

2025-2026 学年七年级上学期期末模拟卷

数学·全解全析

(考试时间: 90 分钟 试卷满分: 100 分)

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。
4. 测试范围: 沪教版新教材七年级上册 (整式加减+整式乘除+因式分解+分式+图形的运动)

第一部分 (选择题 共 18 分)

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 满分 18 分。在每个小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求的)

1. 下列图形中是轴对称图形的是 ()



【答案】B

【详解】解: A、不是轴对称图形, 故本选项不符合题意;

B、是轴对称图形, 故本选项符合题意;

C、不是轴对称图形, 故本选项不符合题意;

D、不是轴对称图形, 故本选项不符合题意;

故选: B.

2. 不论 x 取何值, 下列分式总有意义的是 ()

A. $\frac{x-1}{x^2}$

B. $\frac{x}{x^2+1}$

C. $\frac{x}{x+3}$

D. $\frac{x^2}{(x+2)^2}$

【答案】B

【详解】解: 由分式有意义的条件是分母不为零,

A、分母 x^2 , 当 $x=0$ 时, $x^2=0$, 分式无意义, 不符合题意;

B、分母 $x^2 + 1 \geq 1$ ，始终不为零，分式总有意义，符合题意；

C、分母 $x + 3$ ，当 $x = -3$ 时， $x + 3 = 0$ ，分式无意义，不符合题意；

D、分母 $(x + 2)^2$ ，当 $x = -2$ 时， $(x + 2)^2 = 0$ ，分式无意义，不符合题意。

故选：B。

3. 下列运算正确的是 ()

A. $3a + 2b = 5ab$ B. $5x^2 - 3x^2 = 2$ C. $7a + a = 7a^2$ D. $3x^2y - 2yx^2 = x^2y$

【答案】D

【详解】解：A、 $3a + 2b \neq 5ab$ ，不符合题意；

B、 $5x^2 - 3x^2 = 2x^2 \neq 2$ ，不符合题意；

C、 $7a + a = 8a \neq 7a^2$ ，不符合题意；

D、 $3x^2y - 2yx^2 = x^2y$ ，符合题意；

故选：D

4. 已知 m 、 n 是正整数，下列等式中，表示“积的乘方的性质”的是 ()

A. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ B. $a^m \cdot b^n = (ab)^{m+n}$ C. $(ab)^m = a^m \cdot b^m$ D. $(a^m)^n = a^{mn}$

【答案】C

【详解】解：选项 A 表示同底数幂的乘法性质，故不符合题意；

选项 B 中 $a^m \cdot b^n = (ab)^{m+n}$ 是错误的等式，不符合题意；

选项 C 直接表示积的乘方的性质，符合题意；

选项 D 表示幂的乘方性质，不符合题意，

故答案为：C。

5. 下列各式中，从左到右的变形属于因式分解且正确的是 ()

A. $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$ B. $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$
C. $3x^2 + 6x = 3(x^2 + 2x)$ D. $x^2 + 1 = x\left(x + \frac{1}{x}\right)$

【答案】B

【详解】解：A： $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$ 是乘法运算，不是因式分解，不符合题意；

B： $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$ ，是因式分解，符合题意；

C： $3x^2 + 6x = 3(x^2 + 2x)$ ，虽恒等但 $x^2 + 2x$ 可进一步分解为 $x(x + 2)$ ，未彻底分解，不符合题意；

D: $x^2+1=x\left(x+\frac{1}{x}\right)$, 含分式 $\frac{1}{x}$, 不是整式乘积, 也不是因式分解, 不符合题意.

故选: B.

6. **【新考向】**已知关于 x 的整式 $x^2+mx+6=(x+a)(x+b)$, 其中 a, b 为整数, 能使这个因式分解过程成立的 m 的值共有 () 个.

A. 5

B. 4

C. 3

D. 2

【答案】 B

【详解】解: $x^2+mx+6=(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$,

则 $ab=6$, $a+b=m$,

由于 a, b 为整数,

则所有整数因子对 (a, b) 满足 $ab=6$ 有: $(1, 6)$ 、 $(2, 3)$ 、 $(3, 2)$ 、 $(6, 1)$ 、 $(-1, -6)$ 、 $(-2, -3)$ 、 $(-3, -2)$ 、 $(-6, -1)$,

当 $a=1$ 、 $b=6$, $m=a+b=1+6=7$,

当 $a=2$ 、 $b=3$, $a+b=2+3=5$,

当 $a=3$ 、 $b=2$, $a+b=3+2=5$,

当 $a=6$ 、 $b=1$, $a+b=6+1=7$,

当 $a=-1$ 、 $b=-6$, $a+b=-1+(-6)=-7$,

当 $a=-2$ 、 $b=-3$, $a+b=-2+(-3)=-5$,

当 $a=-3$ 、 $b=-2$, $a+b=-3+(-2)=-5$,

当 $a=-6$ 、 $b=-1$, $a+b=-6+(-1)=-7$,

则不同的 m 值为 5、7、-5、-7, 共 4 个,

故选: B.

