

2024 学年第二学期初一数学教学质量调研试卷

(考试时间：90 分钟满分：100 分)

考生注意：

1. 本试卷含三个大题，共 25 题。答题时，考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答，在草稿纸、本调研卷上答题一律无效。
2. 除第一、二大题外，其余各题如无特别说明，都必须在答题纸相应位置上写出证明或计算的主要步骤。

一、选择题（本大题共 6 题，每题 2 分，满分 12 分）【每小题只有一个正确选项，在答题纸相应题号的选项上用 2B 铅笔正确填涂】

1. 下列各组长度的线段中，能组成三角形的是（ ）

- A. 2, 3, 5 B. 3, 5, 9 C. 3, 6, 9 D. 3, 7, 9

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了三角形三边关系，解题的关键是掌握“三角形任意两边之和大于第三边，任意两边之差小于第三边”。

根据三角形三边关系定理，任意两边之和大于第三边，只需验证每组中最小的两边之和是否大于最大边即可。

【详解】A. 2, 3, 5：最小两边和为 $2+3=5$ ，等于最大边 5，不满足两边之和大于第三边，不能组成三角形；

B. 3, 5, 9：最小两边和为 $3+5=8$ ，小于最大边 9，不满足条件，不能组成三角形；

C. 3, 6, 9：最小两边和为 $3+6=9$ ，等于最大边 9，不满足条件，不能组成三角形；

D. 3, 7, 9：最小两边和为 $3+7=10$ ，大于最大边 9，满足条件，能组成三角形。

故选 D.

2. 一个圆柱和一个圆锥的底面直径相等，圆锥的高是圆柱的高的 3 倍，如果圆锥的体积是 5cm^3 ，那么圆柱的体积是（ ）

- A. 1cm^3 B. 5cm^3 C. 10cm^3 D. 15cm^3

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了圆柱和圆锥的体积公式，解题的关键是根据已知条件找出圆柱和圆锥体积之间的关系。

先设出圆柱和圆锥的底面半径、高，再分别写出它们的体积公式，最后根据已知条件计算圆柱体积.

【详解】设圆柱的高为 h ，则圆锥的高为 $3h$ ，底面半径均为 r ，

$$\text{圆锥体积为 } V_{\text{圆锥}} = \frac{1}{3} \pi r^2 \times 3h = \pi r^2 h = 5\text{cm}^3,$$

$$\text{圆柱体积公式为 } V_{\text{圆柱}} = \pi r^2 h,$$

$$\text{可知 } \pi r^2 h = 5\text{cm}^3,$$

因此圆柱体积为 5cm^3 .

故选: B.

3. 已知 $a \leq b$ ，下列不等式一定成立的是 ()

- A. $a+1 \geq b+1$ B. $3a \geq 3b$ C. $1-a \geq 1-b$ D. $-a \leq -b$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了不等式的基本性质，解题的关键是熟练运用不等式的基本性质对各选项进行分析判断. 根据不等式的基本性质 (不等式两边加或减同一个数，不等号方向不变；乘或除以同一个正数，不等号方向不变；乘或除以同一个负数，不等号方向改变)，逐一分析选项.

【详解】 已知 $a \leq b$ ，分析各选项:

A、 $a+1 \geq b+1$ 两边同时加 1，不等号方向不变，应为 $a+1 \leq b+1$ ，故 A 错误;

B、 $3a \geq 3b$ 两边同时乘 3 (正数)，不等号方向不变，应为 $3a \leq 3b$ ，故 B 错误;

C、 $1-a \geq 1-b$ 两边同时减 1，得 $-a \geq -b$ ；再两边乘 -1 ，不等号方向改变，得 $a \leq b$ ，与原条件一致，故 C 正确;

D、 $-a \leq -b$ 两边乘 -1 ，不等号方向应改变，得 $a \geq b$ ，与原条件 $a \leq b$ 矛盾，故 D 错误.

故选: C.

4. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B - \angle C = 60^\circ$ ，且 $\angle B$ 是 $\angle C$ 的 5 倍，那么该三角形是 ()

- A. 直角三角形 B. 钝角三角形
C. 面积相等的两个三角形全等 D. 成轴对称的两个三角形全等

【答案】 A

【解析】

【分析】 此题考查了一元一次方程的应用，三角形内角和定理，解题的关键是掌握以上知识点.

设 $\angle C = x$ ，则 $\angle B = 5x$ ，根据 $\angle B - \angle C = 60^\circ$ 列方程求出 $\angle C = 15^\circ$ ， $\angle B = 75^\circ$ ，然后根据三角形内角和定理求出 $\angle A = 180^\circ - \angle B - \angle C = 180^\circ - 75^\circ - 15^\circ = 90^\circ$ ，进而求解即可.

