

进才中学七年级期末数学试卷

一. 选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 下列各组式子中, 是同类项的是 ()

A. 0 与 -2025

B. $2a$ 与 $2b$

C. x^2y 与 $-xy^2$

D. $\frac{1}{2}m^3n$ 与 $-3m^3np$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了同类项、单项式, 根据同类项的定义: 所含字母相同, 并且相同字母的指数也相同, 进行每一项的判断.

【详解】解: A、0 与 -2025 是同类项, 所以符合题意;

B、 $2a$ 与 $2b$, 所含字母不同, 不是同类项, 所以不合题意;

C、 x^2y 与 $-xy^2$, 两个单项式的 x 、 y 的指数都不同, 所以不合题意;

D、 $\frac{1}{2}m^3n$ 与 $-3m^3np$, 第二个单项式有 p , 第一个单项式没有, 所以不合题意;

故选: A.

2. 下列各式: (1) $-xy$; (2) $\frac{3m-7n}{6}$; (3) $S = \pi r^2$; (4) $\frac{1}{x}$; (5) $a^2 - 2a + 5$; (6) $\frac{y-5}{\pi}$, 其中整式的个数有 ()

A. 3 个

B. 4 个

C. 5 个

D. 6 个

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了整式的概念. 要能准确的分清什么是整式. 整式是有理式的一部分, 在有理式中可以包含加, 减, 乘, 除四种运算, 但在整式中除式不能含有字母. 单项式和多项式统称为整式. 判断整式时, 式子中含有等号和分母中含有字母的式子一定不是整式.

根据整式的定义分析判断各个式子, 从而得到正确选项.

【详解】解: 在 (1) $-xy$; (2) $\frac{3m-7n}{6}$; (3) $S = \pi r^2$; (4) $\frac{1}{x}$; (5) $a^2 - 2a + 5$; (6) $\frac{y-5}{\pi}$ 中, 整式有: (1) $-xy$; (2) $\frac{3m-7n}{6}$; (5) $a^2 - 2a + 5$; (6) $\frac{y-5}{\pi}$, 共 4 个,

故选: B.

3. 把 $-9x^3 + 6x^2 - 3x$ 因式分解时, 提出公因式后, 另一个因式是 ()

A. $3x^2 - 2x$

B. $3x^2 - 2x - 1$

C. $-9x^2 + 6x$

D. $3x^2 - 2x + 1$

【答案】D

【解析】

【分析】此题主要考查了提公因式法分解因式，解题的关键是正确找出公因式．直接提取公因式 $-3x$ 即可分解．

【详解】解： $-9x^3 + 6x^2 - 3x = -3x(3x^2 - 2x + 1)$ ，

故选：D．

4. 下列说法中，正确的是（ ）

A. “丽丽把教室的门打开”属于平移现象

B. 能够互相重合的两个图形成轴对称

C. “小明在荡秋千”属于旋转现象

D. “钟表的钟摆在摆动”属于平移现象

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查平移、轴对称和旋转的定义，在实际当中的运用，把一个图形整体沿某一方向移动一定的距离，图形的这种移动，叫作平移；在平面内，一个图形绕着一个定点旋转一定的角度得到另一个图形的变化叫作旋转．

【详解】解：A、“丽丽把教室的门打开”属于旋转现象，故A选项错误，不符合题意；

B、能够互相重合的两个图形不一定成轴对称，故B选项错误，不符合题意；

C、“小明在荡秋千”属于旋转现象，故C选项正确，符合题意；

D、“钟表的钟摆在摆动”属于旋转现象，故D选项错误，不符合题意．

故选：B．

5. 下列说法中，正确的有（ ）

①式子： $3x(y-1)(y-2) = 3xy^2 - 9xy + 6x$ 从左到右的变形，属于因式分解；

②式子 $a^4 - \frac{1}{b^4} = \left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right)\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(a - \frac{1}{b}\right)$ 从左到右的变形，属于因式分解；

③分式的分子，分母同时除以 $2a^2 + 1$ 分式的值不变；

④分式 $\frac{2}{3y+5}$ 的值可能等于零．

A. 0个

B. 1个

C. 2个

D. 3个

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了因式分解的定义及分式的基本性质和分式值为零的条件，熟练掌握相关定义，性质是解题的关键，直接根据因式分解的定义，分式值为零的条件及分式的基本性质逐项判断即可得解.

