

$$\because \angle D + \angle B + \angle A + \angle C = 360^\circ, \quad \angle A = 115^\circ, \quad \angle C = 65^\circ,$$

$$\therefore \angle D = \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{四边形 } ABCD \text{ 的面积为 } S_{\triangle ADC} + S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab = ab,$$

故答案为: ab .

17. 关于 x 的不等式组 $\begin{cases} -x+2>1 \\ x-2m\geq 1 \end{cases}$ 有两个整数解, 那么 m 的取值范围是_____.

【答案】 $-\frac{3}{2} < m \leq -1$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元一次不等式组, 一元一次不等式组的整数解, 解不等式组, 根据不等式组有 2 个整数解得出关于 m 的不等式组, 进而可求得 m 的取值范围.

【详解】 解: 解不等式组 $\begin{cases} -x+2>1 \\ x-2m\geq 1 \end{cases}$ 得: $1+2m \leq x < 1$,

$$\because \text{关于 } x \text{ 的不等式组 } \begin{cases} -x+2>1 \\ x-2m\geq 1 \end{cases} \text{ 有两个整数解,}$$

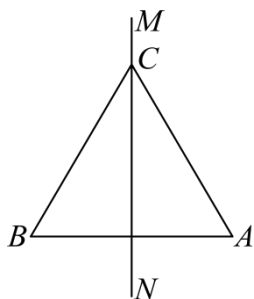
$$\therefore \text{这两个整数解为 } -1, 0,$$

$$\therefore -2 < 1+2m \leq -1,$$

$$\text{解得: } -\frac{3}{2} < m \leq -1,$$

$$\text{故答案为: } -\frac{3}{2} < m \leq -1.$$

18. 如图, 等边 $\triangle ABC$ 中, 直线 MN 垂直平分边 AB , 点 P 是直线 MN 上的一点, 若 $\triangle PAB$ 、 $\triangle PAC$ 、 $\triangle PBC$ 都是等腰三角形, 那么满足条件的点 P 的个数是_____.



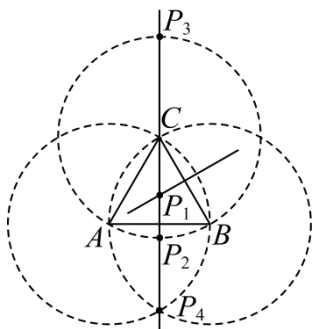
【答案】4

【解析】

【分析】本题考查了等腰三角形的判定与性质，主要利用了线段垂直平分线上的点到线段两端点的距离相等的性质，三角形的外心到三个顶点的距离相等，圆的半径相等的性质，作出图形更形象直观.

根据线段垂直平分线上的点到线段两端点的距离相等，首先 ABC 的外心满足，再根据圆的半径相等，以点 A 为圆心，以 AB 长为半径画圆， CB 的垂直平分线相交于两点，分别以点 C 、 B 为圆心，以 AC 长为半径画圆，与 CB 的垂直平分线相交于一点，再分别以点 C 、 B 为圆心，以 CB 长为半径画圆，与 $\odot A$ 相交于两点，即可得解.

【详解】如图所示，



- (1) ABC 的外心 P_1 为满足条件的一个点，
- (2) 以点 C 为圆心，以 CA 长为半径画圆， P_2 、 P_3 为满足条件的点，
- (3) 分别以点 A 、 B 为圆心，以 AC 长为半径画圆， P_4 为满足条件的点，

综上所述，满足条件的所有点 P 的个数为 4.

故答案为：4.

三、简答题 (本大题共 4 题，第 19 题 6 分，第 20 题 6 分，第 21 题 6 分，第 22 题 7 分，满分 25 分)

19. 解不等式： $3(x+3)-2x \geq 5-x$

【答案】 $x \geq -2$

【解析】

【分析】 本题考查一元一次不等式的解法，解题的关键是依据不等式的基本性质逐步化简求解.