【详解】解：设 $\angle C = x$ ，则 $\angle B = 5x$ ，

$$\therefore \angle B - \angle C = 60^\circ$$

$$\therefore 5x - x = 60^\circ$$

$$\therefore x = 15^\circ$$

$$\therefore \angle C = 15^\circ, \angle B = 75^\circ$$

$$\therefore \angle A = 180^\circ - \angle B - \angle C = 180^\circ - 75^\circ - 15^\circ = 90^\circ.$$

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形.

故选：A.

5. 下列命题中，真命题是（ ）

A. 两个等边三角形全等

B. 腰长对应相等的两个等腰三角形全等

C. 面积相等的两个三角形全等

D. 成轴对称的两个三角形全等

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了全等三角形的判定及等腰三角形、等边三角形相关概念，解题的关键是准确理解全等三角形的判定条件和性质.

根据全等三角形的判定条件，逐一分析各选项是否成立.

【详解】A. 两个等边三角形全等：错误. 等边三角形对应边相等且每个角均为 60° ，但若边长不同（如边长为 2 和 3 的等边三角形），则不全等；

B. 腰长对应相等的两个等腰三角形全等：错误. 等腰三角形仅腰长相等，但底边长度或顶角可能不同（如腰长均为 5，底边分别为 6 和 8 的三角形），无法保证全等；

C. 面积相等的两个三角形全等：错误. 面积相等仅说明面积数值相同，但形状和边长可以不同（如底 4 高 3 与底 6 高 2 的三角形面积均为 6），不全等；

D. 成轴对称的两个三角形全等：正确. 轴对称是几何变换中的全等变换，变换前后图形形状、大小完全一致，符合全等定义.

故选：D.

6. 如图， $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCE$ 均为等边三角形，且点 A 、 B 、 C 在同一直线上，连接 AE 交 BD 于点 F ，连接 CD 交 BE 于点 G ，连接 FG ，点 O 为 AE 与 CD 的交点，以下结论不一定成立的是（ ）

故 C 正确;

$\because \triangle ABD, \triangle BCE$ 均为等边三角形,

$$\therefore \angle ABD = \angle CBE = 60^\circ$$

$$\therefore \angle DBG = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$$

在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle DBG$ 中,

$$\begin{cases} \angle BAF = \angle GDB \\ AB = DB \\ \angle ABF = \angle DBG \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle DBG (\text{ASA})$$

$$\therefore BF = BG$$

$\therefore \triangle BFG$ 为等边三角形,

故 D 正确.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分)

7. “同旁内角互补, 两直线平行”的逆命题是_____.

【答案】两直线平行, 同旁内角互补

【解析】

【详解】分析: 把一个命题的条件和结论互换就得到它的逆命题. 命题“同旁内角互补, 两直线平行”的条件是同旁内角互补, 结论是两直线平行, 故其逆命题是两直线平行, 同旁内角互补.

详解:

命题“同旁内角互补, 两直线平行”的逆命题是: 两直线平行, 同旁内角互补,

故答案为两直线平行, 同旁内角互补.

点睛: 考查了互逆命题的知识及命题的真假判断, 两个命题中, 如果第一个命题的条件是第二个命题的结论, 而第一个命题的结论又是第二个命题的条件, 那么这两个命题叫做互逆命题. 其中一个命题称为另一个命题的逆命题.

8. 如果 $\triangle ABC \cong \triangle DEF, \triangle DEF \cong \triangle OPQ$, 那么 $\triangle ABC \cong \triangle OPQ$ 的推理依据是_____.

【答案】三角形全等的传递性

【解析】

【分析】本题主要考查了三角形全等的性质, 根据三角形全等的传递性进行解答即可.

【详解】解: 如果 $\triangle ABC \cong \triangle DEF, \triangle DEF \cong \triangle OPQ$, 那么 $\triangle ABC \cong \triangle OPQ$ 的推理依据是三角形全等的传

递性.

故答案为：三角形全等的传递性.

9. 桥梁拉杆、电视塔架底座等都有三角形结构，这样设计的数学原理是利用了三角形的_____.

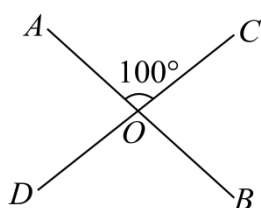
【答案】稳定性

【解析】

【分析】本题考查三角形的稳定性在实际生活中的应用问题，根据三角形的稳定性作答即可.

【详解】解：桥梁拉杆、电视塔架底座等都有三角形结构，这样设计的数学原理是利用了三角形的稳定性，故答案为：稳定性.