【详解】根据将一个多项式化为几个整式积的形式过程为因式分解，左边为多项式，右边是整式积的形式可判断①不是因式分解；②不是整式积的形式，是分式积的形式，也不是因式分解；根据分式的基本性质，分式的分子和分母同时乘以或除以一个不为零的数或式，分式值不变，可知③正确；④不正确，分子不为零，分式值不可能为零.

因此正确的只有 1 个，

故选：B

6. 已知 BC 为等腰三角形纸片 ABC 的底边， $AD \perp BC$ ， $\angle BAC = 90^\circ$. 将此三角形纸片沿 AD 剪开，得到两个三角形. 若把这两个三角形拼成一个平面四边形，则能拼出中心对称图形的个数是 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了中心对称图形的定义及等腰三角形的性质，平行四边形的性质，熟练掌握中心对称图形的定义及平行四边形的性质是解题的关键. 先证剪得的两个小三角形全等，再进行拼接，得到相应的中心对称图形即可得解.

【详解】 $\because BC$ 是等腰三角形 ABC 的底边， $AD \perp BC$ ，

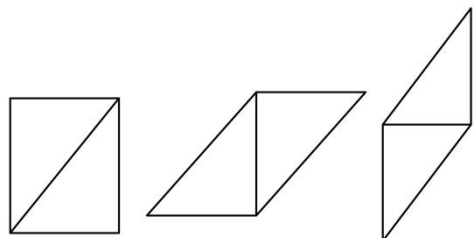
$\therefore BD = CD$ ， $\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，

$\therefore$ 剪得的两个小三角形全等.

$\therefore$ 这两个三角形可以组成的中心对称图形是平行四边形，

$\therefore$ 分别让它们的一组对应边重合，另外两组对应边分别平行，能拼出 3 个平行四边形，

如图所示：即满足题意的中心对称图形有 3 个.



故选：C

二. 填空题 (本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)

7. 计算： $(-a^2b)^3 \div 2a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-\frac{a^5b^3}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查的是整式的混合运算，解答本题的关键是熟练掌握积的乘方法则：先把各个因式分别乘方，再把所得的幂相乘．先根据积的乘方法则计算，再算单项式的除法即可得到结果．

【详解】 $(-a^2b)^3 \div 2a = -a^6b^3 \div 2a = -\frac{a^5b^3}{2}$

故答案为： $-\frac{a^5b^3}{2}$

8. 已知 $M = 2x^2 - 3x - 1$, $N = 6x^2 - 3x + 1$, 比较 M 与 N 的大小关系: M _____ N . (在横线上填写 “>” “<” 或 “=”)

【答案】 <

【解析】

【分析】 本题主要考查了整式的加减及作差法比较大小，熟练掌握整式加减的运算法则是解题的关键．利用作差法比较大小即可得解．

【详解】 $\because M = 2x^2 - 3x - 1, N = 6x^2 - 3x + 1$

$\therefore M - N = 2x^2 - 3x - 1 - (6x^2 - 3x + 1) = 2x^2 - 3x - 1 - 6x^2 + 3x - 1 = -4x^2 - 2 = -2(2x^2 + 1) < 0$

即 $M - N < 0$,

$\therefore M < N$

故答案为: <

9. 在括号里填上使等式成立的式子: $\frac{2x + \frac{1}{3}y}{\frac{5}{6}x - y} = \frac{(\quad)}{5x - 6y}$, 括号内的式子为_____.

【答案】 $12x + 2y$

【解析】

【分析】 本题考查了分式的基本性质，熟练掌握分式的基本性质是解题的关键．根据分式的基本性质，对分式的分子和分母同时乘以 6，即可得出结论．

【详解】解： $\frac{2x + \frac{1}{3}y}{\frac{5}{6}x - y} = \frac{6\left(2x + \frac{1}{3}y\right)}{6\left(\frac{5}{6}x - y\right)} = \frac{12x + 2y}{5x - 6y}.$

故答案为： $12x + 2y$.

