

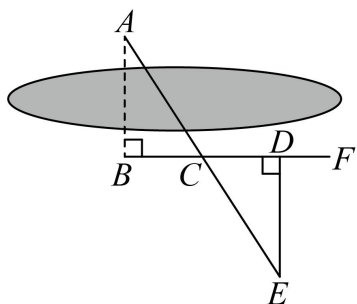
2024 学年第二学期初一年级数学期末考试

时间：90 分钟 满分：100 分

(本次考试不得使用计算器，请将正确答案填写在答题纸上，写在试卷上无效)

一、选择题 (每题 3 分，共 12 分)

1. 如图，要测量河两岸相对的两点 A 、 B 的距离，先在 AB 的垂线 BF 上取两点 C 、 D ，使 $BC = CD$ ，再作出 BF 的垂线 DE ，使点 A 、 C 、 E 在同一条直线上 (如图)，可以说明 $\triangle ABC \cong \triangle EDC$ ，得 $AB = DE$ ，因此测得 DE 的长就是 AB 的长，判定 $\triangle ABC \cong \triangle EDC$ ，最恰当的理由是 ()



- A. AAS B. SAS C. SSS D. ASA

【答案】D

【解析】

【分析】此题主要考查全等三角形的判定，解题的关键是熟知全等三角形的判定方法，根据 ASA 即可判定 $\triangle ABC \cong \triangle EDC$ ，故可求解.

【详解】解：∵ 点 A 、 C 、 E 在同一条直线上，

$$\therefore \angle ACB = \angle ECD,$$

又由题意得： $\angle ABC = \angle EDC = 90^\circ$ ， $BC = CD$ ，

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle EDC (\text{ASA}),$$

故选：D.

2. 直角坐标平面内，若点 M 绕原点逆时针旋转 90° 到点 $P(x, y)$. 点 M 绕原点顺时针旋转 90° 到点 Q ，则点 Q 坐标为 ()

- A. $(-y, -x)$ B. $(-x, y)$ C. $(-y, x)$ D. $(-x, -y)$

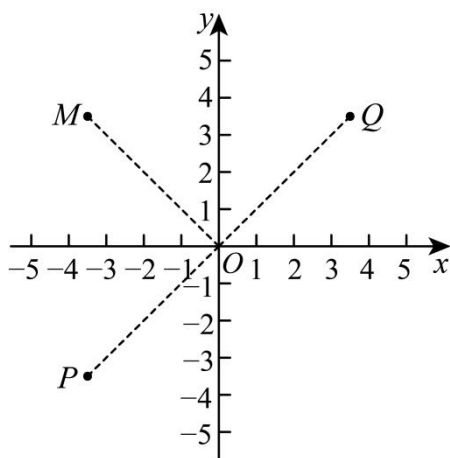
【答案】D

【解析】

【分析】本题考查的是绕原点旋转 90° 或 180° 后点的坐标特点，由点 M 绕原点逆时针旋转 90° 到点 $P(x, y)$ ，

点 M 绕原点顺时针旋转 90° 到点 Q , 可得 P, Q 关于原点对称, 从而可得答案.

【详解】解: 如图,



$\therefore$ 点 M 绕原点逆时针旋转 90° 到点 $P(x, y)$, 点 M 绕原点顺时针旋转 90° 到点 Q ,

$\therefore P, Q$ 关于原点对称,

$\therefore$ 点 Q 坐标为 $(-x, -y)$.

故选: D

3. 下列说法正确的是 ()

- ①两边及第三边上的中线对应相等的两个三角形全等;
- ②两边及其中一边上的高对应相等的两个三角形全等;
- ③两边及其第三边上的高对应相等的两个三角形全等;
- ④两边及其中一边上的中线对应相等的两个三角形全等.

A. ①④

B. ①②④

C. ①③④

D. ①②③④

【答案】A

【解析】

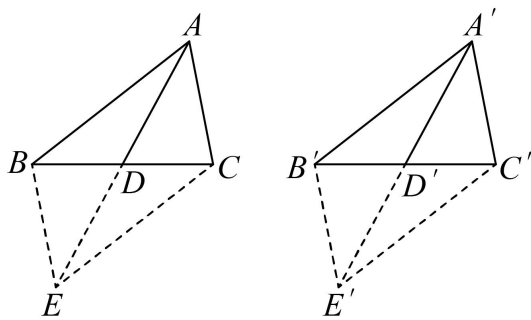
【分析】本题考查的是三角形全等的判定, 掌握全等三角形的判定方法是解题的关键. 利用全等三角形的判定方法, 将各选项逐一证明判定即可.

【详解】解: ①两边及第三边上的中线对应相等的两个三角形全等是真命题, 符合题意,

如图, 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中, $AB = A'B', AC = A'C'$, 且 $AD, A'D'$ 是中线, 且 $AD = A'D'$, 则

$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, 理由如下:

延长 $AD, A'D'$, 使得 $DE = AD, D'E' = A'D'$, 连接 $BE, CE, B'E', C'E'$, 则 $AE = A'E'$,



$\because DE = AD, \angle BDE = \angle ADC, BD = CD,$

$\therefore \triangle BDE \cong \triangle CDA,$

$\therefore BE = AC,$

同理可证 $B'E' = A'C',$

$\therefore BE = B'E',$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle A'B'E'$ 中,

$\because AB = A'B', BE = B'E', AE = A'E',$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle A'B'E',$

$\therefore \angle BAD = \angle B'A'D',$

同理 $\angle CAD = \angle C'A'D',$

$\therefore \angle BAC = \angle B'A'C',$

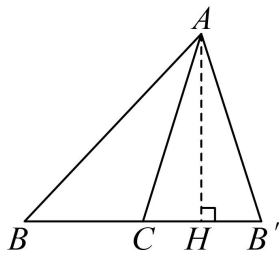
又 $\because AB = A'B', AC = A'C',$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C';$

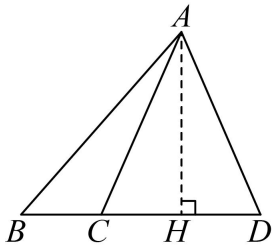
②两边及其中一边上的高对应相等的两个三角形全等，是假命题，故不符合题意；

反例：如下图，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C$ 中， $AC = AC, BC = B'C$ ，高 $AH = AH$ ，

但 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C$ 不一定全等；



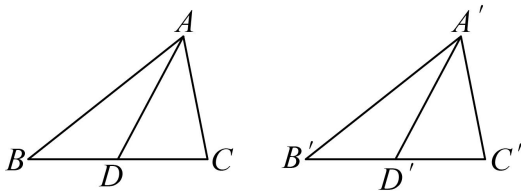
③两边和第三边上的高对应相等，不能判断两个三角形全等，理由如图：



在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 中, $AB = AB, AC = AD$, 第三边上的高都是 AH , 两个三角形不全等, 是假命题, 故不符合题意;

④两边及其中一边上的中线对应相等的两个三角形全等, 是真命题, 故本选项符合题意;

如图, 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中, $AB = A'B', BC = B'C'$, 且 $AD, A'D'$ 是中线, 且 $AD = A'D'$, 则 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, 理由如下:



$\because AD, A'D'$ 是中线,

$$\therefore BD = \frac{1}{2}BC, B'D' = \frac{1}{2}B'C',$$

$$\therefore BD = B'D',$$

$$\because AB = A'B', AD = A'D',$$

$$\therefore \triangle BDA \cong \triangle B'D'A',$$

$$\therefore \angle B = \angle B',$$

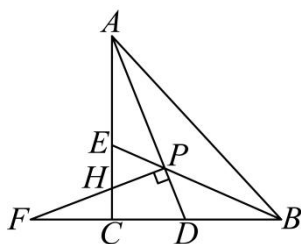
$$\because AB = A'B', BC = B'C',$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C',$$

则说法正确的是①④,

故选: A.

