

2024 学年第二学期期末考试七年级数学

(时间：90 分钟满分：100 分)

注意：答题时，考生务必按答题要求在答题纸规定位置作答，在本试卷上答题无效

一、选择题（本大题共 6 题，每题 3 分，满分 18 分）

1. 下列方程中为一元二次方程的是（ ）

- A. $2x+1=0$ B. $x^2-1=0$ C. $y^2+x=1$ D. $\frac{1}{x}+x^2=1$

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查一元二次方程的定义；根据一元二次方程的定义：只含有一个未知数，且未知数的最高次数为 2 的整式方程，逐一判断选项即可.

【详解】解：选项 A: $2x+1=0$ ，是一元一次方程，最高次数为 1，不符合条件.

选项 B: $x^2-1=0$ ，仅含未知数 x ，最高次数为 2，且为整式方程，符合定义.

选项 C: $y^2+x=1$ ，含两个未知数 x 和 y ，是二元二次方程，不符合“一元”要求.

选项 D: $\frac{1}{x}+x^2=1$ ，含分式 $\frac{1}{x}$ ，属于分式方程，非整式方程，不符合条件.

综上，只有 B 满足一元二次方程的定义.

故选：B.

2. 下列一元二次方程中，有两个不相等的实数根的方程是（ ）

- A. $x^2+1=0$ B. $x^2-2x+3=0$ C. $x^2-2x+1=0$ D. $x^2+x-3=0$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查一元二次方程根的判别式；通过计算每个方程根的判别式，判断是否有两个不相等的实数根即可.

【详解】解：对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ，根的判别式 $\Delta=b^2-4ac$ ：

选项 A: $x^2+1=0$

$\Delta=0^2-4\times 1\times 1=-4<0$ ，无实数根.

选项 B: $x^2-2x+3=0$

$\Delta=(-2)^2-4\times 1\times 3=4-12=-8<0$ ，无实数根.

选项 C: $x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 4 - 4 = 0$, 有两个相等实数根.

选项 D: $x^2 + x - 3 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 1 + 12 = 13 > 0$, 有两个不相等实数根.

故选: D.

3. 下列等式一定成立的是 ()

A. $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$ B. $(\sqrt{-a})^2 = a$ C. $\sqrt{a^4} = a^2$ D. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查二次根式的性质和运算; 逐一分析各选项是否在任意情况下成立, 结合平方根的性质和运算规则进行判断即可.

【详解】解: 选项 A: $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$

平方根相加不满足分配律. 例如, 当 $a=1$, $b=1$ 时, 左边为 $1+1=2$, 右边为 $\sqrt{2} \approx 1.414$, 显然不等. 因此 A 不成立.

选项 B: $(\sqrt{-a})^2 = a$

根号下的数必须非负, 故 $-a \geq 0$, 即 $a \leq 0$. 此时 $\sqrt{-a}$ 有意义, 但平方后结果为 $-a$, 而等式右侧为 a , 仅当 $a=0$ 时成立. 若 $a=-3$, 左边为 3, 右边为 -3, 矛盾. 因此 B 不一定成立.

选项 C: $\sqrt{a^4} = a^2$

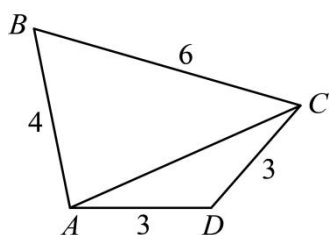
根据平方根的性质, $\sqrt{a^4} = \sqrt{(a^2)^2} = |a^2|$. 但 $a^2 \geq 0$ 恒成立, 故 $\sqrt{a^4} = a^2$ 对任意实数 a 均成立. 因此 C 一定成立.

选项 D: $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b}$

根式乘法法则要求 $a \geq 0$ 且 $b \geq 0$. 若 $a=-1$, $b=-1$, 左边 $\sqrt{1}=1$, 但右边 $\sqrt{-1}$ 无意义. 因此 D 仅在 a 、 b 非负时成立, 题目未限定条件, 故 D 不一定成立.

故选: C.

4. 我们知道三角形具有稳定性, 但四边形却是不稳定的. 已知四边形 $ABCD$ 的边长如图所示. 当 ABC 为等腰三角形时, 对角线 AC 的长为 ()



- A. 4 或 6 B. 5 C. 4 D. 6

【答案】C

【解析】

【分析】 本题主要考查三角形的三边关系，等腰三角形的定义；根据等腰三角形的定义得到 $AC = 4$ 或 $AC = 6$ ，再结合三角形的三边关系计算结果即可.

【详解】 解： 当 ABC 为等腰三角形时，

$$\therefore AC = AB = 4 \text{ 或 } AC = BC = 6;$$

当 $AC = 4$ 时

$$ABC \text{ 满足 } 4 - 4 < 6 < 4 + 4, 6 - 4 < 6 < 4 + 6,$$

$$\text{在 } \triangle ACD \text{ 满足 } 4 - 3 < 3 < 4 + 3;$$

当 $AC = 6$ 时，

在 $\triangle ACD$ 中， $3 + 3 = 6$ ， 不满足条件， 舍掉；

$$\therefore AC = 4;$$

故选： C.

5. 下列条件中， 不能判断 ABC 是等边三角形的是 ().

- A. $AB = AC$, $\angle B = 60^\circ$ B. $AB = AC$, $\angle B = \angle A$
C. $\angle A = \angle B = 60^\circ$ D. $\angle A + \angle B = 2\angle C$

【答案】D

【解析】

【分析】 根据等边三角形的定义和判定定理判断即可.