10. 计算： $2024^2 - 2023 \times 2025 = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 1

【解析】

【分析】 本题考查的是平方差公式，将原式变形为 $2024^2 - (2024 - 1) \times (2024 + 1)$ ，然后再按平方差公式计算可得答案.

【详解】解： $2024^2 - 2023 \times 2025$
 $= 2024^2 - (2024 - 1) \times (2024 + 1)$
 $= 2024^2 - 2024^2 + 1$
 $= 1.$

故答案为： 1.

11. 因式分解： $-20x^4y^3 + 28x^2y^4z = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $4x^2y^3(7yz - 5x^2)$

【解析】

【分析】 本题考查了提公因式法分解因式：系数，取各项系数的最大公因数，字母，取各项都含有的相同字母，并且相同字母的指数取次数最低的. 准确的找出公因式是解题的关键. 确定公因式 $4x^2y^3$ 即可即可求解.

【详解】 $-20x^4y^3 + 28x^2y^4z = 4x^2y^3(7yz - 5x^2)$
 故答案为： $4x^2y^3(7yz - 5x^2)$

12. 已知一个矩形的面积为 $12ab^3 - 27ab$ ，若一边长为 $3a$ ，则另一边长为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $4b^3 - 9b$

【解析】

【分析】 此题主要考查了整式的除法运算，正确掌握相关运算法则是解题关键. 直接利用整式的除法运算

法则计算得出答案.

【详解】解: $\because$ 长方形的面积为 $12ab^3 - 27ab$, 一边长为 $3a$,

$\therefore$ 另一边长为: $(12ab^3 - 27ab) \div 3a = 4b^3 - 9b$.

故答案为: $4b^3 - 9b$.

13. 已知 $x^2 - y^2 = 15$, $x - y = 5$. 则 $2x + y =$ _____.

【答案】7

【解析】

【分析】本题考查了平方差公式、解二元一次方程组, 利用平方差公式因式分解是解题的关键. 由 $x^2 - y^2 = 15$ 变形得 $(x + y)(x - y) = 15$, 结合 $x - y = 5$ 可得 $x + y = 3$, 再利用二元一次方程组解得 x 、 y 的值, 即可解答.

【详解】解: $\because x^2 - y^2 = 15$,

$\therefore (x + y)(x - y) = 15$,

又 $\because x - y = 5$,

$\therefore x + y = 15 \div 5 = 3$,

$\therefore \begin{cases} x - y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$,

解得: $\begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases}$,

$\therefore 2x + y = 2 \times 4 - 1 = 7$.

故答案为: 7.

14. 在体育课上, 当老师下达口令“向右转”时, 右脚正确的动作应是以_____ (填“脚跟”或“脚尖”) 为旋转中心, 沿着_____ (填“顺”或“逆”) 时针方向旋转_____度.

【答案】 ①. 脚跟 ②. 顺 ③. 90

【解析】

【分析】本题考查了旋转的相关概念, 掌握旋转的相关概念, 结合生活经验解决问题是解题的关键. 根据旋转的相关概念, 结合生活经验即可解答.

【详解】解: 在体育课上, 当老师下达口令“向右转”时, 右脚正确的动作应是以脚跟为旋转中心, 沿着

顺时针方向旋转 90 度.

故答案为: 脚跟; 顺; 90.

15. 对于代数式 m 和 n , 定义运算 “ $\otimes$ ”: $m \otimes n = \frac{3m-n+4}{mn}$, 例如: $4 \otimes 2 = \frac{3 \times 4 - 2 + 4}{4 \times 2} = \frac{7}{4}$, 若

$(x+1) \otimes (x-2) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$, 则 $2A-B =$ _____.