第二部分 (非选择题 共 82 分)

二、填空题 (本大题共 12 小题, 每小题 2 分, 满分 24 分)

7. 若分式 $\frac{a+1}{2a-3}$ 有意义, 则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a \neq \frac{3}{2}$

【详解】解: 分式 $\frac{a+1}{2a-3}$ 有意义, 则分母 $2a-3 \neq 0$, 即 $2a \neq 3$, 解得 $a \neq \frac{3}{2}$;

故答案为: $a \neq \frac{3}{2}$.

8. 计算: $2ab^2 \cdot \left(-\frac{3}{4}a^2c\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-\frac{3}{2}a^3b^2c$

【详解】 计算过程如下:

系数相乘: $2 \times \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$

同底数幂相乘: $a \cdot a^2 = a^{1+2} = a^3$

b^2 和 c 保持不变

所以, $2ab^2 \cdot \left(-\frac{3}{4}a^2c\right) = -\frac{3}{2}a^3b^2c$

故答案为 $-\frac{3}{2}a^3b^2c$.

9. 因式分解: $x^3y - 2x^2y^2 + xy^3 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $xy(x-y)^2$

【详解】 解: 原式 $= xy(x^2 - 2xy + y^2) = xy(x-y)^2$.

故答案为: $xy(x-y)^2$

10. 计算: $\frac{a}{a^2-1} + \frac{1}{1-a^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{a+1}$

【详解】 解: 原式 $= \frac{a}{a^2-1} - \frac{1}{a^2-1} = \frac{a-1}{a^2-1} = \frac{a-1}{(a+1)(a-1)} = \frac{1}{a+1}$;

故答案为: $\frac{1}{a+1}$.

11. 已知整式 $x^2 - x + k$ 可以因式分解为 $(x+m)(x-5)$, 则 m 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 4

【详解】 展开 $(x+m)(x-5) = x^2 + (m-5)x - 5m$, 与原式 $x^2 - x + k$ 比较系数,
得 $m-5 = -1$, 解得 $m = 4$.

故答案为 4

12. 在“线段、平行四边形、圆、等边三角形”中, 是轴对称图形, 不是中心对称图形的 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 等边三角形

【详解】解：在“线段、平行四边形、圆、等边三角形”中，是轴对称图形，不是中心对称图形的等边三角形，故答案为：等边三角形.

13. 如果 $a^{10} \div (a^k)^4 = a^2$ ，且 $a \neq 0$ ， $a \neq \pm 1$ ，那么 $k =$ _____.

【答案】2

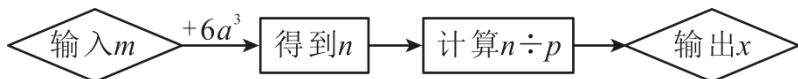
【详解】解： $a^{10} \div (a^k)^4 = a^{10} \div a^{4k} = a^{10-4k}$ ，

$$\therefore 10 - 4k = 2,$$

解得 $k = 2$.

故答案为：2.

14. 如图是一个运算程序，若输入的 m 为 $9a^2 - 3ab$ ，输出的 x 为 $-3a$ ，则 P 为_____.



【答案】 $-3a + b - 2a^2$

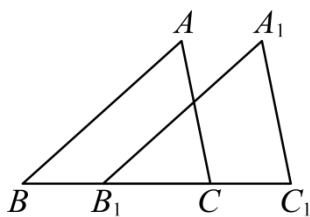
【详解】解：由题意得， $(9a^2 - 3ab + 6a^3) \div (-3a)$

$$= 9a^2 \div (-3a) - 3ab \div (-3a) + 6a^3 \div (-3a)$$

$$= -3a + b - 2a^2,$$

故答案为： $-3a + b - 2a^2$.

15. 如图，将三角形 ABC 沿射线 BC 的方向平移，得到三角形 $A_1B_1C_1$ ，如果平移的距离是 3，且 $BC_1 = 10$ ，那么 B_1C 的长为_____.



【答案】4

【详解】解： $\because$ 将三角形 ABC 沿射线 BC 的方向平移得到三角形 $A_1B_1C_1$ ，

$$\therefore BB_1 = CC_1 = 3,$$

$$\therefore BC_1 = 10,$$

$$\therefore B_1C = BC_1 - BB_1 - CC_1 = 10 - 3 - 3 = 4,$$

故答案为：4.

16. **新考向** 在对整式 $x^2 + px + q$ 进行因式分解时, 甲乙两位同学均出现了失误. 甲同学看错了一次项系数, 得到的分解结果为 $(x+2)(x-9)$, 乙同学看错了常数项, 得到的结果为 $(x+2)(x-5)$, 那么整式 $x^2 + px + q$ 正确的因式分解结果是_____.