先去括号，再通过移项、合并同类项、系数化为 1 来求解不等式.

【详解】解： $3x + 9 - 2x \geq 5 - x$

$$2x \geq -4$$

$$x \geq -2$$

$\therefore$ 原不等式的解集为 $x \geq -2$.

20. 解不等式组 $\begin{cases} x - (4x - 1) > 7 \\ \frac{2x + 1}{3} - 2 \geq x \end{cases}$ ，在数轴上表示出解集.

【答案】 $x \leq -5$ ，数轴见解析

【解析】

【分析】 本题考查一元一次不等式组的解法及在数轴上表示解集，解题的关键是分别求解不等式组中两个不等式，再取它们的公共部分.

分别求解不等式组里的两个不等式，然后确定公共解集，最后在数轴上表示.

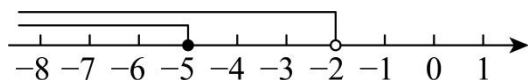
【详解】解： $\begin{cases} x - (4x - 1) > 7 \text{ ①} \\ \frac{2x + 1}{3} - 2 \geq x \text{ ②} \end{cases}$

由①得 $x < -2$

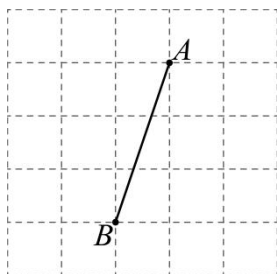
由②得 $x \leq -5$

所以原不等式组的解集为 $x \leq -5$

在数轴上表示如下：

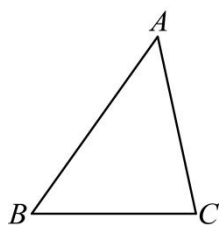


21. (1) 如图，在正方形网格中，任意两个正方形的公共顶点称为“格点”. 若点 A 、 B 、 C 都是格点，且 ABC 为等腰三角形，请利用图中的网格画出点 C 一个可能的位置.



(2) 如图，已知锐角 ABC ，用直尺和圆规完成作图：在恰当的位置作一个与 ABC 全等的三角形，并

使它与 $\triangle ABC$ 拼成一个轴对称四边形（保留作图痕迹，写出结论）



【答案】(1) 见解析；(2) 见解析

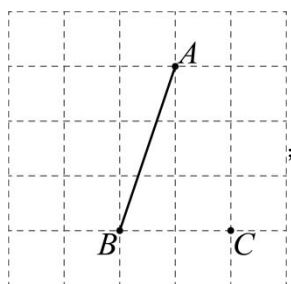
【解析】

【分析】本题考查了等腰三角形的定义、全等三角形的判定与性质、轴对称的概念等知识点，熟练掌握以上知识点并灵活运用是解此题的关键。

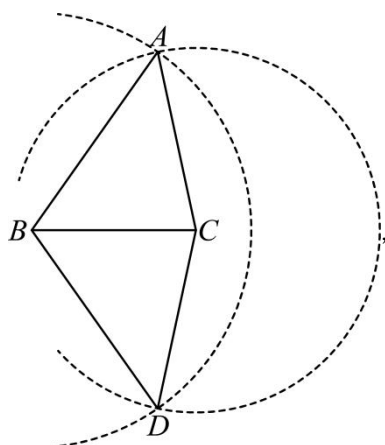
(1) 根据等腰三角形的定义结合网格特点作图即可；

(2) 分别以点 B 、 C 为圆心，以 BA 、 CA 的长为半径画弧，两弧在边 BC 的另一侧交于点 D ，连接 BD 、 CD ，则点 D 即为所求。

【详解】解：(1) 如图，点 C 即为所作，



(2) 如图，分别以点 B 、 C 为圆心，以 BA 、 CA 的长为半径画弧，两弧在边 BC 的另一侧交于点 D ，连接 BD 、 CD ，则点 D 即为所求，



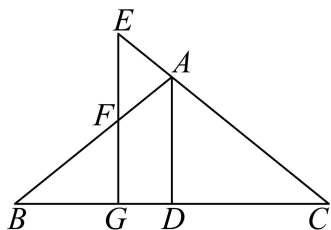
由作图可得： $AB = BD$ ， $AC = CD$ ，

$\therefore BC = BC$ ，

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DBC$ (SSS)，

由轴对称图形的定义可得，四边形 $ABDC$ 为轴对称图形.