【详解】 解： A 选项： $\because AB = AC$, $\angle B = 60^\circ$.

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形， 故 A 选项不符合题意；

B 选项： $\because \angle B = \angle A$, $\therefore AC = BC$,

$$\because AB = AC, \therefore AB = AC = BC,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形， 故 B 选项不符合题意；

C 选项： $\because \angle A = \angle B = 60^\circ$, $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 60^\circ$,

$\therefore \angle A = \angle B = \angle C$, $\therefore AB = AC = BC$,

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形, 故 C 选项不符合题意;

D 选项: $\because \angle A + \angle B = 2\angle C$, $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$,

$\therefore \angle C = 60^\circ$, 不能判断 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 故 D 选项符合题意,

故选: D.

【点睛】本题考查了等边三角形的判定, 解题的关键是熟悉等边三角形的定义及等边三角形的判定定理. 注意: 等边三角形的判定定理有: ①三边都相等的三角形是等边三角形, ②三角都相等的三角形是等边三角形, ③有一个角等于 60° 的等腰三角形是等边三角形.

6. 对于下列两个命题, 判断正确的是 ()

命题①: 如果两个等腰三角形的底边和底边上的高对应相等, 那么这两个等腰三角形全等;

命题②: 如果两个等腰三角形的腰和腰上的高对应相等, 那么这两个等腰三角形全等.

A. ①是真命题, ②是假命题

B. ①是假命题, ②是真命题;

C. ①②都是真命题

D. ①②都是假命题.

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查全等三角形的判定条件, 命题, 等腰三角形的性质; 通过全等三角形的判定条件分析两个命题的真假. 命题①中, 底边和底边上的高对应相等, 可根据 (SSS) 确定三角形全等; 命题②中, 腰和腰上的高对应相等, 但顶角可能互补, 导致三角形不全等; 由此判断即可.

【详解】解: 命题①: 等腰三角形的底边和底边上的高对应相等. 底边上的高将底边平分, 结合勾股定理可知两腰长必然相等. 因此, 两个等腰三角形的三边对应相等 (SSS), 全等成立, 命题①为真.

命题②: 等腰三角形的腰和腰上的高对应相等. 例如, 顶角为 30° 和 150° 的两个等腰三角形, 腰长和腰上的高相等, 但底边长度不同, 不全等. 因此, 命题②为假.

综上, ①为真命题, ②为假命题,

故选: A.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每空 2 分, 满分 24 分)

7. 若最简二次根式 $\sqrt{2a-1}$ 与 $\sqrt{11-4a}$ 是同类二次根式, 则 a 的值为_____.

【答案】2

【解析】

【分析】本题考查的是同类二次根式的概念, 掌握二次根式化成最简二次根式后, 被开方数相同的二次根

式叫做同类二次根式是解题的关键.

根据同类二次根式的概念列出方程, 解方程得到答案.

【详解】解: 由题意得 $2a-1=11-4a$,

解得: $a=2$,

故答案为: 2,

8. 若代数式 $\frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$ 在实数范围内有意义, 则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq 1, x \neq 2$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式和分式的综合应用, 熟练掌握二次根式和分式的意义是解题的关键.
根据二次根式和分式的意义即可得到结果.

【详解】解: 由题意可得: $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases}$,

解得: $x \geq 1, x \neq 2$;

故答案为: $x \geq 1, x \neq 2$.

9. 方程 $(x-4)^2 = 2(x-4)$ 的解是_____.

【答案】 $x_1 = 4, x_2 = 6$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程, 熟练掌握一元二次方程的解法是解题的关键;
通过移项、因式分解求解方程.

【详解】解: $(x-4)^2 - 2(x-4) = 0$

$$(x-4)(x-4-2) = 0$$

$$(x-4)(x-6) = 0$$

$$x-4=0 \text{ 或 } x-6=0$$

解得 $x_1 = 4, x_2 = 6$;

故答案为 $x_1 = 4, x_2 = 6$.

10. 比较大小: $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ _____ $2 + \sqrt{3}$ (填 “>” 或 “<”).

【答案】 >

【解析】

【分析】 本题考查考查了二次根式混合运算，二次根式的大小比较，求出 $(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2$ ， $(2+\sqrt{3})^2$ 即可求解，熟练掌握知识点的应用是解题的关键.

【详解】 解： $\because (\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 = 8+4\sqrt{3}$ ， $(2+\sqrt{3})^2 = 7+4\sqrt{3}$ ，

$$\therefore 8+4\sqrt{3} > 7+4\sqrt{3},$$

$$\therefore \sqrt{6}+\sqrt{2} > 2+\sqrt{3},$$

故答案为：>.

11. 科学家研发了一种新的蓝光唱片，一张蓝光唱片的容量约为 2×10^5 GB，一张普通唱片的容量约为25 GB，则蓝光唱片的容量是普通唱片的_____倍. (用科学记数法表示)

【答案】 8×10^3

【解析】

【分析】 本题考查科学记数法，按照定义，用科学记数法表示较大的数时，一般形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，按要求表示即可得到答案，确定 a 与 n 的值是解决问题的关键.

【详解】 解： 蓝光唱片的容量是普通唱片的 $\frac{2 \times 10^5}{25} = 8000 = 8 \times 10^3$ 倍，

故答案为： 8×10^3 .