【答案】 $(x-6)(x+3)$

【详解】解: $\because (x+2)(x-9) = x^2 - 7x - 18$, 甲看错一次项系数但常数项正确

$$\therefore q = -18,$$

$\because (x+2)(x-5) = x^2 - 3x - 10$, 乙看错常数项但一次项系数正确,

$$\therefore p = -3,$$

$\therefore$ 原整式为 $x^2 - 3x - 18$,

$$\therefore x^2 - 3x - 18 = (x-6)(x+3)$$

$\therefore$ 整式 $x^2 + px + q$, 即 $x^2 - 3x - 18$ 正确的因式分解结果是 $(x-6)(x+3)$,

故答案为: $(x-6)(x+3)$.

17. **新考向** 已知 x 为整数且满足代数式 $\frac{3x+8}{x+1} - \frac{x-1}{x} \div \frac{x^2-1}{x^2+2x}$ 的值为整数, 则 x 的所有取值为_____

【答案】 -5 或 -3 或 3

$$\text{【详解】原式} = \frac{3x+8}{x+1} - \frac{x-1}{x} \times \frac{x^2+2x}{x^2-1}$$

$$= \frac{3x+8}{x+1} - \frac{x-1}{x} \times \frac{x(x+2)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{3x+8}{x+1} - \frac{x+2}{x+1}$$

$$= \frac{2x+6}{x+1}$$

$$= \frac{2(x+3)}{x+1},$$

$$\text{设 } \frac{2(x+3)}{x+1} = k \quad (k \text{ 为整数}), \text{ 则 } 2(x+3) = k(x+1),$$

$$\text{整理得: } x(2-k) = k-6,$$

$$\therefore x = \frac{k-6}{2-k},$$

$$\text{令 } d = 2-k \quad (d \text{ 为整数且 } d \neq 0), \text{ 则 } x = -1 - \frac{4}{d},$$

由于 x 为整数, $\frac{4}{d}$ 需为整数, 故 d 为 4 的因数: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

代入求 x :

$d=1$ 时, $x=-5$;

$d=-1$ 时, $x=3$;

$d=2$ 时, $x=-3$;

$d=-2$ 时, $x=1$ (舍去, 因分母为零);

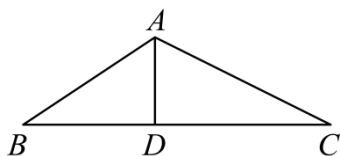
$d=4$ 时, $x=-2$ (舍去, 因分母为零);

$d=-4$ 时, $x=0$ (舍去, 因分母为零)

综上, x 的所有取值为: $-5, -3, 3$,

故答案为: $-5, -3, 3$.

18. **【新考向】**如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 BC 上, $AD \perp BC$, $AD=2$, $BD=3$, $CD=4$, 将 $\triangle ABC$ 绕着点 D 旋转, 使得点 A 的对应点 A' 落在边 BC 上, 点 B 、 C 的对应点分别是点 B' 、 C' , 则 $\triangle A'B'C$ 的面积等于 _____.

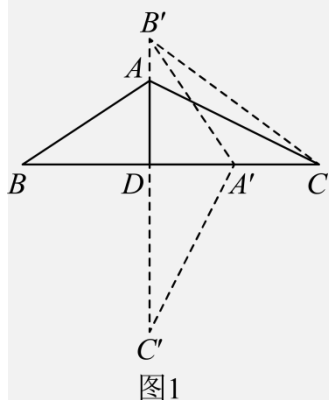


【答案】 3 或 9

【详解】解: $\because$ 点 D 在边 BC 上, $AD \perp BC$,

$\therefore \angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$,

如图 1, 点 A' 落在线段 CD 上,



由旋转得 $\angle A'DB' = \angle ADB = \angle B'DC = 90^\circ$, $B'D = BD = 3$,

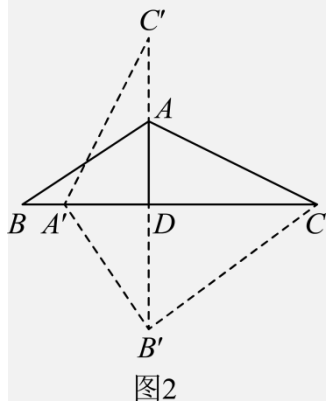
$\therefore B'D \perp A'C$,

$\because CD = 4$, $A'D = AD = 2$,

$$\therefore A'C = CD - A'D = 4 - 2 = 2,$$

$$\therefore S_{\triangle A'B'C} = \frac{1}{2} A'C \cdot B'D = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3;$$

如图 2，点 A' 落在线段 BD 上，



由旋转得 $\angle A'DB' = \angle ADB = 90^\circ$ ， $B'D = BD = 3$ ， $A'D = AD = 2$ ，

$$\therefore B'D \perp A'C,$$

$$\therefore A'C = CD + A'D = 4 + 2 = 6,$$

$$\therefore S_{\triangle A'B'C} = \frac{1}{2} A'C \cdot B'D = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9,$$

综上所述， $\triangle A'B'C$ 的面积等于 3 或 9，

故答案为：3 或 9.