22. 已知：如图， $\triangle ABC$ 中， $AD \perp BC$ 于点 D ， $EG \perp BC$ 于点 G ，线段 $AE = AF$ ，点 E 、 A 、 C 在同一直线上，求证： AD 平分 $\angle BAC$. 请把以下证明过程补充完整.



证明： $\because AD \perp BC$ 于点 D ， $EG \perp BC$ 于点 G ，

$$\therefore \angle EGC = \angle ADC = 90^\circ$$

$$\therefore EG \parallel AD \text{ ()}$$

$$\therefore \angle E = \text{ } \text{ ()},$$

$$\angle EFA = \text{ } \text{ ()}$$

$$\because AE = AF,$$

$$\therefore \angle E = \text{ } \text{ ()}$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD, \text{ 即 } AD \text{ 平分 } \angle BAC.$$

【答案】见解析

【解析】

【分析】根据平行线的判定和性质，等腰三角形性质，角的平分线定义证明即可.

本题考查了平行线的判定和性质，等腰三角形性质，角的平分线定义，熟练掌握平行线的判定和性质是解题的关键.

【详解】证明： $\because AD \perp BC$ 于点 D ， $EG \perp BC$ 于点 G ，

$$\therefore \angle EGC = \angle ADC = 90^\circ$$

$$\therefore EG \parallel AD \text{ (同位角相等，两直线平行)}$$

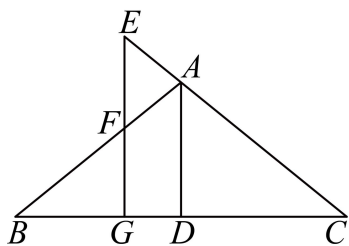
$$\therefore \angle E = \angle DAC \text{ (两直线平行，同位角相等)},$$

$$\angle EFA = \angle FAD \text{ (两直线平行，内错角相等)}$$

$$\because AE = AF,$$

$$\therefore \angle E = \angle EFA \text{ (等边对等角)}$$

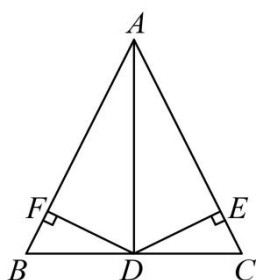
$$\therefore \angle BAD = \angle CAD, \text{ 即 } AD \text{ 平分 } \angle BAC.$$



故答案为：同位角相等，两直线平行； $\angle DAC$ ；两直线平行，同位角相等； $\angle FAD$ ；两直线平行，内错角相等； $\square DEFA$ ；等边对等角.

四、解答题 (本大题共 3 题, 每小题 7 分, 满分 21 分)

23. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, D 为 BC 的中点, $DE \perp AC$, $DF \perp AB$, 垂足分别是点 E 、 F , 求证: $DF = DE$.

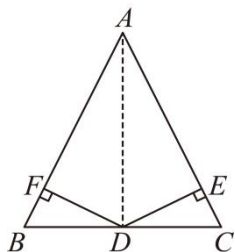


【答案】见解析

【解析】

【分析】本题考查等腰三角形的性质和角平分线的性质, 先根据等腰三角形的三线合一得到 AD 平分 $\angle BAC$, 然后根据角平分线的性质即可得到结论.

【详解】证明: 连接 AD ,



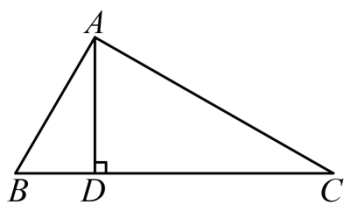
$\because AB = AC$, D 为 BC 的中点,

$\therefore AD$ 平分 $\angle BAC$,

又 $\because DE \perp AC$, $DF \perp AB$,

$\therefore DF = DE$.