12. 化简： $a\sqrt{-\frac{1}{a^3}} =$ _____

【答案】 $\frac{\sqrt{-a}}{a}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式有意义的条件，二次根式的化简等知识，熟练掌握二次根式性质，是解题的关键. 根据二次根式的性质化简即可.

【详解】 解： 根据题意有： $-\frac{1}{a^3} \geq 0$ ， $a \neq 0$ ，

$$\therefore a < 0, \text{ 即 } -a > 0,$$

$$\therefore a\sqrt{-\frac{1}{a^3}} = a \cdot \sqrt{-\frac{a}{a^4}} = a \cdot \frac{1}{a^2} \sqrt{-a} = \frac{\sqrt{-a}}{a},$$

故答案为: $\frac{\sqrt{-a}}{a}$.

13. 已知 $0 < x < 1$, 且 $x + \frac{1}{x} = 2\sqrt{2}$, 则 $x - \frac{1}{x}$ 的值为_____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题考查了分式的化简求值、平方根, 熟练掌握运算法则和完全平方公式是解题关键.

先根据完全平方公式求出 $(x - \frac{1}{x})^2$ 的值, 再结合 $0 < x < 1$ 判断 $x - \frac{1}{x}$ 的正负, 进而求出 $x - \frac{1}{x}$ 的值.

【详解】 解: $(x - \frac{1}{x})^2 = x^2 - 2 \times x \times \frac{1}{x} + (\frac{1}{x})^2 = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$

$(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2 \times x \times \frac{1}{x} + (\frac{1}{x})^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$

则 $(x - \frac{1}{x})^2 = (x + \frac{1}{x})^2 - 4$.

已知 $x + \frac{1}{x} = 2\sqrt{2}$, 将其代入上式可得:

$(x - \frac{1}{x})^2 = (2\sqrt{2})^2 - 4 = 8 - 4 = 4$

所以 $x - \frac{1}{x} = \pm 2$,

因为 $0 < x < 1$, 那么 $\frac{1}{x} > 1$,

所以 $x - \frac{1}{x} = -2$.

故答案为: -2.

14. 已知 ABC 的三边长互不相等, 若以 B 、 C 为两个顶点画不同位置的三角形 (与原三角形不重合), 使所画的三角形与 ABC 全等, 这样的三角形最多可以画_____个.

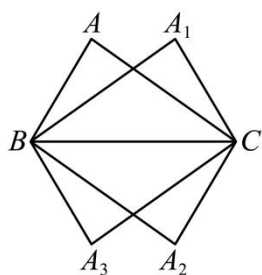
【答案】 3

【解析】

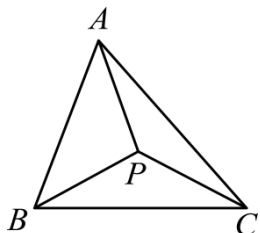
【分析】 本题主要考查了三角形全等的定义, 根据题意画出图形, 得出答案即可.

【详解】 解: 如图, 可以画 $\triangle A_1BC$ 、 $\triangle A_2BC$ 、 $\triangle A_3BC$ 与 ABC 全等, 因此这样的三角形最多可以画 3 个.

故答案为: 3.



15. 如图，点 P 为 $\triangle ABC$ 的外心，若 $\angle PAC = 20^\circ$ ， $\angle PCB = 30^\circ$ ，则 $\angle PAB$ 的大小为_____.



【答案】 40°

【解析】

【分析】 本题考查了线段垂直平分线的性质，等腰三角形的定义和三角形的内角和，熟练掌握线段垂直平分线的性质是解题的关键.

利用线段垂直平分线的性质可得 $PA = PB = PC$ ，从而利用等腰三角形的性质可得 $\angle PCA = \angle PAC = 20^\circ$ ， $\angle PBC = \angle PCB = 30^\circ$ ， $\angle PAB = \angle PBA$ ，然后利用三角形的内角和定理进行计算即可解答.

【详解】 $\because$ 点 P 为 $\triangle ABC$ 的外心， $\angle PAC = 20^\circ$ ， $\angle PCB = 30^\circ$ ，

$\therefore$ 点 P 为 $\triangle ABC$ 三边垂直平分线的交点，

$\therefore PA = PB = PC$ ，

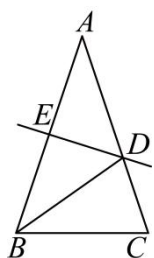
$\therefore \angle PCA = \angle PAC = 20^\circ$ ， $\angle PBC = \angle PCB = 30^\circ$ ， $\angle PAB = \angle PBA$ ，

$\because \angle PCA + \angle PAC + \angle PBC + \angle PCB + \angle PAB + \angle PBA = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle PAB = \angle PBA = 40^\circ$ ，

故答案为： 40° .

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $BC = a$ ， $\angle A = 36^\circ$ ， AB 的垂直平分线交 AC 边于点 D ，交 AB 边于点 E ， $CD = b$ ，则 $\triangle ABC$ 的周长为_____ (用 a 、 b 表示).



【答案】 $3a + 2b$

【解析】

【分析】根据垂直平分线的性质得到 $AD = BD$ ，则 $\angle ABD = \angle A = 36^\circ$ ，进一步证明 $BD = BC = AD = a$ ，得到 $AB = AC = AD + CD = a + b$ ，即可求出答案.