10. 如图，直线 AB 、 CD 的夹角的度数是_____.



【答案】 80° ## 80 度

【解析】

【分析】本题考查了两之间的夹角，邻补角，根据邻补角互补求出，即可求解.

【详解】解： $\because$ 直线 AB 和 CD 相交于点 O ,

$$\therefore \angle AOC + \angle BOC = 180^\circ,$$

$$\because \angle AOC = 100^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC = 80^\circ,$$

$$\therefore \text{直线 } AB、CD \text{ 的夹角的度数是 } 80^\circ,$$

故答案为： 80°

11. 为说明命题“如果 $|a| = |b|$ ，那么 $a = b$ ”是假命题，你举出的一个反例是_____.

【答案】 $a = 1$ ， $b = -1$ （答案不唯一）

【解析】

【分析】根据绝对值的性质可得当 $|a| = |b|$ ，得出 $a = b$ 或 $a = -b$ ，举例只要两个数互为相反数即可得.

【详解】解： $\because |a| = |b|$,

$$\therefore a = b \text{ 或 } a = -b,$$

例如： $a = 1$ ， $b = -1$ 时， $|a| = |b|$,

∴命题“如果 $|a|=|b|$ ，那么 $a=b$ ”是假命题，

故答案为： $a=1$ ， $b=-1$ （答案不唯一）.

【点睛】题目主要考查绝对值的性质，深刻理解绝对值的性质是解题关键.

12. 已知 ABC 的三个外角度数之比为 $3:4:5$ ，那么三个外角中最大角的度数是_____.

【答案】 150° ## 150度

【解析】

【分析】本题考查三角形的外角，根据三角形的外角和为 360 度，结合比例关系，进行求解即可.

【详解】解： $360^\circ \times \frac{5}{3+4+5} = 150^\circ$ ；

故答案为： 150° .

13. 一个圆柱的底面直径为 6cm ，高为 10cm ，则这个圆柱的侧面积是_____ cm^2 （结果保留 π ）.

【答案】 60π

【解析】

【分析】利用圆柱的侧面积公式为 $S=2\pi rh$ 进行计算；

【详解】∵一个圆柱的底面直径为 6cm ，高为 10cm ，

∴这个圆柱的侧面积是： $\pi d \times 10 = 60\pi$ （ cm^2 ）.

故答案为 60π .

【点睛】考查了圆柱体侧面积求法，正确根据圆柱体侧面积公式是解题关键；在计算这类题时要清楚圆柱的侧面是一个矩形，底面圆的周长为矩形的长，高为宽，计算即可.

14. 圆锥的底面半径为 5cm ，母线长为 15cm ，则该圆锥的侧面展开图的圆心角为_____°.

【答案】120

【解析】

【分析】本题考查圆锥的侧面展开图以及扇形的弧长公式，圆锥的底面周长等于侧面展开图扇形的弧长，根据弧长公式计算即可.

【详解】解：∵圆锥的底面半径为 5cm ，

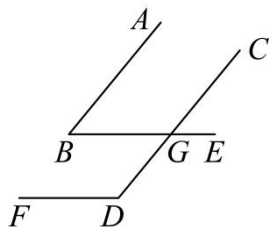
∴底面周长为： $10\pi\text{cm}$

$$\frac{n\pi \times 15}{180} = 10\pi$$

解得： $n=120$ ，

故答案为：120

15. 如图, 已知 $AB \parallel CD$, $BE \parallel FD$, CD 与 BE 交于点 G , $\angle B = 51^\circ$, 那么 $\angle FDG$ 的度数是_____.



【答案】 129°

【解析】

【分析】 本题目考查了平行线, 解决的关键是熟练掌握平行线的性质.

根据 $AB \parallel CD$, 可得 $\angle BGC = 129^\circ$, 再根据 $BE \parallel FD$, 可得到 $\angle FDG = 129^\circ$.

【详解】 $\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle B + \angle BGC = 180^\circ,$$

$$\because \angle B = 51^\circ,$$

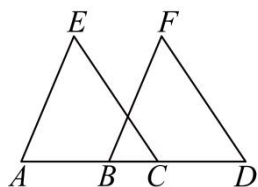
$$\therefore \angle BGC = 129^\circ,$$

$$\because BE \parallel FD,$$

$$\therefore \angle FDG = \angle BGC = 129^\circ,$$

故答案为: 129° .