24. 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AD \perp BC$ 于交线段 BC 于点 D , $AB = CD - BD$, 求证: $\angle B = 2\angle C$.

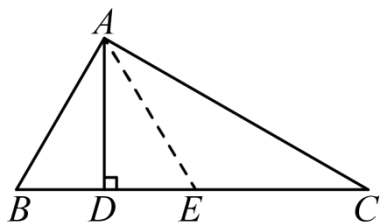


【答案】见解析

【解析】

【分析】本题考查了线段垂直平分线的判定和性质，三角形的外角性质，等边对等角．在 DC 上取点 E ，使 $DE = BD$ ，得到 AD 垂直平分 BE ，推出 $\angle B = \angle AEB$ ，再三角形的外角性质即可证明结论成立．

【详解】证明：在 DC 上取点 E ，使 $DE = BD$ ，



$\therefore AD \perp BC$ ，且 $BD = DE$ ， $\therefore AD$ 垂直平分 BE ，

$\therefore AB = AE$ ，

$\therefore \angle B = \angle AEB$ ，

$\therefore AB = CD - BD$ ，且 $CD - BD = CD - DE = CE$ ，

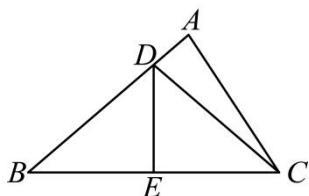
$\therefore AE = CE$ ，

$\therefore \angle C = \angle EAC$ ，

$\therefore \angle AEB = \angle C + \angle EAC = 2\angle C$ ，

$\therefore \angle B = 2\angle C$ ，

25. 已知：如图，在 ABC 中， $\angle A = 82^\circ$ ， $\angle B = 41^\circ$ ，线段 BC 的垂直平分线交线段 BC 于点 E ，交线段 AB 于点 D ，连接 CD ．如果 $AD = 2$ ， $BD = 6$ ，求 $\triangle ADC$ 的周长．



【答案】14

【解析】

【分析】本题考查线段垂直平分线的性质，等腰三角形的判定与性质．

由 BC 的垂直平分线交 AB 于点 D ，可得 $CD = BD = 6$ ，又由等边对等角，可求得 $\angle BCD$ 的度数，继而求

得 $\angle ADC$ 的度数, 则可判定 $\triangle ACD$ 是等腰三角形, 继而求得答案.

【详解】 $\because DE$ 垂直平分 BC ,

$$\therefore DB = DC,$$

$$\therefore \angle B = \angle DCE = 41^\circ,$$

$$\therefore \angle B + \angle DCE = \angle CDA = 82^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 82^\circ,$$

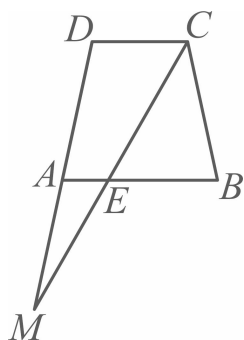
$$\therefore \angle A = \angle CDA,$$

$$\therefore CD = CA = BD,$$

$$\therefore C_{\triangle ADC} = AD + AC + DC = AD + 2BD = 14.$$

五、综合题 (本大题共 2 题, 每小题 9 分, 满分 18 分)

26. 如图, 已知 $\angle DAB = \angle B$, 直线 CE 交线段 DA 的延长线于点 M , 按下列步骤完成证明: $CE > CB$.



步骤一、

假设 $CE = CB$, 则 $\angle B =$ _____ (_____)

$$\therefore \angle DAB = \angle B,$$

$$\therefore \angle DAB = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\therefore \underline{\hspace{2cm}} // \underline{\hspace{2cm}}$$

这与 _____ 矛盾,

即 CE 不等于 CB .