【答案】 -9

【解析】

【分析】 本题考查了新定义运算, 分式的加减运算, 正确理解新定义运算的方法是解题的关键. 根据新定义运算, 求得 $(x+1) \otimes (x-2) = \frac{2x+9}{(x+1)(x-2)}$, 再计算得 $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{(A+B)x-2A+B}{(x+1)(x-2)}$, 即得方程组

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 2A-B=-9 \end{cases}, \text{ 即得答案.}$$

【详解】 $\because (x+1) \otimes (x-2) = \frac{3(x+1)-(x-2)+4}{(x+1)(x-2)} = \frac{2x+9}{(x+1)(x-2)},$

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{(A+B)x-2A+B}{(x+1)(x-2)},$$

$$\therefore \begin{cases} A+B=2 \\ 2A-B=-9 \end{cases},$$

$$\therefore 2A-B=-9.$$

故答案为: -9.

16. 现有若干张边长为 a 的正方形 A 型纸片, 边长为 b 的正方形 B 型纸片, 长、宽为 a 、 b 的长方形 C 型纸片, 丽丽同学选取了 5 张 A 型纸片, 10 张 B 型纸片, 27 张 C 型纸片拼成了一个长方形, 则此长方形的周长为 _____ (用含 a 、 b 的代数式表示)

【答案】 $12a+14b$ ## $14b+12a$

【解析】

【分析】 本题考查了整式的混合运算及因式分解, 解题的关键是掌握正方形, 长方形的面积公式及因式分解. 根据题意表示出长方形的面积, 利用因式分解转化为多项式与多项式的积, 即可确定长方形的长和宽, 继而得到长方形的周长.

【详解】 根据题意, 长方形的面积为 $5a^2+10b^2+27ab=(a+5b)(5a+2b)$

$\therefore$ 边长为 $a+5b$ 和 $5a+2b$,

$\therefore$ 周长为 $(a+5b+5a+2b) \times 2 = 12a+14b$;

故答案为: $12a+14b$

17. 如果关于 x 的方程 $\frac{x-1}{x-2} + \frac{2-x}{x+1} = \frac{2x+a}{x^2-x-2}$ 的解为负数, 那么 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a < -5$ 且 $a \neq -7$

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程. 熟练掌握解分式方程方法步骤, 根据解的取值范围, 确定字母系数的取值范围, 是解决问题的关键.

去分母解所得整式方程, 根据方程的解为负数与分母不为 0, 解不等式, 即得.

【详解】 两边都乘以最简公分母 $(x+1)(x-2)$,

得 $(x+1)(x-1) + (2-x)(x-2) = 2x+a$,

解得 $x = \frac{a+5}{2}$,

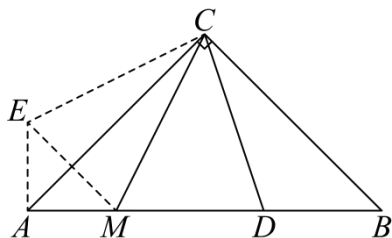
$\therefore$ 方程的解为负数,

$\therefore \frac{a+5}{2} < 0$ 且 $\frac{a+5}{2} \neq -1$, $\frac{a+5}{2} \neq 2$,

解得 $a < -5$ 且 $a \neq -7$.

故答案为: $a < -5$ 且 $a \neq -7$.

18. 如图, 已知在等腰直角 ABC 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, 点 D 在线段 AB 上, $\triangle CBD$ 绕着点 C 顺时针方向旋转 90° 后得到 $\triangle CAE$, 点 B 和点 D 的对应点分别是点 A 和点 E . 点 M 在线段 AB 上, 且 $\triangle CEM$ 与 $\triangle CDM$ 恰好关于直线 CM 成轴对称, 如果 $AM:MD:DB = 3:5:4$, ABC 的面积为 36, 那么 $\triangle AME$ 的面积为_____.