16. 如图, 已知点 A 、 B 、 C 、 D 在同一直线上, $AE = BF$, $CE = DF$, 如果要运用“SSS”来证明 $\triangle AEC \cong \triangle BFD$, 可以添加的条件是_____. (只需写出一种情况)



【答案】 $AC = BD$ (或 $AB = CD$ 等)

【解析】

【分析】 本题考查了三角形全等的判定定理, 解题的关键是掌握三角形全等的判定定理; 要运用“SSS”来证明三角全等, 根据条件, 添加的条件需要使得三条边对应相等即可.

【详解】 解: $\because AE = BF$, $CE = DF$,

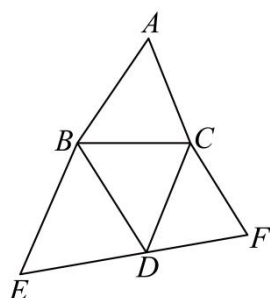
要运用“SSS”来证明 $\triangle AEC \cong \triangle BFD$,

可以添加的条件需要使得 $AC = BD$ 即可,

故添加的条件是: $AC = BD$,

故答案为: $AC = BD$.

17. 如图, 已知点 A 、 E 、 F 在 $\triangle BCD$ 外部, $\angle A = \angle EBD = \angle BDC = \angle DCF$, $\angle ABC = \angle DBC = \angle E = \angle CDF$, 图中与线段 AB 一定相等的线段是_____.



【答案】 BD 或 DB

【解析】

【分析】 本题主要考查了全等三角形的判定和性质, 解题的关键是熟练掌握三角形全等的判定方法, ASA, AAS, SSS, SAS, HL. 证明 $\triangle ABC \cong \triangle DBC$ (AAS), 得出 $AB = BD$ 即可.

【详解】 解: $\because$ 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DBC$ 中

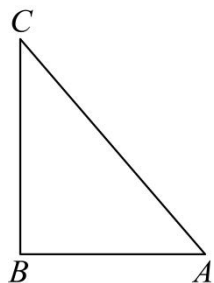
$$\begin{cases} \angle A = \angle BDC \\ \angle ABC = \angle DBC, \\ BC = BC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DBC (\text{AAS}),$$

$$\therefore AB = BD.$$

故答案为: BD .

18. 如图, 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = 50^\circ$, 点 D 在边 AC 上, 将 $\triangle BCD$ 沿直线 CD 翻折得到 $\triangle ECD$, 如果直线 ED 与 ABC 的一条边垂直, 那么 $\angle DBC$ 的度数是_____.



【答案】 10° 或 50°

【解析】

【分析】 本题考查了折叠的性质、平行线的判定与性质、三角形的外角性质、三角形的内角和定理等知识, 熟练掌握折叠的性质是解题关键. 分三种情况: ① $ED \perp BC$, ② $ED \perp AC$ 和 ③ $ED \perp AB$, 先求出

$AB \perp BC$ ， $\angle ACB = 40^\circ$ ，再根据平行线的性质求出 $\angle ADE$ 度数，然后根据折叠的性质可得 $\angle ECD = \angle BCD = 40^\circ$ ， $\angle DBC = \angle E$ ，最后根据三角形的外角性质、三角形的内角和定理求解即可得。

【详解】解：①如图 1，当 $ED \perp BC$ 时，

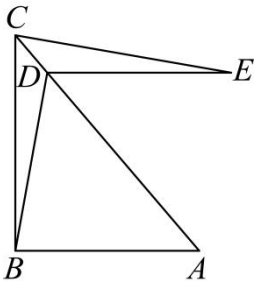


图1

$$\because \angle ABC = 90^\circ, \angle A = 50^\circ,$$

$$\therefore AB \perp BC, \angle ACB = 90^\circ - \angle A = 40^\circ,$$

$$\therefore ED \parallel AB,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle A = 50^\circ,$$

由折叠的性质得： $\angle ECD = \angle BCD = 40^\circ$ ， $\angle DBC = \angle E$ ，

$$\therefore \angle DBC = \angle E = \angle ADE - \angle ECD = 10^\circ;$$

②如图 2，当 $ED \perp AC$ 时，

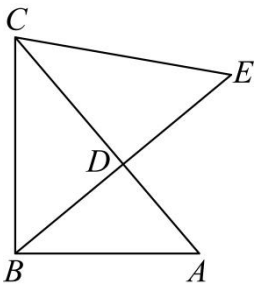


图2

$$\therefore \angle CDE = 90^\circ,$$

由折叠的性质得： $\angle CDB = \angle CDE = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle DBC = 90^\circ - \angle ACB = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ;$$