【详解】解： $\because AB$ 的垂直平分线交 AC 边于点 D ，交 AB 边于点 E

$$\therefore AD = BD,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle A = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = \angle A + \angle ABD = 72^\circ,$$

$$\because AB = AC, \angle A = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle C = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 72^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = \angle C = 72^\circ,$$

$$\therefore BD = BC = AD = a,$$

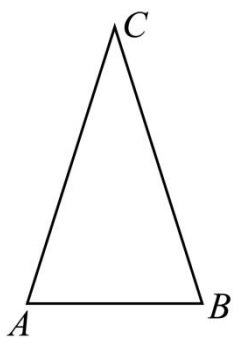
$$\therefore AB = AC = AD + CD = a + b,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的周长为 } 3a + 2b$$

故答案为： $3a + 2b$

【点睛】此题考查了等腰三角形的判定和性质、垂直平分线的性质、三角形内角和定理、三角形外角的性质等知识，熟练掌握等腰三角形的判定和性质是关键.

17. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 35^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 绕着点 A 旋转 α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$)，旋转后的点 B 落在 BC 上，点 B 的对应点为 D ，连接 AD ， AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线，则 $\alpha =$ _____.



【答案】 $\left(\frac{110}{3}\right)^\circ$

【解析】

【分析】如图， $AB = AD$ ， $\angle BAD = \alpha$ ，根据角平分线的定义可得 $\angle CAD = \angle BAD = \alpha$ ，根据三角形的外角性质可得 $\angle ADB = 35^\circ + \alpha$ ，即得 $\angle B = \angle ADB = 35^\circ + \alpha$ ，然后根据三角形的内角和定理求解即可.

【详解】解：如图，根据题意可得： $AB = AD$ ， $\angle BAD = \alpha$ ，

$\therefore AD$ 是 $\angle BAC$ 的角平分线，

$\therefore \angle CAD = \angle BAD = \alpha$ ，

$\therefore \angle ADB = \angle C + \angle CAD = 35^\circ + \alpha$ ， $AB = AD$ ，

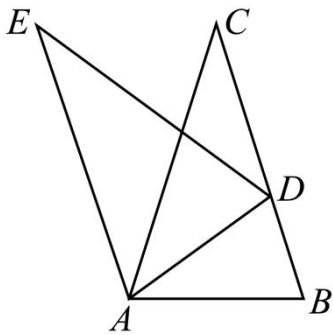
$\therefore \angle B = \angle ADB = 35^\circ + \alpha$ ，

则在 ABC 中， $\therefore \angle C + \angle CAB + \angle B = 180^\circ$ ，

$\therefore 35^\circ + 2\alpha + 35^\circ + \alpha = 180^\circ$ ，

解得： $\alpha = \left(\frac{110}{3}\right)^\circ$ ；

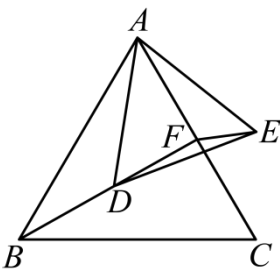
故答案为： $\left(\frac{110}{3}\right)^\circ$ 。



【点睛】本题考查了旋转的性质、等腰三角形的性质、三角形的外角性质以及

三角形的内角和等知识，熟练掌握相关图形的性质是解题的关键。

18. 如图，边长为 6 的等边 ABC 中， BF 是 AC 上的中线且 $BF = 3\sqrt{3}$ ，点 D 在 BF 上，连接 AD ，在 AD 右侧作等边 ADE ，连接 EF ，则 $\triangle AEF$ 的周长最小值为_____。



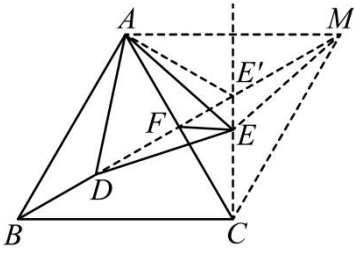
【答案】 $3 + 3\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查轴对称最短问题、等边三角形的性质和判定，全等三角形的判定和性质等知识，解题的关键是证明点 E 的运动轨迹，本题难度比较大，属于中考填空题中的压轴题。通过分析点 E 的运动轨迹，点 E 在射线 CE 上运动（ $\angle ACE = 30^\circ$ ），作点 A 关于直线 CE 的对称点 M ，连接 FM 交 CE 于点 E' ，此时

$AE' + FE'$ 的值最小，求出最小值即可。

【详解】解：连接 CE ，如图所示：



$\because \triangle ABC, \triangle ADE$ 均为等边三角形，

$\therefore AB = AC = 6, AD = AE, \angle BAC = \angle DAE = \angle ABC = 60^\circ,$

$\therefore \angle BAD = 60^\circ - \angle DAC = \angle CAE,$

$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE (\text{SAS}),$

$\therefore \angle ABD = \angle ACE,$

$\because AF = CF = \frac{1}{2}AC = 3, BF = 3\sqrt{3},$

$\therefore \angle ABD = \angle CBD = \angle ACE = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ, BF \perp AC,$

$\therefore$ 点 E 在射线 CE 上运动 ($\angle ACE = 30^\circ$),

作点 A 关于直线 CE 的对称点 M ，连接 FM 交 CE 于点 E' ，连接 EM ，

$\therefore AE + FE = EM + FE,$

$\because AF$ 为定值，

$\therefore$ 当 $AE + FE$ 最小时， $\triangle AEF$ 的周长最小，

$\because$ 两点之间线段最短，

$\therefore$ 当点 E 在点 E' 处时， $\triangle AEF$ 的周长最小，且最小值为 $AF + FM$ 的长，

$\because CA = CM, \angle ACM = 2\angle ACE = 60^\circ,$

$\therefore \triangle ACM$ 是等边三角形，

$\therefore AM = AC = CM = 6,$

$\because AF = FC,$

$\therefore FM \perp AC,$

$\therefore \angle AFB = \angle AFM = 90^\circ,$

$\because AB = AM, \angle BAF = \angle MAF = 60^\circ, AF = AF,$

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle AMF (\text{SAS}),$

$$\therefore FM = BF = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore \triangle AEF \text{ 周长的最小值是 } AF + FE' + AE' = AF + FM = 3 + 3\sqrt{3}.$$

故答案为: $3 + 3\sqrt{3}$.