4. 如图, 在 $\triangle ACB$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\triangle ABC$ 的角平分线 AD, BE 相交于点 P , 过 P 作 $PF \perp AD$ 交 BC 的延长线于点 F , 交 AC 于点 H .



则对于以下结论：① $\angle APB = 135^\circ$ ；② $\triangle ABP \cong \triangle FBP$ ；③ $\angle AHP = \angle ABC$ ；④ $AH + BD = AB$ ；其中错误的是（ ）

A. ①

B. ②

C. ③

D. ④

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了三角形全等的判定方法，三角形内角和定理．掌握相关性质是解题的关键．根据三角形内角和定理以及角平分线定义判断①；根据全等三角形的判定和性质判断②④；根据

$\angle AHP + \angle PAH = \angle ABC + \angle BAC = 90^\circ$ 和 $\angle PAH = \angle BAC$ 判断③即可．

【详解】解：在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle BAC + \angle ABC = 90^\circ,$$

又 $\because AD$ 、 BE 分别平分 $\angle BAC$ 、 $\angle ABC$ ，

$$\therefore \angle BAD = \frac{1}{2} \angle BAC, \angle ABE = \frac{1}{2} \angle ABC,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle ABE = \frac{1}{2} (\angle BAC + \angle ABC) = 45^\circ,$$

$\therefore \angle APB = 135^\circ$ ，故①正确；

$$\therefore \angle BPD = 45^\circ,$$

又 $\because PF \perp AD$ ，

$$\therefore \angle FPB = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle APB = \angle FPB,$$

又 $\because \angle ABP = \angle FBP$ ，

在 $\triangle ABP$ 和 $\triangle FBP$ 中，

$$\begin{cases} \angle ABP = \angle FBP \\ BP = BP \\ \angle APB = \angle FPB \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABP \cong \triangle FBP$ (ASA)，故②正确；

$$\therefore \angle BAP = \angle BFP, AB = FB, PA = PF,$$

$$\therefore \angle BAP = \angle CAP,$$

$$\therefore \angle PAH = \angle PFB,$$

在 $\triangle APH$ 和 $\triangle FPD$ 中,

$$\begin{cases} \angle APH = \angle FPD \\ \angle PAH = \angle PFB, \\ PA = PF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle APH \cong \triangle FPD (\text{AAS}),$$

$$\therefore AH = FD,$$

$$\text{又} \because AB = FB,$$

$$\therefore AB = FD + BD = AH + BD; \text{ 故④正确;}$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ, PF \perp AD,$$

$$\angle DACB = \angle DAPH = 90^\circ,$$

$$\angle DHP + \angle DPAH = \angle DAB + \angle DBAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PAH \neq \angle BAC,$$

$$\therefore \angle AHP \neq \angle ABC, \text{ 故③错误;}$$

故选: C.

二、填空题 (第 5 到 14 题每题 2 分, 第 15 到 20 题每题 3 分)

5. 化简: $\frac{1}{\sqrt{6}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{\sqrt{6}}{6}$

【解析】

【分析】 本题考查的是分母有理化, 根据二次根式的性质求解即可.

【详解】 解: $\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1 \times \sqrt{6}}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$

故答案为: $\frac{\sqrt{6}}{6}.$

6. 与 $A(-2, -\sqrt{3})$ 关于 x 轴对称的点的坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $(-2, \sqrt{3})$

【解析】

【分析】 本题主要考查了坐标与图形变化—轴对称，熟知关于 x 轴对称的点横坐标相同，纵坐标互为相反数是解题的关键。根据关于 x 轴对称的点横坐标相同，纵坐标互为相反数进行求解即可。

【详解】 解：由题意得，在平面直角坐标系中，点 $A(-2, -\sqrt{3})$ 关于 x 轴的对称点的坐标为 $(-2, \sqrt{3})$ ，
故答案为： $(-2, \sqrt{3})$ 。

7. 等腰三角形的周长为 30，则腰长 x 的取值范围是_____。

【答案】 $7.5 < x < 15$

【解析】

【分析】 本题考查等腰三角形性质，一元一次不等式组，三角形三边关系的应用等。根据题意用含 x 的代数式表示底边长，继而利用三角形三边关系列出一元一次不等式即可得到本题答案。

【详解】 解： $\because$ 等腰三角形周长为 30，腰长为 x ，

$\therefore$ 底边为： $30 - 2x$ ，

由三角形的三边关系，得

$$\begin{cases} x + x > 30 - 2x \\ 30 - 2x > 0 \end{cases},$$

解得 $7.5 < x < 15$ ，

故答案为： $7.5 < x < 15$ 。

8. 等腰三角形的两边长分别为 $2\sqrt{3}$ 和 $3\sqrt{2}$ ，则其周长为_____。

【答案】 $4\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$ 或 $2\sqrt{3} + 6\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的加法运算，分长 $2\sqrt{3}$ 的边为腰和长为 $3\sqrt{2}$ 的边为腰，两种情况进行讨论求解即可。

【详解】 解：当长为 $2\sqrt{3}$ 的边为腰时，周长为 $2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} = 4\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$ ；

当长为 $3\sqrt{2}$ 的边为腰时，周长为 $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 2\sqrt{3} + 6\sqrt{2}$ ；

故答案为： $4\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$ 或 $2\sqrt{3} + 6\sqrt{2}$ 。

9. 凸六边形共有_____组同旁内角。

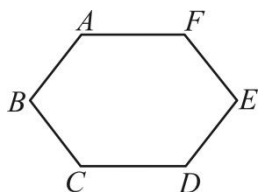
【答案】 6

【解析】

【分析】两条直线被第三条直线所截形成的角中，若两个角都在两直线之间，并且在第三条直线（截线）的同旁，则这样一对角叫做同旁内角，由此即可得到答案.