【答案】 6

【解析】

【分析】 此题考查了旋转的性质、轴对称的性质、勾股定理等知识. 证明

$\angle CBD = \angle CAE$, $BD = AE$, $MD = ME$, 得到 $\angle EAM = 90^\circ$, 则 $AM^2 + AE^2 = EM^2$, 设 $AM = 3k$, 则 $MD = 5k$, $DB = 4k$, 得到 $ME = 5k$, $AE = 4k$, 在直角三角形 ABC 中, 根据勾股定理得到 $AC = BC = 6\sqrt{2}k$, 由 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = 36$ 得到 $k = 1$, 即可求出答案.

【详解】解: 由题意知 $\angle CBD \cong \angle CAE$, $MD \cong ME$,

$$\therefore \angle CBD = \angle CAE, BD = AE, MD = ME,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ, CA = CB,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle CBD = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle CBD = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle EAM = 90^\circ,$$

$$\therefore AM^2 + AE^2 = EM^2,$$

设 $AM = 3k$, 则 $MD = 5k$, $DB = 4k$,

$$\therefore ME = 5k, AE = 4k,$$

在直角三角形 ABC 中, 根据勾股定理 $AB^2 = AC^2 + CB^2$, 得 $2AC^2 = (12k)^2$,

$$\therefore AC = BC = 6\sqrt{2}k,$$

$$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = 36,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2}k \cdot 6\sqrt{2}k = 36$$

$$\therefore k = 1, \text{ (负值舍去)}$$

$$\therefore S_{\triangle AME} = \frac{1}{2} \times 3k \cdot 4k = 6$$

故答案为: 6

三. 简答题 (本大题共 4 题, 满分 12 分)

19. 计算: $6a^2b - (2ab^2 - ab) + 2(ab^2 - 3a^2b)$.

【答案】 ab

【解析】

【分析】 本题考查了去括号、合并同类项, 熟练掌握去括号、合并同类项的运算法则是解题的关键. 根据去括号、合并同类项的运算法则计算即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: } & 6a^2b - (2ab^2 - ab) + 2(ab^2 - 3a^2b) \\ &= 6a^2b - 2ab^2 + ab + 2ab^2 - 6a^2b \end{aligned}$$

$$= ab.$$

20. 计算: $\left[(-2x^2y)^3 \cdot y^2 + x^2y \cdot (6x^2y^3)^2 \right] \div 4x^6y^3.$

【答案】 $-2y^2 + 9y^4$

【解析】

【分析】 本题主要考查了整式的混合运算，根据积的乘方和同底数幂的乘除法可以解答本题.

【详解】 解: $\left[(-2x^2y)^3 \cdot y^2 + x^2y \cdot (6x^2y^3)^2 \right] \div 4x^6y^3$
 $= (-8x^6y^5 + 36x^6y^7) \div 4x^6y^3$
 $= -2y^2 + 9y^4.$

21. 因式分解: $ab^2 - ab + b^2c - bc$

【答案】 $b(b-1)(a+c)$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解，利用了提公因式法因式分解，首先进行分组，再利用提公因式法分解因式，可得答案

【详解】 $ab^2 - ab + b^2c - bc$
 $= (ab^2 - ab) + (b^2c - bc)$
 $= ab(b-1) + bc(b-1)$
 $= b(b-1)(a+c)$

22. 因式分解: $9x^2 - 3(2xy + 3) + y^2.$

【答案】 $(3x - y - 3)(3x - y + 3)$

【解析】

【分析】 本题主要考查因式分解，熟练掌握完全平方公式和平方差公式分解因式是解题的关键. 先展开并用完全平方公式和平方差公式因式分解即可求解.

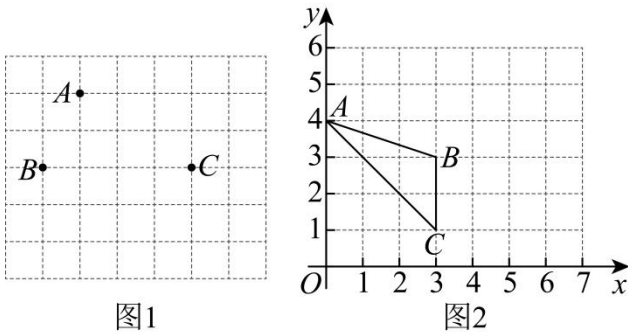
【详解】 $9x^2 - 3(2xy + 3) + y^2$
 $= 9x^2 - 6xy - 3^2 + y^2$
 $= 9x^2 - 6xy + y^2 - 3^2$

$$= (3x - y)^2 - 3^2$$

$$= (3x - y - 3)(3x - y + 3)$$

四. 解答题 (本大题共 5 题, 满分 66 分)