③如图 3，当 $ED \perp AB$ 时，

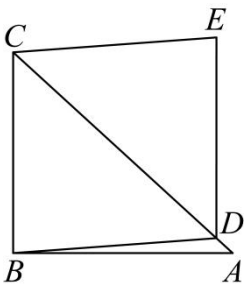


图3

$$\therefore AB \perp BC,$$

$$\therefore ED \parallel BC,$$

$$\therefore \angle CDE = \angle ACB = 40^\circ,$$

由折叠的性质得: $\angle ECD = \angle BCD = 40^\circ$, $\angle DBC = \angle E$,

$$\therefore \angle DBC = \angle E = 180^\circ - \angle ECD - \angle CDE = 100^\circ > 90^\circ,$$

$\therefore \angle DBC > \angle ABC$, 不符合题意, 舍去;

综上, $\angle DBC$ 的度数是 10° 或 50° ,

故答案为: 10° 或 50° .

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 52 分) 【将下列各题的解答过程, 做在答题纸的相应位置上】

19. 求不等式组
$$\begin{cases} 2x - 5 \leq x + 1 \text{ ①} \\ \frac{5-x}{3} > 3-x \text{ ②} \end{cases}$$
 的解集并写出最小整数解.

【答案】 $2 < x \leq 6$, 最小整数解为 $x = 3$

【解析】

【分析】 本题考查了求不等式组的整数解问题, 分别求出不等式组中每一个不等式的解集, 然后得出不等式组的解集, 即可找出不等式组的最小整数解.

【详解】 解: 由 $2x - 5 \leq x + 1$ 解得: $x \leq 6$

$$\text{由 } \frac{5-x}{3} > 3-x$$

解得: $x > 2$.

所以原不等式组的解集为: $2 < x \leq 6$

所以原不等式组的最小整数解为: $x = 3$

20. 某次知识竞赛共有 20 道题, 规定答对一道题得 5 分, 答错一道题扣 2 分, 不答题不得分, 在这次竞赛中, 小明有 3 道题没有作答, 如果希望取得不低于 70 分的成绩, 求小明至少要答对几道题.

【答案】 小明至少要答对 15 道题

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元一次不等式的实际应用, 设小明答对 x 道题, 则小明答错 $(20 - 3 - x)$ 题, 根据总得分不低于 70 分建立不等式求解即可.

【详解】 解: 设小明答对 x 道题,

$$\text{由题意得, } 5x - 2(20 - 3 - x) \geq 70,$$

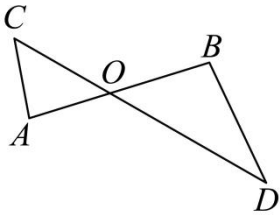
解得: $x \geq \frac{104}{7} = 14\frac{6}{7}$,

$\because x$ 是整数,

$\therefore x$ 的最小值为 15,

答: 小明至少要答对 15 道题.

21. 如图, 已知: AB 与 CD 相交于点 O , $CO > AC$, $\angle B > \angle A$, 求证: $OD > BD$. 把以下证明过程补充完整.



证明: 在 $\triangle AOC$ 中,

$\because CO > AC$,

$\therefore \angle \underline{\hspace{2cm}} > \angle \underline{\hspace{2cm}}$ ($\underline{\hspace{2cm}}$)

$\because \angle AOC = \angle BOD$ ($\underline{\hspace{2cm}}$),

$\therefore \angle \underline{\hspace{2cm}} > \angle \underline{\hspace{2cm}}$,

$\because \angle B > \angle A$,

$\therefore \angle \underline{\hspace{2cm}} > \angle \underline{\hspace{2cm}}$,

$\therefore OD > BD$ ($\underline{\hspace{2cm}}$)

【答案】 A ; AOC ; 在三角形中, 大边对大角; 对顶角相等; A ; BOD ; B, BOD ; 在三角形中, 大角对大边

【解析】

【分析】 本题考查三角形中大边对大角, 大角对大边, 不等式的性质, 根据三角形中大边对大角, 大角对大边, 不等式的性质解答即可.

【详解】 证明: 在 $\triangle AOC$ 中,

$\because CO > AC$

$\therefore \angle A > \angle AOC$ (在三角形中, 大边对大角)

$\because \angle AOC = \angle BOD$ (对顶角相等)

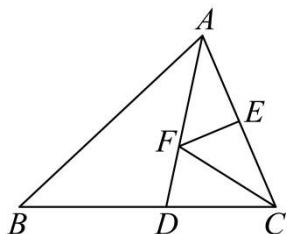
$\therefore \angle A > \angle BOD$

$\because \angle B > \angle A$

$$\therefore \angle B > \angle BOD$$

$$\therefore OD > BD \quad (\text{在三角形中, 大角对大边})$$

22. 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, EF 垂直平分 AC 分别交 AC 、 AD 于点 E 、 F , 连接 CF .