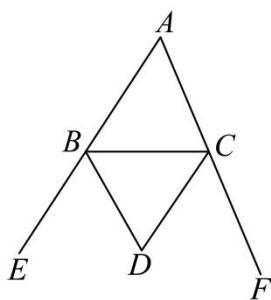
【详解】解：图中同旁内角有 $\angle A$ 和 $\angle B$ ， $\angle B$ 和 $\angle C$ ， $\angle C$ 和 $\angle D$ ， $\angle D$ 和 $\angle E$ ， $\angle E$ 和 $\angle F$ ， $\angle A$ 和 $\angle F$ ，共有 6 对.

故答案为：6.



【点睛】本题考查同旁内角，关键是掌握同旁内角的定义.

10. 如图，已知 $\triangle ABC$ ， BD 与 CD 分别是外角 $\angle EBC$ 和外角 $\angle ECF$ 的角平分线，若 $\angle D = 62^\circ$ ，则 $\angle A = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$.



【答案】56

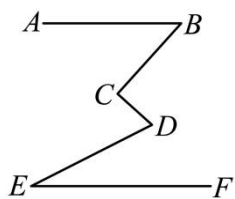
【解析】

【分析】题目主要考查角平分线的计算，三角形内角和定理，理解题意，结合图形求解是解题关键. 根据题意得出 $\angle DBC + \angle DCB = 118^\circ$ ，再由角平分线确定 $\angle EBC + \angle FCB = 236^\circ$ ，得出 $\angle ABC + \angle ACB = 124^\circ$ ，即可求解.

【详解】解： $\because \angle D = 62^\circ$ ，
 $\therefore \angle DBC + \angle DCB = 180^\circ - 62^\circ = 118^\circ$ ，
 $\because BD$ 与 CD 分别是外角 $\angle EBC$ 和外角 $\angle ECF$ 的角平分线，
 $\therefore \angle EBC + \angle FCB = 2(\angle DBC + \angle DCB) = 236^\circ$ ，
 $\therefore \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ + 180^\circ - (\angle EBC + \angle FCB) = 124^\circ$ ，
 $\therefore \angle A = 180^\circ - (\angle ABC + \angle ACB) = 56^\circ$ ，

故答案为：56.

11. 如图, $AB \parallel EF$, $\angle C = 90^\circ$, 用 $\angle B$ 和 $\angle D$ 表示 $\angle E$, $\angle E = \underline{\hspace{2cm}}$.

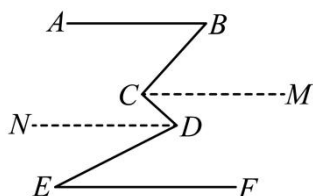


【答案】 $\angle B + \angle CDE - 90^\circ$

【解析】

【分析】 本题考查了平行线的性质, 作 $CM \parallel AB$, $DN \parallel EF$, 则 $AB \parallel CM \parallel DN \parallel EF$, 由平行线的性质可得 $\angle B = \angle BCM$, $\angle DCM = \angle CDN$, $\angle E = \angle NDE$, 再结合几何图形分析即可得解, 熟练掌握平行线的性质是解此题的关键.

【详解】 解: 如图, 作 $CM \parallel AB$, $DN \parallel EF$,



$\because AB \parallel EF$,

$\therefore AB \parallel CM \parallel DN \parallel EF$,

$\therefore \angle B = \angle BCM$, $\angle DCM = \angle CDN$, $\angle E = \angle NDE$,

$\therefore \angle BCD = \angle B + \angle DCM = \angle B + \angle CDN = \angle B + \angle CDE - \angle NDE = \angle B + \angle CDE - \angle E$,

$\therefore 90^\circ = \angle B + \angle CDE - \angle E$,

$\therefore \angle E = \angle B + \angle CDE - 90^\circ$,

故答案为: $\angle B + \angle CDE - 90^\circ$.

12. 把 $a\sqrt{-\frac{1}{a}}$ 中根号外面的因式移到根号内的结果是__.

【答案】 $-\sqrt{-a}$

【解析】

【分析】 根据二次根式的性质进行求解即可.

【详解】 解: $a\sqrt{-\frac{1}{a}}$

$$= a\sqrt{-\frac{a}{a^2}}$$

$$= -\sqrt{-a}$$

故答案为: $-\sqrt{-a}$.

【点睛】本题主要考查了二次根式的化简, 熟知二次根式的性质是解题的关键.

13. 三角形中最大角是最小角的 4 倍, 则最小角 α 的取值范围是_____.

【答案】 $20^\circ \leq \alpha \leq 30^\circ$

【解析】

【分析】考查三角形的内角和定理, 根据三角形的内角和定理列出不等式是解题的关键.

因为 α 是它的最小角, 所以设最大角是 γ , 中的角是 β , 则 $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, 又 $\gamma = 4\alpha$. 列出不等式组, 求解即可.

【详解】因为 α 是它的最小角, 所以设最大角是 γ , 中的角是 β , 则 $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, 又 $\gamma = 4\alpha$.

$$\text{由} \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \\ \alpha \leq \beta \leq \gamma \\ \gamma = 4\alpha \end{cases},$$

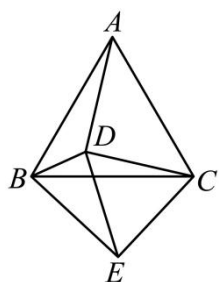
可得 $\alpha + \alpha + 4\alpha \leq 180^\circ$, 即 $\alpha \leq 30^\circ$,

可得 $\alpha + 4\alpha + 4\alpha \geq 180^\circ$, 即 $\alpha \geq 20^\circ$,

所以最小角的取值范围为 $20^\circ \leq \alpha \leq 30^\circ$.

故答案为: $20^\circ \leq \alpha \leq 30^\circ$.

14. 如图, $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 是等边三角形且 $\angle DBE = 67^\circ$, 则 $\angle ADB =$ _____°.



【答案】 127

【解析】

【分析】本题主要考查了全等三角形的性质和判定, 三角形内角和定理, 等边三角形的性质的应用, 能求出 $\angle CAD = \angle CBE$ 是解此题的关键, 难度适中. 根据等边三角形性质得出

$\therefore AC = BC, CE = CD, \angle BAC = 60^\circ, \angle ACB = \angle ECD = 60^\circ$ 求出 $\angle ACD = \angle BCE$, 证 $\triangle ACD \cong \triangle BCE$,

根据全等三角形的性质得出 $\angle CAD = \angle CBE$, 求出 $\angle ABD + \angle BAD = 53^\circ$, 根据三角形内角和定理求出

即可

【详解】解：∵ $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 都是等边三角形，

$$\therefore AC = BC, CE = CD, \angle BAC = 60^\circ, \angle ACB = \angle ECD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB - \angle DCB = \angle ECD - \angle DCB,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle BCE,$$

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCE$ 中，

$$\begin{cases} AC = BC \\ \angle ACD = \angle BCE \\ CE = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle CAD = \angle CBE,$$

$$\therefore \angle DBE = 67^\circ,$$

$$\therefore 67^\circ - \angle DBC = 60^\circ - \angle BAD,$$

$$\therefore 67^\circ - (60^\circ - \angle ABD) = 60^\circ - \angle BAD,$$

$$\therefore \angle ABD + \angle BAD = 53^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB = 180^\circ - (\angle ABD + \angle BAD) = 127^\circ.$$

故答案为：127.