23. 按要求作图:



(1) 在图 1 中确定格点 D , 并画出以 A 、 B 、 C 、 D 为顶点的四边形, 使其为轴对称图形, 并且画出该轴对称图形的一条对称轴; (画出符合题意的一种情况即可)

(2) 已知 ABC 在平面直角坐标系中的位置如图 2 所示, 画出 ABC 绕点 C 按顺时针方向旋转 90° 后的 $\triangle A_1B_1C$.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

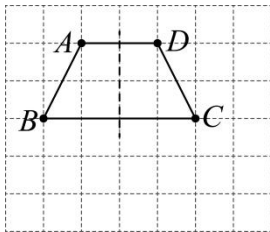
【分析】 此题主要考查了轴对称的概念以及图形的旋转变换与画图的综合能力,

(1) 可画出一个等腰梯形或 A 点关于 BC 的对称点, 则是轴对称图形;

(2) 根据旋转中心是点 C , 旋转角 90° , 旋转方向顺时针方向, 在网格中找出对应点得出图形即可.

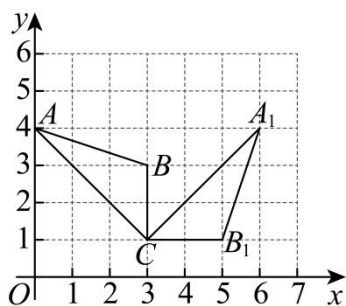
【小问 1 详解】

解: 如图所示, 四边形 $ABCD$ 即为所求;



【小问 2 详解】

解: 如图所示, $\triangle A_1B_1C$ 即为所求.



24. 先化简代数式 $\frac{x^2+5x-6}{x^2+x-2} \div \frac{x^2-3x}{x^2-x-6}$, 然后在 -2 、 0 、 1 、 2 、 3 中选取一个使原式有意义的 x 的值代入求值.

【答案】 $\frac{x+6}{x}$; 4

【解析】

【分析】 本题考查了分式的化简与求值, 熟练掌握分式的运算法则是解题的关键. 先根据分式的混合运算法则化简, 再根据分式有意义的条件确定出符合题意的 x 的值, 最后代入求值即可.

【详解】 解: $\frac{x^2+5x-6}{x^2+x-2} \div \frac{x^2-3x}{x^2-x-6}$

$$= \frac{(x+6)(x-1)}{(x+2)(x-1)} \div \frac{x(x-3)}{(x-3)(x+2)}$$

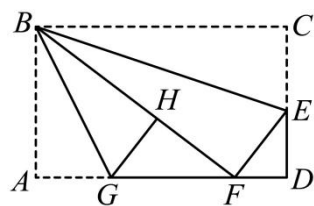
$$= \frac{x+6}{x+2} \cdot \frac{x+2}{x}$$

$$= \frac{x+6}{x},$$

由题意得, $x \neq -2, 0, 1, 3$,

$\therefore$ 代入 $x=2$, 原式 $= \frac{2+6}{2} = 4$.

25. 如图所示, 在长方形纸片 $ABCD$ 中, $AB=12$, $AD=20$, 点 E 在边 CD 上, 将 $\triangle BCE$ 沿 BE 折叠, 点 C 恰巧落在边 AD 上的点 F 处, 点 G 在 AF 上, 将 $\triangle ABG$ 沿 BG 折叠, 点 A 恰好落在线段 BF 上的点 H 处.



(1) 求 $\angle EBG$ 的度数;

(2) 求 $\frac{BH}{HF}$ 的值.

【答案】 (1) 45°

(2) $\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了折叠的性质，熟练掌握折叠的性质是解题关键.