(1) 如果 $\angle BAC = 70^\circ$, 求 $\angle EFC$ 的度数;

(2) 过点 F 作 $FG \parallel AB$ 交边 AC 于点 G , 如果 $AC = 10$, $AF = 6$, 求 $\triangle GFC$ 的周长.

【答案】(1) 55°

(2) 16

【解析】

【分析】本题主要考查了等腰三角形的判定, 线段垂直平分线的性质, 熟练掌握相关知识点是解题的关键.

(1) 根据角平分线的定义以及线段垂直平分线的性质可得 $\angle CAD = \angle FCE = 35^\circ$, 即可求解;

(2) 根据 $FG \parallel AB$ 以及角平分线的定义, 可得 $\angle AFG = \angle FAG$, 从而得到 $AG = FG$, 进而得到 $FG + CG = 10$, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线,

$$\therefore \angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAC$$

$$\because \angle BAC = 70^\circ$$

$$\therefore \angle CAD = 35^\circ$$

$$\because EF \text{ 垂直平分 } AC$$

$$\therefore FA = FC, \angle FEC = 90^\circ$$

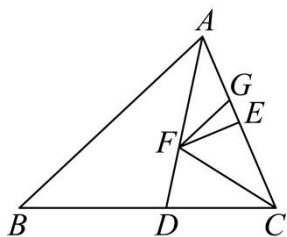
$$\therefore \angle CAD = \angle FCE = 35^\circ,$$

$$\because \angle FEC + \angle FCE + \angle EFC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle EFC = 180^\circ - 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ;$$

【小问 2 详解】

解: 如图,



$$\because FG \parallel AB$$

$$\therefore \angle AFG = \angle BAF$$

$\because AD$ 是 ABC 的角平分线

$$\therefore \angle BAF = \angle FAG$$

$$\therefore \angle AFG = \angle FAG,$$

$$\therefore AG = FG,$$

$$\because FA = FC, FA = 6$$

$$\therefore FC = 6$$

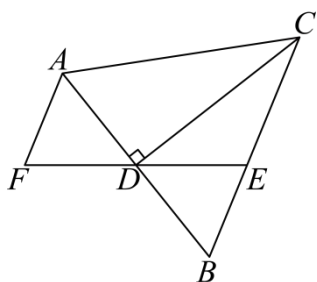
$$\because AC = 10$$

$$\therefore AG + CG = 10$$

$$\therefore FG + CG = 10$$

$$\therefore C_{\triangle GFC} = CG + FG + CF = 16.$$

23. 如图, 已知: 在 ABC 中, CD 平分 $\angle ACB$ 交 AB 于点 D , $\angle ADC = 90^\circ$, 点 E 是 BC 上一点, 连接 ED 并延长使得 $DF = DE$, 连接 AF . 求证: $AF \parallel BC$.



证明: $\because \angle ADC + \angle BDC = 180^\circ$,

又 $\because \angle ADC = 90^\circ$,

$$\therefore \angle BDC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle BDC.$$

$\because CD$ 平分 $\angle ACB$,

$$\therefore \angle ACD = \angle BCD.$$

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle BDC$ 中,

$$\begin{cases} \angle ADC = \angle BDC, \\ CD = CD, \\ \angle ACD = \angle BCD, \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle BDC.$$

(请完成后面的证明过程)

【答案】 详见解析

【解析】

【分析】 本题考查了全等三角形的判定与性质，平行线的判定等知识点，熟练掌握各知识点并灵活运用是解题的关键.

先证明 $\triangle ADC \cong \triangle BDC$ ，再证明 $\triangle ADF \cong \triangle BDE$ ，则 $\angle BED = \angle F$ ，那么 $\triangle ADC \cong \triangle BDC$.

【详解】 解：补充过程如下：

$$\therefore AD = BD$$

在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle BDE$ 中

$$\begin{cases} AD = BD \\ \angle ADF = \angle BDE \\ DF = DE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADF \cong \triangle BDE$$

$$\therefore \angle BED = \angle F$$

$$\therefore AF \parallel BC.$$

24. 已知线段 AB 、 BC , $AB < BC$, $\angle ABC = \angle BCM$ ，且 AB 与 CM 不平行.