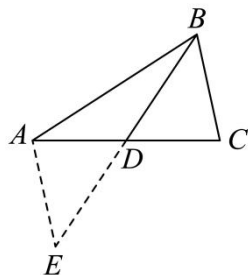
15. 在 $\triangle ABC$ 中， $BC = 5, AB = 9$ ， D 为 AC 的中点. 则 AC 边上的中线 BD 的取值范围是_____.

【答案】 $2 < BD < 7$

【解析】

【分析】本题考查了全等三角形的性质和判定，三角形的三边关系定理的应用，主要考查学生的推理能力. 延长 BD 到 E ，使 $BD = DE$ ，连接 AE ，证明 $\triangle BDC \cong \triangle EDA$ ，推出 $BC = AE = 5$ ，在 $\triangle ABE$ 中，根据三角形三边关系定理得出 $AB - AE < BE < AB + AE$ ，代入求出结果即可.

【详解】解：延长 BD 到 E ，使 $BD = DE$ ，连接 AE ，



$\because D$ 是 AC 的中点,

$$\therefore AD = CD,$$

在 $\triangle BDC$ 和 $\triangle EDA$ 中,

$$\begin{cases} BD = DE \\ \angle BDC = \angle EDA, \\ AD = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BDC \cong \triangle EDA (\text{SAS}),$$

$$\therefore BC = AE = 5,$$

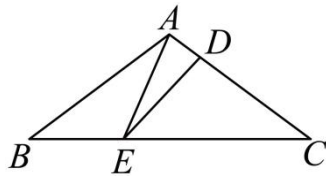
在 $\triangle ABE$ 中, $AB - AE < BE < AB + AE$,

$$\therefore 9 - 5 < 2BD < 9 + 5,$$

$$\therefore 2 < BD < 7,$$

故答案为: $2 < BD < 7$.

16. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB = AC, AE = DE, \angle BAE = 30^\circ, \angle CED = 45^\circ$, 则 $\angle DAE =$ _____



【答案】 80° ##80 度

【解析】

【分析】 本题主要考查了等腰三角形的性质, 三角形内角和定理, 三角形外角的性质, 一元一次方程的应用, 先根据等腰三角形的性质得出 $\angle B = \angle C$, $\angle DAE = \angle EDA$, 设 $\angle DAE = \angle EDA = x$, 则 $\angle B = \angle C = \angle EDA - \angle CED = x - 45^\circ$, 根据三角形内角和定理和三角形外角的性质表示出 $\angle AEC$, 即可列出方程, 解方程即可.

【详解】 解: $\because AB = AC, AE = DE$,

$$\therefore \angle B = \angle C, \angle DAE = \angle EDA,$$

$$\text{设 } \angle DAE = \angle EDA = x,$$

$$\text{则 } \angle B = \angle C = \angle EDA - \angle CED = x - 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AEC = 180^\circ - \angle C - \angle EAD = 180^\circ - x + 45^\circ - x = 225^\circ - 2x,$$

$$\text{又 } \because \angle AEC = \angle B + \angle EAB = x - 45^\circ + 30^\circ = x - 15^\circ,$$

$$\therefore 225^\circ - 2x = x - 15^\circ,$$

解得： $x = 80^\circ$ ，

即 $\angle DAE = 80^\circ$ ，

故答案为： 80° 。

17. 在平面直角坐标系中，点 A 、点 B 均在第二象限，点 A 的坐标为 $(a-b, -3a)$ ，点 B 的坐标为 $(3a-b, a+b+5)$ 。已知点 A' 与点 A 关于 x 轴对称，点 B' 与点 B 关于 y 轴对称， $\triangle AA'B'$ 是一个等腰直角三角形且 $\angle A = 90^\circ$ ，则点 A 的坐标为_____。

【答案】 $\left(-\frac{10}{3}, 5\right)$

【解析】

【分析】 本题考查了坐标与图形变化—轴对称，等腰直角三角形的性质，点的坐标特征，由题意可得 $A'(a-b, 3a)$ ， $B'(b-3a, a+b+5)$ ，从而可得 $AA' = -6a$ ，由等腰直角三角形的定义可得 A 、 B 、 B' 的纵坐标相等， $AA' = AB'$ ，从而得出 $a+b+5 = -3a$ ①， $-6a = 2b-4a$ ②，联立①②求解即可，熟练掌握以上知识点并灵活运用是解此题的关键。

【详解】 解： $\because$ 点 A' 与点 A 关于 x 轴对称，点 B' 与点 B 关于 y 轴对称，点 A 、点 B 均在第二象限，

$\therefore A'(a-b, 3a)$ ， $B'(b-3a, a+b+5)$ ，

$\therefore AA' = -3a - 3a = -6a$ ，

点 A 与点 A' 关于 x 轴对称，

故线段 AA' 垂直于 x 轴。

又因 $\triangle AA'B'$ 是直角三角形且 $\angle A = 90^\circ$ ，

故 AB' 垂直于 AA' ，

即 AB' 平行于 x 轴，

所以点 A 与点 B' 的纵坐标相等，

$\therefore a+b+5 = -3a$ ①，

$\because A(a-b, -3a)$ ， $B'(b-3a, a+b+5)$ ， A 、 B 、 B' 的纵坐标相等，

$\therefore AB' = b-3a - (a-b) = 2b-4a$ ，

$\therefore -6a = 2b-4a$ ②，

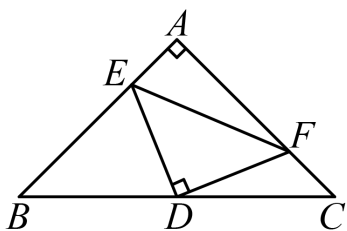
联立①②解得: $a = -\frac{5}{3}$, $b = \frac{5}{3}$,

$$\therefore a - b = -\frac{5}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{10}{3}, \quad -3a = -3 \times \left(-\frac{5}{3}\right) = 5,$$

$$\therefore A\left(-\frac{10}{3}, 5\right),$$

故答案为: $\left(-\frac{10}{3}, 5\right)$.

18. 如图, ABC 是等腰直角三角形, $AB = AC$, D 是斜边 BC 的中点, $\angle EDF = 90^\circ$, E 、 F 分别是边 AB 、 AC 上, 若 $BE = 12$, $CF = 5$, 则 $\triangle DEF$ 的面积为_____.