三、解答题 (本大题共 7 题, 第 19 题 6 分, 第 20 题 12 分, 21 题 7 分, 22 题 8 分, 23 题 8 分, 24 题 9 分, 25 题 8 分, 满分 58 分)

19. 计算: $\sqrt{(3-\pi)^2} + \pi^0 - |\sqrt{3}-1| + \frac{2}{\sqrt{3}+1}$

【答案】 $\pi - 2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了实数混合运算, 分母有理化, 熟练掌握运算法则, 是解题的关键. 根据算术平方根定义, 零指数幂运算法则, 绝对值意义, 二次根式混合运算法则, 进行计算即可.

【详解】 解: $\sqrt{(3-\pi)^2} + \pi^0 - |\sqrt{3}-1| + \frac{2}{\sqrt{3}+1}$

$$= \pi - 3 + 1 - \sqrt{3} + 1 + \frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$

$$= \pi - 3 + 1 - \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} - 1$$

$$= \pi - 2.$$

20. 解下列关于 x 的方程:

(1) $3x^2 - 1 = 4x$ (用配方法);

(2) $(x^2 + x)(x^2 + x - 3) - 3(x^2 + x) + 8 = 0$.

【答案】 (1) $x_1 = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}, x_2 = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3}$

(2) $x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}, x_4 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元二次方程, 熟练掌握解一元二次方程的一般方法, 是解题的关键.

(1) 用配方法解一元二次方程即可;

(2) 用换元法解方程即可.

【小问 1 详解】

解: $3x^2 - 1 = 4x$,

移项得: $3x^2 - 4x = 1$,

方程两边同除以 3 得: $x^2 - \frac{4}{3}x = \frac{1}{3}$,

配方得: $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{9}$,

即 $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}$,

开平方得: $x - \frac{2}{3} = \pm \frac{\sqrt{7}}{3}$,

解得: $x_1 = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}$, $x_1 = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3}$;

【小问 2 详解】

解: $(x^2 + x)(x^2 + x - 3) - 3(x^2 + x) + 8 = 0$,

设 $x^2 + x = y$, 则原方程可变为:

$y(y - 3) - 3y + 8 = 0$,

整理得: $y^2 - 6y + 8 = 0$,

解得: $y_1 = 2$, $y_2 = 4$,

当 $y = 2$ 时, $x^2 + x = 2$,

解得: $x_1 = -2$, $x_2 = 1$;

当 $y = 4$ 时, $x^2 + x = 4$,

解得: $x_3 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$, $x_4 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$;

$\therefore$ 原方程的解为: $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$, $x_4 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$.

21. 已知关于 x 的一元二次方程 $(a+c)x^2 + 2bx + (a-c) = 0$ ，其中 a, b, c 分别为 ABC 三边的长.

(1) 如果 $x = -1$ 是方程的根，试判断 ABC 的形状，并说明理由；

(2) 如果 ABC 是等边三角形，试求这个一元二次方程的根.

【答案】(1) 等腰三角形，理由见解析

(2) $x_1 = 0, x_2 = -1$

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的解、等腰三角形的判定、等边三角形的性质，解一元二次方程.

(1) 把 $x = -1$ 代入方程化简可得 $a = b$ ，即可得 ABC 是等腰三角形；

(2) 如果 ABC 是等边三角形，则 $a = b = c$ ，代入方程，只留一个字母 a ，可得 $2ax^2 + 2ax = 0$ ，即 $x^2 + x = 0$ ，解方程即可求解.

【小问 1 详解】

解： ABC 是等腰三角形；理由：

$\because x = -1$ 是方程的根，

$$\therefore (a+c) - 2b + (a-c) = 0,$$

$$\therefore a + c - 2b + a - c = 0,$$

$$\therefore 2a - 2b = 0,$$

$$\therefore a = b,$$

$\therefore ABC$ 是等腰三角形；

【小问 2 详解】

解： $\because ABC$ 是等边三角形时，

$$\therefore a = b = c,$$

$$\therefore (a+c)x^2 + 2bx + (a-c) = 0, \text{ 可整理为: } 2ax^2 + 2ax = 0,$$

$$\therefore x^2 + x = 0, \text{ 即 } x(x+1) = 0,$$

解得： $x_1 = 0, x_2 = -1$.

22. 如图是小华同学的数学日记，请仔细阅读，并完成相应的任务.