步骤二、(请自己写出后面的证明过程)

【答案】见解析

【解析】

【分析】本题考查反证法, 平行线的判定与性质, 假设 $CE = CB$, 得出 $\angle B = \angle CEB$, 再证明得出 $DA // CE$, 这与直线 CE 交 DA 的延长线于点 M 矛盾, 即 CE 不等于 CB . 假设 $CE < CB$, 则 $\angle B < \angle CEB$, 得出 $\angle DAB < \angle AEM$, 与 $\angle DAB = \angle M + \angle AEM$ 矛盾, 即 CE 不小于 CB .

【详解】步骤一、假设 $CE = CB$ ，则 $\angle B = \angle CEB$ （等边对等角）

$$\therefore \angle DAB = \angle B,$$

$$\therefore \angle DAB = \angle CEB$$

$$\therefore DA \parallel CE,$$

这与直线 CE 交 DA 的延长线于点 M 矛盾，

即 CE 不等于 CB 。

步骤二、

假设 $CE < CB$ ，则 $\angle B < \angle CEB$ ，

$$\therefore \angle DAB = \angle B,$$

$$\therefore \angle DAB < \angle CEB$$

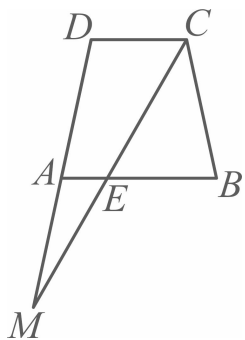
$$\therefore \angle CEB = \angle AEM,$$

$$\therefore \angle DAB < \angle AEM$$

与 $\angle DAB = \angle M + \angle AEM$ 矛盾

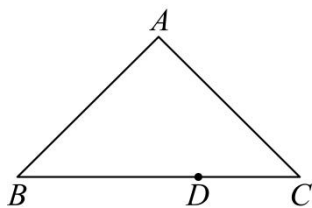
即 CE 不小于 CB 。

综上所述， $CE > CB$ 。



27. 费马是 17 世纪的法国数学家，他曾研究过一种特殊的点，它满足“在一个三角形所在平面上，到该三角形的三个顶点距离之和最短”，这样的点被称为“该三角形的费马点”。

(1) 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，点 D 在线段 BC 上且线段 $BD > DC$ ，请判断：点 D 是否为 $\triangle ABC$ 的费马点，并说明理由。



(2) 现有真命题：在 $\triangle ABC$ 中，三个内角都小于 120° ，在其内部存在一点 P ，满足 $\angle APB = \angle APC = \angle BPC = 120^\circ$ ，则点 P 称为 $\triangle ABC$ 的费马点。

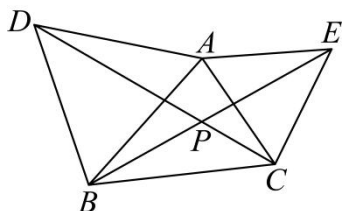
小明利用该真命题，尝试用尺规作费马点，他的作法如下：

如图，对一个所有内角都小于 120° 的 $\triangle ABC$ ，分别以线段 AB 、 AC 为边向外侧作等边三角形 ABD 和等边三角形 ACE ，连接 CD 、 BE 交于点 P 。请完成证明：

①求证： $\angle ADC = \angle ABE$ ；

②在线段 DP 上取点 F 使 $PF = BP$ ，连接 BF ，

求证：点 P 是 $\triangle ABC$ 的费马点。



【答案】 (1) 点 D 不是 $\triangle ABC$ 的费马点，理由见解析

(2) ①见解析；②见解析

【解析】

【分析】 (1) 作 $AE \perp BC$ 于点 E ，连接 AD ，由等腰三角形的性质可知 $BE = CE$ ，结合 $BD > DC$ 可知 E 、 D 不重合。再根据在三角形中大角对大边，即得出 $AD > AE$ ，即 $BC + AE < BC + DA$ ，从而得出点 D 不是 $\triangle ABC$ 的费马点；