【答案】 $\frac{169}{4}$

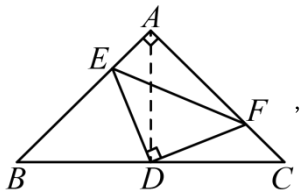
【解析】

【分析】 本题考查了等腰直角三角形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、勾股定理, 连接 AD , 由题意可得 $\angle DAC = \angle BAD = \angle C = 45^\circ$, $AD \perp BC$, $AD = CD$, 证明 $\triangle ADE \cong \triangle CDF$ (ASA), 得出 $AE = CF = 5$, $DF = DE$, 即可推出 $\triangle DEF$ 为等腰直角三角形, 求出 $AF = BE = 12$, 由勾股定理可得

$EF = \sqrt{AE^2 + AF^2} = 13$, 从而可得 $DE = DF = \frac{13\sqrt{2}}{2}$, 再由三角形面积公式计算即可得解, 熟练掌握以

上知识点并灵活运用是解此题的关键.

【详解】 解: 如图, 连接 AD ,



$\therefore ABC$ 是等腰直角三角形, $AB = AC$, D 是斜边 BC 的中点,

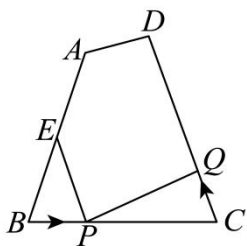
$\therefore \angle DAC = \angle BAD = \angle C = 45^\circ$, $AD \perp BC$, $AD = CD$,

$\therefore \angle ADF + \angle CDF = 90^\circ$,

$$\begin{aligned}
&\because \angle EDF = 90^\circ, \\
&\therefore \angle ADF + \angle ADE = 90^\circ, \\
&\therefore \angle CDF = \angle ADE, \\
&\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDF (\text{ASA}), \\
&\therefore AE = CF = 5, \quad DF = DE, \\
&\therefore \triangle DEF \text{ 为等腰直角三角形}, \\
&\because AB = AC, \\
&\therefore AB - AE = AC - CF, \\
&\therefore AF = BE = 12, \\
&\because \angle EAF = 90^\circ, \\
&\therefore EF = \sqrt{AE^2 + AF^2} = 13, \\
&\because DF^2 + DE^2 = EF^2, \\
&\therefore DE = DF = \frac{13\sqrt{2}}{2}, \\
&\therefore S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} \times DE \times DF = \frac{1}{2} \times DE^2 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{13\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{169}{4},
\end{aligned}$$

故答案为: $\frac{169}{4}$.

19. 如图, 已知四边形 $ABCD$ 中, $AB = 10$ 厘米, $BC = 8$ 厘米, $CD = 12$ 厘米, $\angle B = \angle C$, 点 E 为 AB 的中点. 如果点 P 在线段 BC 上以 3 厘米/秒的速度由 B 点向 C 点运动, 同时, 点 Q 在线段 CD 上由 C 点向 D 点运动, 当点 Q 的运动速度为_____时, 能够使 $\triangle BPE$ 与 $\triangle CQP$ 全等.



【答案】 3 厘米/秒或 $\frac{15}{4}$ 厘米/秒

【解析】

【分析】 本题主要考查了全等三角形的判定, 一元一次方程的应用 (行程问题) 等知识点. 利用全等三角

形的判定方法，分两种情况讨论： $\triangle BPE \cong \triangle CQP$ 或 $\triangle BPE \cong \triangle CPQ$ ，分别求解即可.

【详解】解：设点 P 运动的时间为 t 秒，

则 $PB = 3t$ (厘米)， $PC = BC - PB = (8 - 3t)$ 厘米，

$\because \angle B = \angle C$ ，

当 $BP = CQ$ ， $BE = PC$ 时， $\triangle BPE \cong \triangle CQP$ ，

$\because BP = CQ$ ， P ， Q 运动的时间相等，

$\therefore Q$ 的运动速度是 3 厘米 / 秒；

当 $BP = PC$ ， $BE = CQ$ 时， $\triangle BPE \cong \triangle CPQ$ ，

$\because E$ 是 AB 中点，

$\therefore CQ = BE = \frac{1}{2}AB = 5$ (厘米)，

$\because BP = PC$ ，

$\therefore 3t = 8 - 3t$ ，

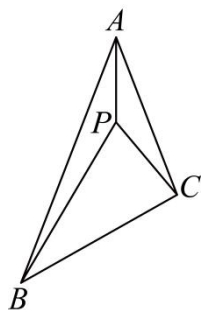
解得： $t = \frac{4}{3}$ ，

$\therefore 5 \div \frac{4}{3} = \frac{15}{4}$ 厘米 / 秒；

$\therefore$ 当点 Q 的运动速度为 3 厘米 / 秒或 $\frac{15}{4}$ 厘米 / 秒时，能够使 $\triangle BPE$ 与 $\triangle CQP$ 全等，

故答案为： 3 厘米 / 秒或 $\frac{15}{4}$ 厘米 / 秒.

20. 如图，点 P 是三角形 ABC 内部一点，且满足 $\angle PAB = \angle PAC = 21^\circ$. 如果 $\angle PBC = 30^\circ$ ， $\angle PBA = 9^\circ$ ，
则 $\angle APC$ 的度数是_____.



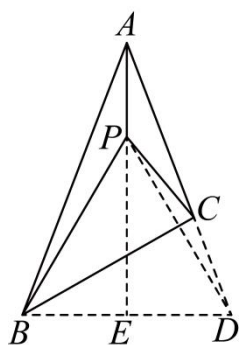
【答案】 141° ## 141 度

【解析】

【分析】此题考查了全等三角形的判定和性质、等边三角形的判定和性质、等腰三角形的判定和性质等知

识, 添加合适的辅助线是解题的关键. 延长 AC 到点 D , 使得 $AD = AB$, 连接 BD, PD , 延长 AP 交 BD 于点 E , 证明 $\triangle ABP \cong \triangle ADP$ (SAS), 得到 $\angle PDA = \angle ABP = 9^\circ, PB = PD$, 进一步证明 $\triangle PDB$ 是等边三角形, 得到 $\angle PBD = 60^\circ$, 则 BC 平分 $\angle PBD$, 得到 BC 垂直平分 PD , 则 $PC = CD$, 得到 $\angle CPD = \angle PDC = 9^\circ$, 则 $\angle CPE = \angle DPE + \angle CPD = 39^\circ$, 即可求出 $\angle APC = 180^\circ - \angle CPE = 141^\circ$.