×年×月×日星期日

没有直角尺也能作出直角

今天，我在书店一本书上看到下面材料：木工师傅有一块如图 1 所示的四边形木板，他已经在木板上画出一条裁割线 AB ，现根据木板的情况，要过 AB 上的一点 C ，作出 AB 的垂线，用锯子进行裁割，然而手头没有直角尺，怎么办呢？

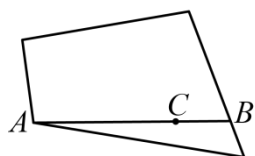


图1

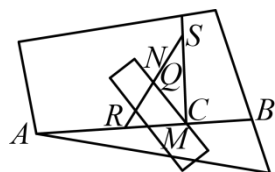


图2

解决方案：如图 2，可以取一根笔直的木棒，用铅笔在木棒上点出 M ， N 两点，然后把木棒斜放在木板上，使点 M 与点 C 重合，用铅笔在木板上将点 N 对应的位置标记为点 Q ，保持点 N 不动，将木棒绕点 N 旋转，使点 M 落在 AB 上，在木板上将点 M 对应的位置标记为点 R 。然后将 RQ 延长，在延长线上截取线段 $QS = MN$ ，得到点 S ，作直线 SC ，则 $\angle RCS = 90^\circ$ 。

我有如下思考：以上方案依据的是什么数学原理呢？我还有什么办法不用直角尺也能作出垂线呢？……

任务：

- (1) 根据上述操作过程，证明 $\angle RCS = 90^\circ$ ；
- (2) 用无刻度的直尺和圆规在 1 图的木板上，过点 C 作出 AB 的垂线（在木板上保留作图痕迹，不写作法），并说明你的作法所依据的数学定理或基本事实（写出一个即可）。

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析；作法所依据的数学定理或基本事实见解析（答案不唯一）

【解析】

【分析】 (1) 由作图的方法可以得出： $QR = QC$ ， $QS = QC$ ，得出 $\angle QCR = \angle QRC$ ， $\angle QCS = \angle QSC$ ，利用三角形内角和得出 $\angle QCR + \angle QCS = 90^\circ$ ，即 $\angle RCS = 90^\circ$ ，说明垂直即可；

(2) 以点 C 为圆心，任意长为半径画弧，与 AB 有两个交点，分别以这两个交点为圆心，以大于这两个交点之间的距离的一半为半径画弧，这两段弧交于一点 P ，连接 PC 即可；到一条线段两个端点距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上，即可说明垂直。

【小问 1 详解】

证明：由作图方法可知： $QR = QC$ ， $QS = QC$ ，

$\therefore \angle QCR = \angle QRC$ ， $\angle QCS = \angle QSC$ ，

$$\text{又} \because \angle SRC + \angle RCS + \angle RSC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle QCR + \angle QCS + \angle QRC + \angle QSC = 180^\circ,$$

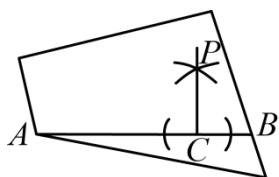
$$\therefore 2(\angle QCR + \angle QCS) = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle QCR + \angle QCS = 90^\circ,$$

$$\text{即} \angle RCS = 90^\circ,$$

【小问 2 详解】

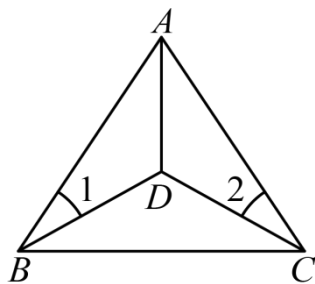
解：如图，直线 CP 即为所求；



等腰三角形顶角的平分线、底边上的高、底边上的中线重合（或等腰三角形“三线合一”）；到一条线段两个端点距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上等。（答案不唯一）

【点睛】本题主要考查了线段垂直平分线的判定，尺规作垂线，等腰三角形的性质，三角形内角和定理的应用，熟练掌握说明垂直的方法是解决本题的关键。

23. 已知：如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $BD = CD$ ， $\angle 1 = \angle 2$ 。求证： $AD \perp BC$ 。



【答案】见解析

【解析】

【分析】本题主要考查了等腰三角形的判定和性质，线段垂直平分线的判定，解题的关键是熟练掌握线段垂直平分线的判定定理。先根据等腰三角形的性质得出 $\angle DBC = \angle DCB$ ，根据 $\angle 1 = \angle 2$ ，证明 $\angle ABC = \angle ACB$ ，根据等腰三角形的判定得出 $BD = CD$ ，根据线段垂直平分线的判定得出 AD 垂直平分 BC ，即可得出答案。

【详解】证明： $\because BD = CD$ ，

$$\therefore \angle DBC = \angle DCB,$$

$$\because \angle 1 = \angle 2,$$

$$\therefore \angle DBC + \angle 1 = \angle DCB + \angle 2,$$

$$\text{即 } \angle ABC = \angle ACB,$$

$$\therefore AB = AC,$$

$\therefore$ 点 A 在线段 BC 的垂直平分线上,

$$\therefore BD = CD,$$

$\therefore$ 点 D 在线段 BC 的垂直平分线上,

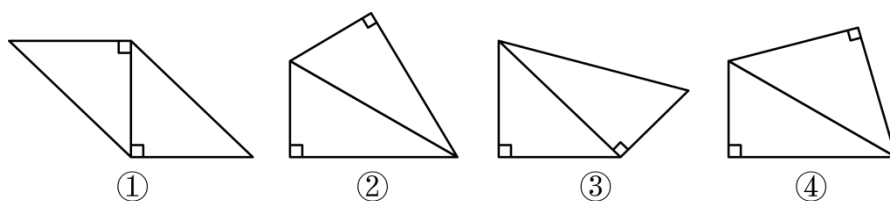
$\therefore AD$ 垂直平分 BC ,

$$\therefore AD \perp BC.$$

24. 在学习等腰三角形的过程中, 我们积累了一定的研究经验. 请运用已有经验, 对“邻等对补四边形”进行研究. 定义: 至少有一组邻边相等且对角互补的四边形叫做邻等对补四边形.