(1) 请你用直尺和圆规作出射线 CM ；(保留作图痕迹，不写作法)

(2) 点 D 在线段 BC 上，点 E 在射线 CM 上. 请你用直尺和圆规在 (1) 所作的图中作出点 D 和点 E ，使得 $AD = DE$ ， $\angle ADE = \angle B$ ；(保留作图痕迹，不写作法)

(3) 根据 (2) 中的作图痕迹，说明点 D 和点 E 符合题意.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

(3) 见解析

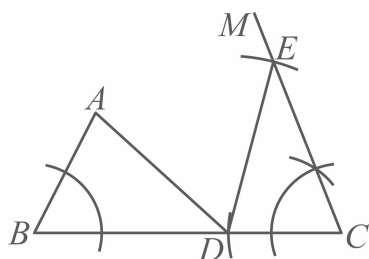
【解析】

【分析】 本题主要考查了全等三角形的判定和性质，尺规作图：

- (1) 根据作一个角等于已知角的作法画出射线 CM ，即可求解；
- (2) 先作 $CD = AB$ ，连接 AD ，再作 $CE = BD$ ，即可求解；
- (3) 证明 $\triangle ABD \cong \triangle DCE$ ，可得 $\angle BAD = \angle CDE$ ，即可解答.

【小问 1 详解】

解：如图，射线 CM 即为所求；



【小问 2 详解】

解：如图，点 D, E 即为所求；

【小问 3 详解】

解：由作法得： $CD = AB$ ， $\angle ABC = \angle BCM$ ， $CE = BD$ ，

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle DCE,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CDE,$$

$$\because \angle ABC + \angle BAD + \angle ADB = 180^\circ, \angle ADE + \angle CDE + \angle ADB = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ADE.$$

25. 定义：在等腰三角形中，过某底角顶点的一条射线分这个底角所成的两个角中恰好有一个角等于这个等腰三角形的顶角，那么称这条射线为这个等腰三角形的“等角分割线”.

已知在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，点 D 在边 AC 上.

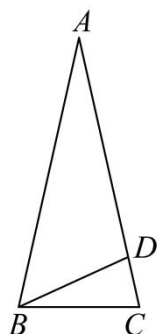


图1

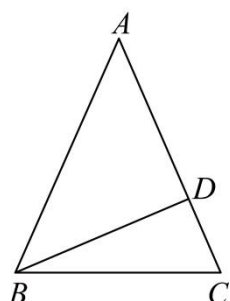


图2

- (1) 如图 1，如果 $BD = BC$ ，求证： BD 是 $\triangle ABC$ 的“等角分割线”；

(2) 如图 2, 如果 $BD \perp AC$, 且 BD 是 $\triangle ABC$ 的“等角分割线”, 求 $\angle C$ 的度数;

(3) BD 是 $\triangle ABC$ 的“等角分割线”, $\angle BAC$ 的平分线交 BD 于点 F . 如果 $DF = DC$, 那么 $\angle BAC$ 的度数为_____.

【答案】(1) 详见解析

(2) 67.5°

(3) 45° 或 $\frac{180^\circ}{7}$

【解析】

【分析】本题考查了等腰三角形的性质, 线段垂直平分线的性质, 全等三角形的判定与性质, 三角形的外角性质, 三角形内角和定理等知识点.

(1) 由等边对等角得到 $\angle ABC = \angle C$, $\angle BDC = \angle C$, 则 $\angle ABC = \angle BDC$, 再由三角形的外角性质即可求证;

(2) 先由等腰三角形性质以及三角形内角和定理得到 $\angle A = 180^\circ - 2\angle C$, 再由外角性质得到 $\angle ABD = 2\angle C - 90^\circ$, $\angle DBC = 90^\circ - \angle C$, 然后再分类讨论即可;

(3) 分两种情况讨论, 当 $\angle DBC = \angle BAC$ 时, 由三线合一得到 $AE \perp BC$, $BE = CE$, 设 $\angle BAE = \angle CAE = x$, 则 $\angle DBC = \angle BAC = 2x$, 可得 AE 垂直平分 BC , 则 $\angle DBC = \angle FCB = 2x$, 然后根据外角性质表示出 $\angle DFC = \angle DCF = 4x$ 再由三角形内角和定理得到

$\angle CAE + \angle ACE + \angle AEC = 180^\circ$; 当 $\angle ABD = \angle BAC$ 时, 设 $\angle BAE = \angle CAE = x$, 则

$\angle ABD = \angle BAC = 2x$, 则 $\angle FDC = \angle BAC + \angle ABD = 4x$, 由 $\triangle ABF \cong \triangle ACF$ (SAS), 以及等腰三角形性质得到 $\angle DFC = \angle DCF = 2x$, 在 $\triangle DFC$ 中由三角形内角和定理建立方程求解.