【详解】解: 延长 AC 到点 D , 使得 $AD = AB$, 连接 BD, PD , 延长 AP 交 BD 于点 E ,



$$\because \angle PAB = \angle PAC = 21^\circ, AP = AP,$$

$$\therefore \triangle ABP \cong \triangle ADP (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle PDA = \angle ABP = 9^\circ, PB = PD$$

$$\because \angle BPE = \angle PAB + \angle PBA = 30^\circ, \angle DPE = \angle PAC + \angle ADP = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BPD = \angle BPE + \angle DPE = 60^\circ$$

$$\therefore \triangle PDB \text{ 是等边三角形},$$

$$\therefore \angle PBD = 60^\circ,$$

$$\because \angle PBC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle CBD = \angle PBD - \angle PBC = 30^\circ$$

$$\therefore BC \text{ 平分 } \angle PBD,$$

$$\therefore BC \text{ 垂直平分 } PD,$$

$$\therefore PC = CD,$$

$$\therefore \angle CPD = \angle PDC = 9^\circ,$$

$$\therefore \angle CPE = \angle DPE + \angle CPD = 39^\circ,$$

$$\therefore \angle APC = 180^\circ - \angle CPE = 141^\circ.$$

故答案为 141° .

三、计算题 (每题 4 分, 16 分)

21. 计算: $\left(\sqrt{0.5}-3\sqrt{\frac{1}{3}}\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{75}\right)$

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{4}+4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的加减，先根据二次根式的性质进行化简，再根据二次根式的加减法则进行计算即可得解，熟练掌握运算法则是解此题的关键.

【详解】 解: $\left(\sqrt{0.5}-3\sqrt{\frac{1}{3}}\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{75}\right)$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{3}\right)-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}-5\sqrt{3}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{2}}{4}+5\sqrt{3}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}+4\sqrt{3}.$$

22. 计算: $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{12}{x}}\div\left(-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{18}{x}}\right)$

【答案】 $-\frac{2\sqrt{6}}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的混合运算，根据二次根式的性质可得：原式 $=\frac{\sqrt{12}}{2\sqrt{x}}\div\left(-\frac{\sqrt{18}}{4\sqrt{x}}\right)$ ，根据二次根式的除法法则进行计算即可.

【详解】 解: $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{12}{x}}\div\left(-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{18}{x}}\right)$

$$=\frac{\sqrt{12}}{2\sqrt{x}}\div\left(-\frac{\sqrt{18}}{4\sqrt{x}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{12}}{2\sqrt{x}}\times\left(-\frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{18}}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{12} \times 4\sqrt{x}}{2\sqrt{x} \times \sqrt{18}}$$

$$= -\frac{2\sqrt{12}}{\sqrt{18}}$$

$$= -2\sqrt{\frac{12}{18}}$$

$$= -2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$= -\frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

23. 计算: $(\sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{3})(\sqrt{6} - \sqrt{5} + \sqrt{3})$

【答案】 $-2 + 2\sqrt{15}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的混合运算，先根据平方差公式进行计算，再利用完全平方公式进行计算，然后合并同类二次根式即可.

【详解】 解: 原式 $= (\sqrt{6} + \sqrt{5} - \sqrt{3})[\sqrt{6} - (\sqrt{5} - \sqrt{3})]$

$$= 6 - (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$$

$$= 6 - 8 + 2\sqrt{15}$$

$$= -2 + 2\sqrt{15}.$$

24. 计算: $\sqrt{5-2\sqrt{6}} - \sqrt{5+2\sqrt{6}}$

【答案】 $-2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的运算、完全平方公式，熟练掌握以上知识点是解题的关键. 根据完全平方公式把式子化简，再进行计算.

【详解】 解: $\sqrt{5-2\sqrt{6}} - \sqrt{5+2\sqrt{6}}$

$$= \sqrt{2-2\sqrt{6}+3} - \sqrt{2+2\sqrt{6}+3}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6} + (\sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{6} + (\sqrt{3})^2} \\
&= \sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2} \\
&= \sqrt{3} - \sqrt{2} - (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \\
&= -2\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

四、解答题（第 25、26 题、28 题每题 6 分，27 题 8 分，29 题 8 分）

25. 已知 $a+b=5$ ， $ab=1$ ，求 $b\sqrt{\frac{b}{a}} + a\sqrt{\frac{a}{b}}$ 的值.

【答案】 23

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的性质，完全平方公式的变形求值，分式化简求值，解题的关键是熟练掌握二次根式的性质和分式加减的运算法则. 由题意得 $a>0$ ， $b>0$ ，根据二次根式的性质将 $b\sqrt{\frac{b}{a}} + a\sqrt{\frac{a}{b}}$

变形为 $\frac{b\sqrt{ab}}{a} + \frac{a\sqrt{ab}}{b}$ ，然后代入 $ab=1$ 变为 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ ，再根据分式加减运算法则和完全平方公式进行变形求值.

【详解】 解： $\because a+b=5>0$ ， $ab=1>0$ ，

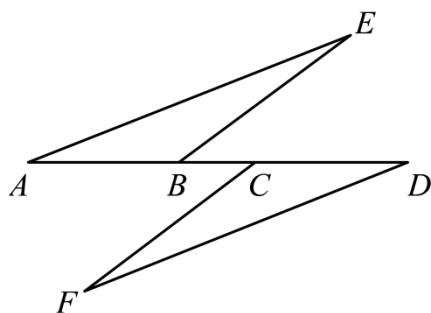
$\therefore a>0$ ， $b>0$ ，

$$\begin{aligned}
&\therefore b\sqrt{\frac{b}{a}} + a\sqrt{\frac{a}{b}} \\
&= b\sqrt{\frac{ab}{a^2}} + a\sqrt{\frac{ab}{b^2}} \\
&= \frac{b\sqrt{ab}}{a} + \frac{a\sqrt{ab}}{b} \\
&= \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \\
&= \frac{a^2 + b^2}{ab} \\
&= \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab}
\end{aligned}$$

$$= \frac{5^2 - 2 \times 1}{1}$$

$$= 23.$$

26. 如图, 点 A 、 B 、 C 、 D 在一条直线上, 如果 $AC = BD$, $BE = CF$, 且 $BE \parallel CF$, 那么 $AE \parallel DF$. 为什么? (完成以下填空和说理过程)



解: $\because BE \parallel CF$ (已知),

$$\therefore \angle EBC = \angle FCB \text{ (①_____)}.$$

$$\because \angle EBC + \angle EBA = 180^\circ, \angle FCB + \angle FCD = 180^\circ \text{ (②_____)},$$

$$\therefore \angle EBA = \angle FCD \text{ (③_____)},$$

$$\because AC = BD \text{ (已知)},$$

$$\therefore \text{④_____ (等式性质), 即 } AB = CD.$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DCF$ 中,

$$\begin{cases} AB = CD \\ \angle ABE = \angle DCF, \\ BE = CF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DCF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle A = \angle D \text{ (⑤_____)},$$

$$\therefore AE \parallel DF \text{ (⑥_____)}.$$

【答案】 ①两直线平行, 内错角相等; ②平角定义; ③等角的补角相等; ④ $AC - BC = BD - BC$; ⑤全等三角形对应角相等; ⑥内错角相等, 两直线平行

【解析】

【分析】 本题考查了全等三角形的判定与性质、平行线的判定与性质等知识; 熟练掌握平行线的判定与性质, 证明三角形全等是解题的关键. 根据推导过程, 写出理由即可, 再证 $\triangle ABE \cong \triangle DCF$ (SAS), 可得出 $\angle A = \angle D$, 从而 $AE \parallel DF$.