(1) 操作理解

小明用分别含有 30° 和 45° 角的直角三角形纸板拼出如图所示的 4 个四边形, 其中是邻等对补四边形的有 _____; (填序号)



(2) 性质探究

根据定义可得出邻等对补四边形的边、角的性质. 下面研究与对角线相关的性质.

如图 1, 四边形 $ABCD$ 是邻等对补四边形, $AB = AD$, AC 是它的一条对角线.

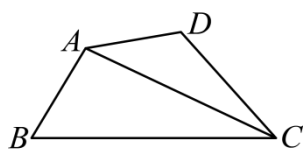


图1

求证: AC 平分 $\angle DCB$;

(3) 拓展应用

如图 2, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, $\angle C = 40^\circ$, 分别在边 BC 、 AC 上取点 M 、 N , 使四边形 $ABMN$ 是邻等对补四边形, 则 $\angle AMN$ 的大小为 _____ 度.

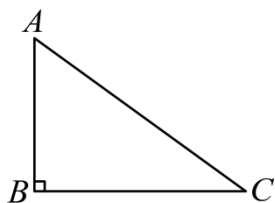


图2

【答案】(1) ② (2) 证明见解析

(3) 45° , 65° 或 85°

【解析】

【分析】本题考查了全等三角形判定与性质，等腰三角形的性质，解题的关键是熟练运用相关性质进行推理证明，利用分类讨论的思想求角的大小.

(1) 根据邻等对补四边形的定义，从对角是否互补，是否有一组邻边相等逐个验证，可得结果；

(2) 过点 A 作 $AE \perp BC$ 于 E ，作 $AF \perp CD$ ，交 CD 延长线于 F ，先后证明 $\triangle ABE \cong \triangle ADF$ ， $\triangle AEC \cong \triangle AFC$ ，可得 $\angle ACB = \angle ACD$ ，所以 AC 平分 $\angle DCB$ ；

(3) 先根据邻等对补四边形的对角互补，推出 $\angle ANM = 90^\circ$ ， $\angle BMN = 130^\circ$ ，再根据邻等对补四边形有一组邻边相等，分类讨论，求出每一种情况下 $\angle AMN$ 的度数，综合可得结果.

【小问 1 详解】

解：① $45^\circ + 45^\circ = 90^\circ \neq 180^\circ$ ，不满足对角互补，所以该四边形不是邻等对补四边形；

② $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ ， $60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$ ，满足对角互补，且有两组邻边相等，所以该四边形是邻等对补四边形；

③ $90^\circ + 60^\circ = 150^\circ \neq 180^\circ$ ，不满足对角互补，所以该四边形不是邻等对补四边形；

④ 该四边形没有相等的两条邻边，所以不是邻等对补四边形；

综上所述，是邻等对补四边形的有②.

【小问 2 详解】

证明：过点 A 作 $AE \perp BC$ 于 E ，作 $AF \perp CD$ ，交 CD 延长线于 F ，如图 1.1 所示：

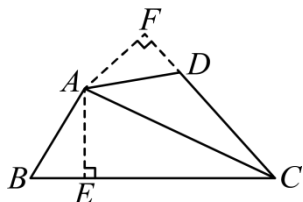


图1.1

则 $\angle AEB = \angle AEC = \angle AFC = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是邻等对补四边形，

$$\therefore \angle B + \angle ADC = 180^\circ,$$

$$\text{又 } \angle ADF + \angle ADC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle ADF,$$

又由题知 $AB = AD$,

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABE \cong \text{Rt}\triangle ADF \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AE = AF,$$

又 $AC = AC$,

$$\therefore \text{Rt}\triangle AEC \cong \text{Rt}\triangle AFC \text{ (HL)},$$

$$\therefore \angle ACB = \angle ACD,$$

$\therefore AC$ 平分 $\angle DCB$.

【小问3详解】

解: $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, $\angle C = 40^\circ$,

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ - \angle C = 50^\circ,$$

$\because$ 四边形 $ABMN$ 是邻等对补四边形,

$$\therefore \angle ANM + \angle ABC = 180^\circ, \quad \angle BAN + \angle BMN = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ANM = 90^\circ, \quad \angle BMN = 130^\circ.$$

根据邻等对补四边形至少有一组邻边相等, 可得

当 $AB = AN$ 时, 如图 2.1:

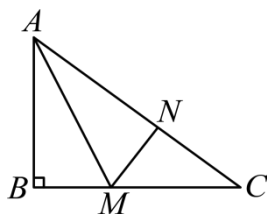


图2.1

结合 $AM = AM$, 可得 $\text{Rt}\triangle ABM \cong \text{Rt}\triangle ANM \text{ (HL)},$

$$\therefore \angle AMN = \angle AMB = \frac{1}{2} \angle BMN = 65^\circ.$$

当 $AB = BM$ 时, 如图 2.2:

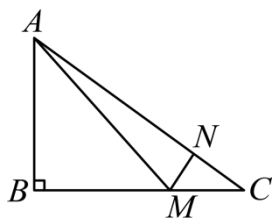


图2.2

$$\because AB = BM, \angle B = 90^\circ$$

$$\therefore \angle BMA = \angle BAM = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AMN = \angle BMN - \angle BMA = 130^\circ - 45^\circ = 85^\circ.$$

当 $AN = MN$ 时, 如图 2.3:

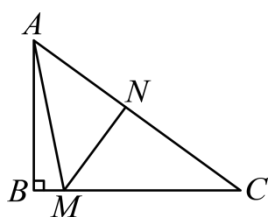


图2.3

$$\because AN = MN, \angle ANM = 90^\circ$$

$$\therefore \angle AMN = \angle MAN = 45^\circ.$$

当 $BM = MN$ 时, 如图 2.4:

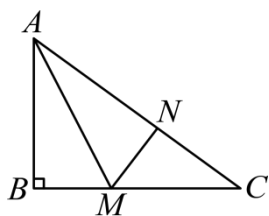


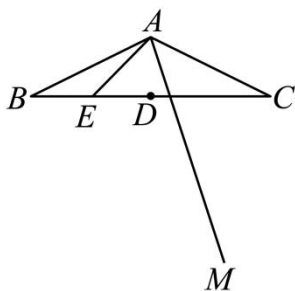
图2.4

结合 $AM = AM$, 可得 $\text{Rt}\triangle ABM \cong \text{Rt}\triangle ANM$ (HL),

$$\therefore \angle AMN = \angle AMB = \frac{1}{2} \angle BMN = 65^\circ.$$

综上所述, $\angle AMN$ 大小为 45° 或 65° 或 85° .

25. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAC = 2\alpha$ ($45^\circ < \alpha < 90^\circ$), D 是 BC 的中点, E 是 BD 的中点, 连接 AE . 将射线 AE 绕点 A 逆时针旋转 α 得到射线 AM , 过点 E 作 $EF \perp AE$ 交射线 AM 于点 F .



(1) ①依题意补全图形；

②求证： $\angle B = \angle AFE$ ；

(2) 连接 CF ， DF ，用等式表示线段 CF ， DF 之间的数量关系，并证明.

【答案】 (1) ①见解析； ②见解析

(2) $CF = DF$

【解析】

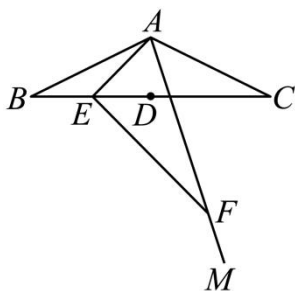
【分析】 (1) ①根据题意画出图形即可求解；

②连接 AD ，则 $AD \perp BC$ 于点 D ， AD 平分 $\angle BAC$ ，根据等腰三角形的性质以及三角形内角和定理得出 $\angle BAD = \alpha$ ， $\angle B = 90^\circ - \alpha$ ，根据 $\angle AEF = 90^\circ$ ，得出 $\angle AFE = 90^\circ - \alpha$ ，则 $\angle B = \angle AFE$ ；

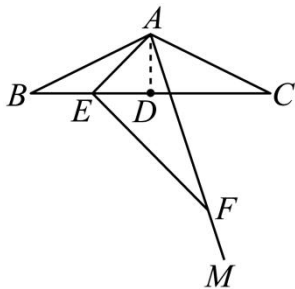
(2) 延长 FE 至点 H ，使得 $EH = EF$ ，连接 BH, AH ， CF ，倍长中线法证明 $\triangle HBE \cong \triangle FDE$ ，进而证明 $\triangle AHB \cong \triangle AFC$ ，即可得证.

【小问 1 详解】

解： ①如图所示，



②连接 AD ，



$\because AB = AC$ ， D 是 BC 的中点，

$\therefore AD \perp BC$ 于点 D ， AD 平分 $\angle BAC$ ，

$$\therefore \angle BAC = 2\alpha \quad (45^\circ < \alpha < 90^\circ)$$

$$\therefore \angle BAD = \alpha, \quad \angle B = 90^\circ - \alpha,$$

$$\therefore EF \perp AE,$$

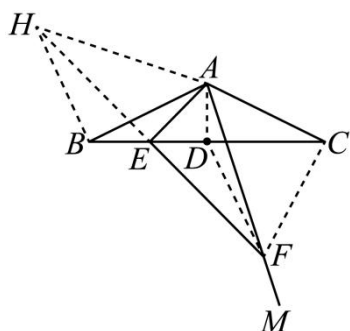
$$\therefore \angle AEF = 90^\circ, \quad \angle AFE = 90^\circ - \alpha,$$

$$\therefore \angle B = \angle AFE;$$

【小问2 详解】

$CF = DF$ ；证明如下，

延长 FE 至点 H ，使得 $EH = EF$ ，连接 BH, AH, CF ，



$\therefore E$ 为 BD 的中点， E 为 HF 的中点

$$\therefore EH = EF, EB = ED,$$

又 $\angle HEB = \angle FED$ ，

$$\therefore \triangle HBE \cong \triangle FDE \quad (\text{SAS}),$$

$$\therefore BH = FD,$$

$$\therefore AE \perp HF, \quad EH = EF,$$

$\therefore \triangle AHF$ 是等腰三角形，则 $AH = AF$ ， $\angle HAE = \angle FAE = \alpha$ ，

$$\therefore \angle BAC = \angle HAF = 2\alpha,$$

$$\therefore \angle HAF - \angle BAF = \angle BAC - \angle BAF,$$

即 $\angle BAH = \angle CAF$ ，

$$\therefore \triangle AHB \cong \triangle AFC \quad (\text{SAS}),$$

$$\therefore CF = BH,$$

$$\therefore CF = FD.$$

【点睛】 本题考查了等腰三角形的性质与判定，旋转的性质，全等三角形的性质与判定，熟练掌握全等三角形的性质与判定是解题的关键.