【小问 1 详解】

证明: $\because AB = AC$,

$\therefore \angle ABC = \angle C$,

$\because BD = BC$,

$\therefore \angle BDC = \angle C$,

$\therefore \angle ABC = \angle BDC$,

$\because \angle ABC = \angle ABD + \angle DBC, \angle BDC = \angle A + \angle ABD$,

$\therefore \angle ABD + \angle DBC = \angle A + \angle ABD$,

$\therefore \angle A = \angle DBC$,

$\therefore BD$ 是 $\triangle ABC$ 的“等角分割线”;

【小问 2 详解】

解: $\because AB = AC$,

$$\therefore \angle ABC = \angle C,$$

$$\because \angle A + \angle ABC + \angle C = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 180^\circ - 2\angle C,$$

$$\because BD \perp AC,$$

$$\therefore \angle BDC = 90^\circ, \angle BDA = 90^\circ,$$

$$\because \angle BDC = \angle A + \angle ABD, \angle BDA = \angle DBC + \angle C,$$

$$\therefore \angle ABD = 2\angle C - 90^\circ, \angle DBC = 90^\circ - \angle C,$$

$\because BD$ 是 ABC 的“等角分割线”,

$$\therefore \textcircled{1} \angle A = \angle ABD, 180^\circ - 2\angle C = 2\angle C - 90^\circ,$$

解得: $\angle C = 67.5^\circ$;

$$\textcircled{2} \angle A = \angle DBC, 180^\circ - 2\angle C = 90^\circ - \angle C,$$

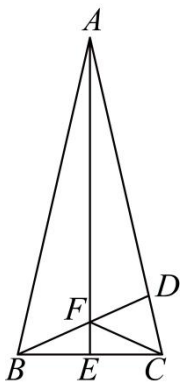
解得: $\angle C = 90^\circ$ (舍去),

综上: $\angle C = 67.5^\circ$;

【小问 3 详解】

解: 记 $\angle BAC$ 的平分线与 BC 交于点 E ,

①当 $\angle DBC = \angle BAC$ 时,



$$\because AB = AC, AE \text{ 平分 } \angle BAC,$$

$$\therefore AE \perp BC, \angle BAE = \angle CAE, BE = CE,$$

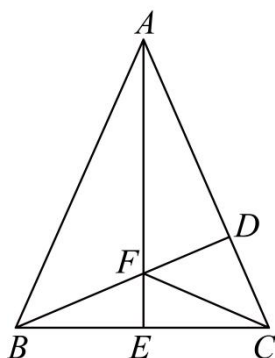
设 $\angle BAE = \angle CAE = x$, 则 $\angle DBC = \angle BAC = 2x$

$$\because AE \perp BC, BE = CE,$$

$$\therefore AE \text{ 垂直平分 } BC,$$

$$\begin{aligned}
&\therefore FB = FC, \\
&\therefore \angle DBC = \angle FCB = 2x, \\
&\therefore \angle DFC = \angle FBC + \angle FCB = 2x + 2x = 4x, \\
&\therefore DF = DC, \\
&\therefore \angle DFC = \angle DCF = 4x, \\
&\therefore \angle ACE = \angle DCF + \angle FCB = 4x + 2x = 6x, \\
&\therefore AE \perp BC, \\
&\therefore \angle CAE + \angle ACE + \angle AEC = 180^\circ, \\
&\therefore x + 6x + 90^\circ = 180^\circ, \\
&\text{解得: } x = \frac{90^\circ}{7}, \\
&\therefore \angle BAC = 2 \times \frac{90^\circ}{7} = \frac{180^\circ}{7};
\end{aligned}$$

②当 $\angle ABD = \angle BAC$ 时,



$$\begin{aligned}
&\therefore AE \text{ 平分 } \angle BAC, \\
&\therefore \angle BAE = \angle CAE, \\
&\text{设 } \angle BAE = \angle CAE = x, \text{ 则 } \angle ABD = \angle BAC = 2x, \\
&\therefore \angle FDC = \angle BAC + \angle ABD = 4x, \\
&\therefore AB = AC, \angle BAE = \angle CAE, AF = AF, \\
&\therefore \triangle ABF \cong \triangle ACF \text{ (SAS)}, \\
&\therefore \angle ACF = \angle ABD = 2x, \\
&\therefore DF = DC, \\
&\therefore \angle DFC = \angle DCF = 2x, \\
&\therefore \text{在 } \triangle DFC \text{ 中, } \angle FDC + \angle DFC + \angle DCF = 180^\circ, \\
&\therefore 4x + 2x + 2x = 180^\circ,
\end{aligned}$$

解得: $x = 22.5^\circ$,

$\therefore \angle BAC = 2 \times 22.5^\circ = 45^\circ$,

综上: $\angle BAC$ 的度数为 45° 或 $\frac{180^\circ}{7}$.