【详解】解：∵ $BE \parallel CF$ (已知),

∴ $\angle EBC = \angle FCB$ (①两直线平行, 内错角相等).

∵ $\angle EBC + \angle EBA = 180^\circ$, $\angle FCB + \angle FCD = 180^\circ$ (②平角定义),

∴ $\angle EBA = \angle FCD$ (③等角的补角相等),

∵ $AC = BD$ (已知),

∴ ④ $AC - BC = BD - BC$ (等式性质), 即 $AB = CD$.

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DCF$ 中,

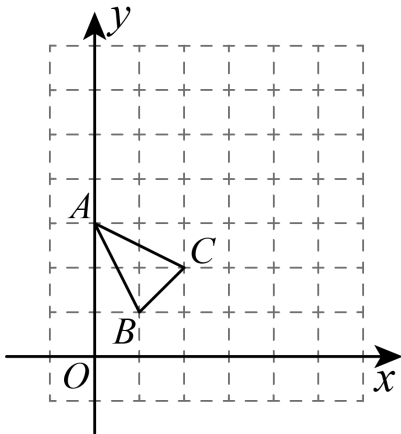
$$\begin{cases} AB = CD \\ \angle ABE = \angle DCF, \\ BE = CF \end{cases}$$

∴ $\triangle ABE \cong \triangle DCF$ (SAS),

∴ $\angle A = \angle D$ (⑤全等三角形对应角相等),

∴ $AE \parallel DF$ (⑥内错角相等, 两直线平行).

27. 直角坐标系中, 在由边长为 1 个单位长度的小正方形组成的网格中建立平面直角坐标系 xOy , 格点 (网格线的交点) 的坐标 A 、 B 、 C 分别为 $(0,3)$ 、 $(1,1)$ 、 $(2,2)$,



(1) 求三角形 ABC 的面积

(2) 以点 C 为旋转中心, 将三角形 ABC 旋转 180° 得到三角形 $A_1B_1C_1$, 直接写出点 A_1 、 B_1 的坐标.

(3) 已知 $OB = \sqrt{2}$, 在 x 轴上找点 P 使得三角形 OPB 为等腰三角形, 在图中画出点 P 并写出点 P 坐标.

【答案】(1) $\frac{3}{2}$

(2) $A_1(4,1)$, $B_1(3,3)$

(3) 作图见解析; 点 P 坐标为: $(-\sqrt{2},0)$, $(1,0)$, $(\sqrt{2},0)$, $(2,0)$.

【解析】

【分析】(1) 用割补法求出 $\triangle ABC$ 的面积即可；

(2) 根据旋转的性质和中点坐标求出结果即可；

(3) 分三种情况：当 $OP = OB = \sqrt{2}$ 时，当 $BP = OP$ 时，当 $BP = OB$ 时，分别画出图形，根据图形进行求解即可。

【小问 1 详解】

$$\text{解： } S_{\triangle ABC} = 2 \times 2 - \frac{1}{2} \times 1 \times 2 - \frac{1}{2} \times 1 \times 2 - \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{3}{2}；$$

【小问 2 详解】

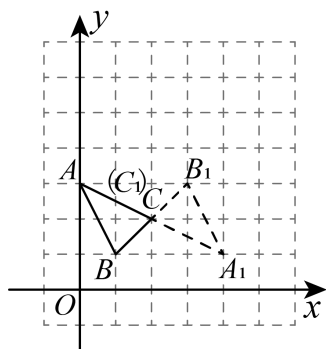
解： $\because$ 以点 C 为旋转中心，将三角形 ABC 旋转 180° 得到三角形 $A_1B_1C_1$ ，

$\therefore$ 点 C 为 AA_1 的中点，点 C 为 BB_1 的中点，

$\therefore A(0,3)$ 、 $B(1,1)$ 、 $C(2,2)$ ，

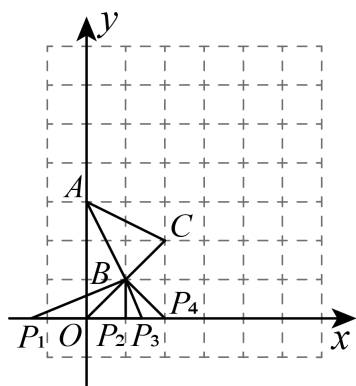
$\therefore A_1(2 \times 2 - 0, 2 \times 2 - 3)$ ， $B_1(2 \times 2 - 1, 2 \times 2 - 1)$ ，

即 $A_1(4,1)$ ， $B_1(3,3)$ ；



【小问 3 详解】

解： 当 $OP = OB = \sqrt{2}$ 时，点 P 在点 P_1 和 P_3 的位置处，如图所示：



此时 $P_1(-\sqrt{2}, 0)$, $P_3(\sqrt{2}, 0)$;

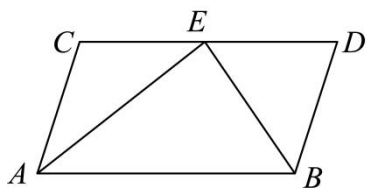
当 $BP = OP$ 时, 如图, 点 P 在点 P_2 位置处, 此时点 $P_2(1, 0)$;

当 $BP = OB$ 时, 如图, 点 P 在点 P_4 位置处, 此时点 $P_4(2, 0)$;

综上所述可知: 点 P 的坐标为: $(-\sqrt{2}, 0)$, $(1, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$, $(2, 0)$.

【点睛】 本题主要考查了旋转的性质, 利用网格求三角形的面积, 等腰三角形的定义, 中点坐标公式, 坐标与图形综合, 解题的关键是数形结合, 注意分类讨论.

28. 如图, $AC \parallel BD$, EA 、 EB 分别平分 $\angle CAB$, $\angle DBA$, CD 过点 E . 求证: $AB = AC + BD$.



【答案】 见解析

【解析】

【分析】 此题主要考查了全等三角形, 熟练掌握平行线性质的, 角平分线定义, 全等三角形的判定和性质, 余角、补角性质, 是解题的关键.

在 AB 上截取 $AF = AC$, 连结 EF , 利用角平分线的性质和平行线性质的证明 $\triangle AFE \cong \triangle ACE$ (SAS), $\triangle BEF \cong \triangle BED$ (ASA), 得 $BF = BD$, 即得.