(1) 根据折叠的性质可得 $\angle ABG = \angle HBG$, $\angle CBE = \angle FBE$, 则 $\angle ABG + \angle CBE = \angle HBG + \angle FBE = \frac{1}{2} \angle ABC = 45^\circ$, 由此即可得;

(2) 根据折叠的性质可得 $BH = AB = 12$, $BF = BC = 20$, 再根据线段的和差可得 $HF = 8$, 由此即可得.

【小问 1 详解】

解: 由折叠的性质得: $\angle ABG = \angle HBG$, $\angle CBE = \angle FBE$,

$\therefore$ 在长方形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore \angle ABG + \angle CBE = \angle HBG + \angle FBE = \frac{1}{2} \angle ABC = 45^\circ$,

$\therefore \angle EBG = \angle HBG + \angle FBE = 45^\circ$.

【小问 2 详解】

解: $\because$ 在长方形纸片 $ABCD$ 中, $AB = 12$, $BC = AD = 20$,

$\therefore$ 由折叠的性质得: $BH = AB = 12$, $BF = BC = 20$,

$\therefore HF = BF - BH = 8$,

$\therefore \frac{BH}{HF} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$.

26. 图 1 是一个长为 $2m$, 宽为 $2n$ 的长方形, 沿图中虚线用剪刀均分成四块小长方形, 然后按图 2 的形状拼成正方形 $ABCD$.

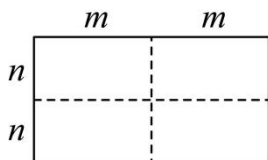


图1

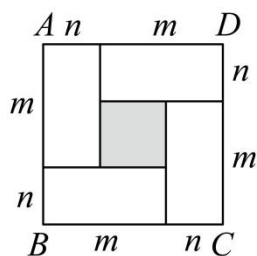


图2

(1) 观察图 2 填空: 正方形 $ABCD$ 的边长为_____, 阴影部分的小正方形的边长为_____;

(2) 观察图 2, 试猜想式子 $(m+n)^2$, $(m-n)^2$, mn 之间的等量关系;

(3) 根据 (2) 中的等量关系, 解决如下问题: 设 $x = a - 2024$, $y = a - 2025$, 若 $xy = 6$, 求 $x + y$ 的值.

【答案】(1) $m + n$, $m - n$

$$(2) (m + n)^2 = (m - n)^2 + 4mn$$

$$(3) x + y = \pm 5$$

【解析】

【分析】本题主要考查了完全平方公式的几何背景, 熟练掌握完全平方公式的几何背景进行求解是解决本题的关键.

(1) 根据图形, 正方形 $ABCD$ 的边长为等于小长方形两边的和, 阴影部分的正方形的边长等于小长方形两边的差;

(2) 正方形 $ABCD$ 可以直接用边长的平方求解, 也可用阴影正方形的面积加上四个小长方形的面积, 由此解答即可;

(3) 先求得 $x - y$, 再利用 (2) 中的结论求出 $(x + y)^2$ 的值, 然后求解即可.

【小问 1 详解】

由图可知

正方形的边长为 $m + n$, 阴影部分的正方形的边长为 $m - n$;

故答案为: $m + n$, $m - n$;

【小问 2 详解】

$$(m + n)^2 = (m - n)^2 + 4mn, \text{ 理由如下:}$$

由图可知:

正方形 $ABCD$ 的面积为 $(m + n)^2$, 也等于 4 个长为 m , 宽为 n 的长方形与边长为 $m - n$ 的阴影部分正方形面积的和, 即为 $(m - n)^2 + 4mn$,

$$\text{故得到 } (m + n)^2 = (m - n)^2 + 4mn$$

【小问 3 详解】

$$\because x = a - 2024, y = a - 2025$$

$$\therefore x - y = a - 2024 - (a - 2025) = 1,$$

$$\text{又 } xy = 6$$

由 (2) 得: $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy = 1^2 + 4 \times 6 = 25$

$\therefore x+y = \pm 5$

27. 如果两个分式 P 与 Q 的差为常数 k , 且 k 是整数. 则称 P 是 Q 的“差整分式”, 常数 k 称为“差整值”. 例

如: 分式 $P = \frac{x}{x-1}$, $Q = \frac{1}{x-1}$, 所以 $P-Q = \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1$, 则 P 是 Q 的“差整分式”, “差整值” $k=1$.