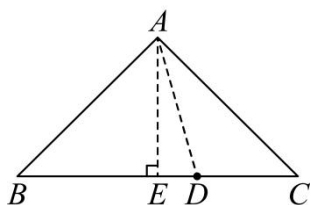
(2) ①由等边三角形的性质易证 $\triangle ABE \cong \triangle ADC$ (SAS)，即得出 $\angle ADC = \angle ABE$ ；

②连接 AP 。由①知 $\angle ABD = \angle ADB = 60^\circ$ ， $\angle ADP = \angle ABP$ ，结合三角形外角的性质即得出 $\angle BPC = \angle PDB + \angle PBD = 120^\circ$ ，从而可求 $\angle BPD = 60^\circ$ 。易证 $\triangle PBF$ 为等边三角形，得出 $BF = BP$ ， $\angle BFP = \angle FBP = \angle DBA = 60^\circ$ ，即可证 $\angle DBF = \angle FBP$ ，从而可证 $\triangle DFB \cong \triangle ABP$ (SAS)，得出 $\angle APB = \angle DFB = 120^\circ$ ，即点 P 是 $\triangle ABC$ 的费马点。

【小问1详解】

结论：点 D 不是 $\triangle ABC$ 的费马点。

理由：如图，作 $AE \perp BC$ 于点 E ，连接 AD ，



$\therefore BE = CE$ 。

$\because BD > DC$ ，

$\therefore E, D$ 不重合.

在 $\triangle ADE$ 中, $\angle ADE < \angle AED = 90^\circ$,

$\therefore AD > AE$,

$\therefore$ 点 E 到各顶点的距离之和 $= BC + AE < BC + DA =$ 点 D 到各顶点的距离之和,

$\therefore$ 点 D 不是 $\triangle ABC$ 的费马点;

【小问 2 详解】

①证明: $\because \triangle ABD$ 和 $\triangle ABE$ 都为等边三角形,

$\therefore \angle DAB = \angle CAE = 60^\circ$, $AD = AB$, $AC = AE$,

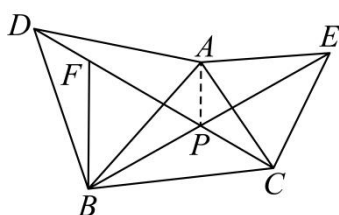
$\therefore \angle DAB + \angle BAC = \angle CAE + \angle BAC$, 即 $\angle DAC = \angle BAE$,

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADC$ (SAS),

$\therefore \angle ADC = \angle ABE$;

②证明: 如图, 连接 AP .

由①知 $\angle ABD = \angle ADB = 60^\circ$, $\angle ADP = \angle ABP$,



$\therefore \angle BPC = \angle PDB + \angle PBD = \angle ADB - \angle ADP + \angle ABD + \angle ABP = 60^\circ - \angle ADP + 60^\circ + \angle ABP = 120^\circ$,

$\therefore \angle BPD = 180^\circ - \angle BPC = 60^\circ$.

又 $\because PF = PB$,

$\therefore \triangle PBF$ 为等边三角形,

$\therefore BF = BP$, $\angle BFP = \angle FBP = \angle DBA = 60^\circ$,

$\therefore \angle FBP - \angle FBA = \angle DBA - \angle FBA$, 即 $\angle DBF = \angle FBP$,

$\therefore \triangle DFB \cong \triangle ABP$ (SAS),

$\therefore \angle APB = \angle DFB = 180^\circ - \angle BFP = 120^\circ$.

由 $\angle APB + \angle APC + \angle BPC = 360^\circ$, 得 $\angle APC = 120^\circ$,

$\therefore$ 点 P 是 $\triangle ABC$ 的费马点.

【点睛】 本题考查等腰三角形的性质, 三角形全等的判定和性质, 等边三角形的判定和性质, 三角形外角的性质等知识, 理解“费马点”的定义是解题关键.