【详解】 证明: 在 AB 上截取 $AF = AC$, 连结 EF ,

$\because EA$ 、 EB 分别是 $\angle CAB$, $\angle DBA$ 的平分线,

$\therefore \angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4$,

$\because AE = AE$,

$\therefore \triangle AFE \cong \triangle ACE$ (SAS),

$\therefore \angle 6 = \angle 5$,

$\because AC \parallel BD$,

$\therefore \angle CAB + \angle DBA = 180^\circ$,

$\therefore \angle 2 + \angle 4 = 90^\circ$,

$\therefore \angle AEB = 90^\circ$,

$\therefore \angle 5 + \angle 8 = 90^\circ$,

$$\therefore \angle 7 + \angle 6 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 7 = \angle 8,$$

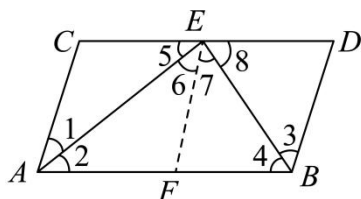
$$\therefore BE = BE,$$

$$\therefore \triangle BEF \cong \triangle BED (\text{ASA}),$$

$$\therefore BF = BD,$$

$$\therefore AB = AF + FB,$$

$$\therefore AB = AC + BD.$$



29. 通过对下面数学模型的研究学习，解决下列问题：

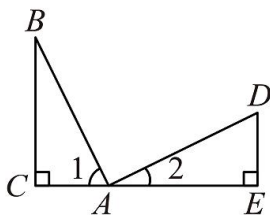


图1

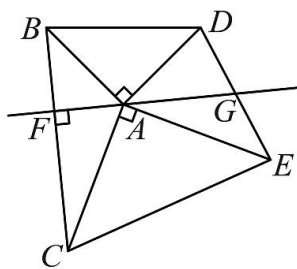


图2

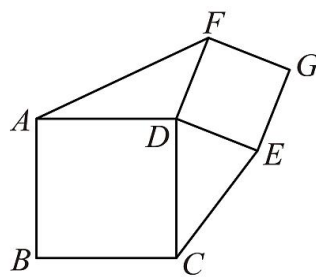


图3

(1) 如图1， $\angle BAD = 90^\circ$ ， $AB = AD$ ，过点 B 作 $BC \perp AC$ 于点 C ，过点 D 作 $DE \perp AC$ 于点 E 。由 $\angle 1 + \angle 2 = \angle 2 + \angle D = 90^\circ$ ，得 $\angle 1 = \angle D$ 。又 $\angle ACB = \angle AED = 90^\circ$ ，可以推理得到 $\triangle ABC \cong$ _____，推理依据是_____。进而得到 $AC =$ _____， $BC =$ _____。我们把这个数学模型称为“K字”模型或“一线三等角”模型；

(2) 如图2， $\angle BAD = \angle CAE = 90^\circ$ ， $AB = AD$ ， $AC = AE$ ，连接 BC ， DE ，且 $BC \perp AF$ 于点 F ， DE 与直线 AF 交于点 G 。求证：点 G 是 DE 的中点；

(3) 如图3，已知四边形 $ABCD$ 和 $DEGF$ 为正方形， $\triangle AFD$ 的面积为 S_1 ， $\triangle DCE$ 的面积为 S_2 ，试猜想 S_1 和 S_2 的数量关系，并说明理由。

【答案】(1) $\triangle DAE$ ，AAS， DE ， AE

(2) 见解析 (3) $S_1 = S_2$ ，理由见解析

【解析】

【分析】本题主要考查了全等三角形的判定与性质，理解“一线三等角”的全等模型以及该模型的构成条

件、证明过程及结论是解题关键.

(1) 通过证明 $\triangle ABC \cong \triangle DAE$, 再根据全等三角形的判定与性质逐步分析即可解答;

(2) 作 $DM \perp AF$, $EN \perp AF$, 利用“K字模型”的结论可得 $\triangle ABF \cong \triangle DAM$, $\triangle ACF \cong \triangle EAN$, 故可推出 $DM = EN$, 再证 $\triangle DMG \cong \triangle ENG$ 即可证明结论;

(3) 作 $PQ \perp CE$, $AM \perp PQ$, $FN \perp PQ$, 利用“K字模型”的结论可得 $\triangle ADM \cong \triangle DCP$, $\triangle DFN \cong \triangle EDP$, 进一步可证 $AMQ \cong FNQ$ 即可求解.

【小问1详解】

解: $\because$ 过点 B 作 $BC \perp AC$ 于点 C , 过点 D 作 $DE \perp AC$ 于点 E .

$$\therefore \angle C = \angle E = 90^\circ,$$

$$\because \angle I = \angle D, AB = AD,$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DAE (\text{AAS}),$$

$$\therefore AC = DE, BC = AE.$$

故答案为: $\triangle DAE$, AAS, DE , AE .

【小问2详解】

证明: 如图: 作 $DM \perp AF$, $EN \perp AF$,

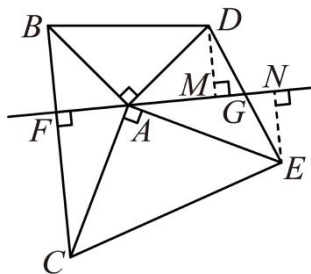


图2

由“K字模型”可得: $\triangle ABF \cong \triangle DAM$, $\triangle ACF \cong \triangle EAN$

$$\therefore AF = DM, AF = EN,$$

$$\therefore DM = EN,$$

$$\because \angle DMG = \angle ENG = 90^\circ, \angle DGM = \angle BGN,$$

$$\therefore \triangle DMG \cong \triangle ENG,$$

$\therefore GM = GN$, 即: 点 G 是 DE 的中点.

【小问3详解】

解: $S_1 = S_2$, 理由如下:

如图：作 $PQ \perp CE$, $AM \perp PQ$, $FN \perp PQ$,

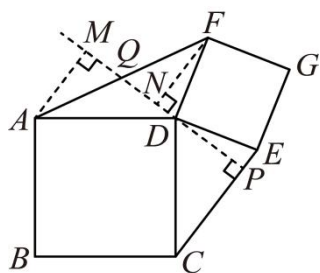


图3

$\because$ 四边形 $ABCD$ 和 $DEGF$ 为正方形,

$\therefore \angle ADC = \angle EDF = 90^\circ$, $AD = CD$, $DE = DF$,

由“K字模型”可得: $\triangle ADM \cong \triangle DCP$, $\triangle DFN \cong \triangle EDP$,

$\therefore S_{\triangle ADM} = S_{\triangle DCP}$, $S_{\triangle DFN} = S_{\triangle EDP}$, $AM = DP$, $FN = DP$,

$\because \angle AMQ = \angle FNQ = 90^\circ$, $\angle AQM = \angle FQN$,

$\therefore \triangle AMQ \cong \triangle FNQ$

$\therefore S_{\triangle AMQ} = S_{\triangle FNQ}$,

$\therefore S_{\triangle AFD} = S_{\triangle ADQ} + S_{\triangle FNQ} + S_{\triangle DFN} = S_{\triangle ADQ} + S_{\triangle AMQ} + S_{\triangle DFN} = S_{\triangle ADM} + S_{\triangle DFN} = S_{\triangle DCP} + S_{\triangle EDP} = S_{\triangle DCE} \therefore$

$S_1 = S_2$.