(1) 已知分式 $A = \frac{4x-5}{x-2}$, $B = \frac{x+1}{x-2}$, 判断 A 是不是 B 的“差整分式”; 若不是, 请说明理由; 若是, 请求出“差整值”;

(2) 已知分式 $C = \frac{2}{x+3}$, $D = \frac{M}{x^2-9}$, C 是 D 的“差整分式”, 且“差整值” $k=1$. 若 x 为整数, 则分式 D 的值为正整数 a .

①求 M 所代表的代数式;

②求 x 的值;

(3) 在 (2) 的条件下, 已知分式 $E = \frac{y-m}{y-1}$, $F = \frac{3}{y}$, 若关于 y 的方程 $E+F=a$ 无解, 求实数 m 的值.

【答案】 (1) A 是 B 的“差整分式”, “差整值”为 3

(2) ① $M = -x^2 + 2x + 3$; ② $x = -2$

(3) 1 或 4

【解析】

【分析】 本题考查了新定义运算、分式的加减、分式方程的无解问题, 熟练掌握以上知识点, 根据新定义运算法则按要求计算是解题的关键.

(1) 先计算 $A-B$, 根据计算结果即可解答;

(2) ①由题意得, $C-D=1$, 代入式子再化简即可得出 M 所代表的代数式; ②由 $D = -\frac{x+1}{x+3} = -1 + \frac{2}{x+3}$, 结合分式 D 的值为正整数, 且 x 为整数, 得出 $x+3=1$, 即可解答;

(3) 由题意得, $a=D=1$, 可得 $\frac{y-m}{y-1} + \frac{3}{y} = 1$, 整理得 $(4-m)y=3$, 由方程无解, 可得 $4-m=0$ 或者方程有增根, 再分别求解即可.

【小问 1 详解】

解: $A-B = \frac{4x-5}{x-2} - \frac{x+1}{x-2} = \frac{4x-5-(x+1)}{x-2} = \frac{3x-6}{x-2} = 3$,

$\therefore A$ 是 B 的“差整分式”，“差整值”为 3.

【小问 2 详解】

解：① $\because C$ 是 D 的“差整分式”，且“差整值” $k=1$

$$\therefore C-D = \frac{2}{x+3} - \frac{M}{x^2-9} = \frac{2(x-3)-M}{x^2-9} = \frac{2x-6-M}{x^2-9} = 1,$$

$$\therefore 2x-6-M = x^2-9,$$

解得： $M = -x^2 + 2x + 3$;

$$\textcircled{2} D = \frac{-x^2 + 2x + 3}{x^2 - 9} = \frac{-(x+1)(x-3)}{(x+3)(x-3)} = -\frac{x+1}{x+3} = -1 + \frac{2}{x+3},$$

$\because$ 分式 D 的值为正整数，且 x 为整数

$$\therefore x+3=1,$$

$$\therefore x=-2.$$

【小问 3 详解】

解：由 (2) 得， $a = D = -1 + \frac{2}{x+3} = -1 + \frac{2}{-2+3} = 1$,

$$\therefore E + F = \frac{y-m}{y-1} + \frac{3}{y} = 1,$$

$$\therefore y(y-m) + 3(y-1) = y(y-1),$$

整理得： $(4-m)y = 3$,

当 $m=4$ 时，整式方程无解，符合题意；

$$\text{当 } m \neq 4 \text{ 时， } y = \frac{3}{4-m},$$

$\because$ 方程 $E + F = a$ 无解，

$$\therefore \frac{3}{4-m} = 0 \text{ (无解，舍去) 或 } \frac{3}{4-m} = 1,$$

解得： $m=1$,

$\therefore$ 综上所述，实数 m 的值为 1 或 4.