三.解答题（本大题共 8 小题，58 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

19. (4 分) 因式分解： $x^2 + 4y^2 - 4xy - 1$

【详解】解： $x^2 + 4y^2 - 4xy - 1$

$$= (x - 2y)^2 - 1 \cdots \cdots (2 \text{ 分})$$

$$= (x - 2y - 1)(x - 2y + 1). \cdots \cdots (4 \text{ 分})$$

20. (4 分) 解方程： $\frac{4}{x^2 - 4} - \frac{x}{2 - x} = 1$

【详解】解：方程去分母，得 $4 + x(x + 2) = x^2 - 4$ ， $\cdots \cdots (1 \text{ 分})$

去括号，得 $4 + x^2 + 2x = x^2 - 4$ ， $\cdots \cdots (2 \text{ 分})$

解得 $x = -4$ ， $\cdots \cdots (3 \text{ 分})$

检验，当 $x = -4$ 时， $x^2 - 4 = 12 \neq 0$ ，

$\therefore x = -4$ 是原方程的解。 $\cdots \cdots (4 \text{ 分})$

21. (6分) 先化简, 再求值: $(2x-3y)(x+2y)+2(x+2y)(x-2y)-(2x-3y)^2$, 其中 $x=2$, $y=1$.

【详解】原式 $= (x+2y)(2x-3y+2x-4y) - (4x^2-12xy+9y^2) \cdots \cdots$ (2分)

$= 4x^2 + xy - 14y^2 - (4x^2 - 12xy + 9y^2) \cdots \cdots$ (3分)

$= 13xy - 23y^2 \cdots \cdots$ (4分)

当 $x=2$, $y=1$ 时

原式 $= 13 \times 2 \times 1 - 23 = 3 \cdots \cdots$ (6分)

22. (6分) 先化简, 再求值: $\frac{x^2+2x-8}{x^3+2x^2+x} \div \left(\frac{x-2}{x} \cdot \frac{x+4}{x+1} \right)$, 其中 $x = -\frac{2}{3}$.

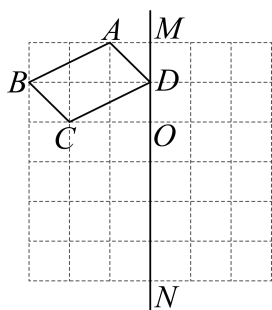
【详解】解: 原式 $= \frac{(x+4)(x-2)}{x(x+1)^2} \cdot \frac{x(x+1)}{(x-2)(x+4)}$,

$= \frac{1}{x+1}$, $\cdots \cdots$ (4分)

当 $x = -\frac{2}{3}$ 时,

原式 $= \frac{1}{-\frac{2}{3}+1} = 3 \cdots \cdots$ (6分)

23. (6分) 如图, 已知四边形 $ABCD$ 和直线 MN .

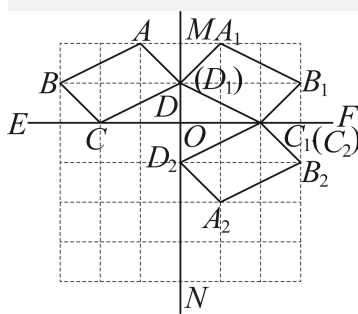


(1) 画出四边形 $A_1B_1C_1D_1$, 使四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 与四边形 $ABCD$ 关于直线 MN 成轴对称;

(2) 画出四边形 $A_2B_2C_2D_2$, 使四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 与四边形 $ABCD$ 关于点 O 成中心对称;

(3) 四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 与四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 是对称图形吗? 如果是, 请在图上画出对称轴或对称中心.

【详解】(1) 解: 如图, 四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 即为所求; $\cdots \cdots$ (2分)



(2) 解：四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 即为所求；…… (4 分)

(3) 解：四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 与四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 是轴对称图形，直线 EF 即为对称轴。…… (6 分)

24. **新考向** (8 分) 聪聪在长为 180 米的跑道上训练机器人.

(1) 若 A 机器人匀速行走 1 分钟后, 提速到原速的 1.5 倍后继续匀速行走, 结果比原计划提前 40 秒到达终点. 求 A 机器人走完全程所花的时间. (用一元分式方程求解)

(2) 若 B 机器人一半路程以 a 米/分的速度行驶, 另一半路程以 b 米/分的速度行驶; C 机器人用一半时间以 a 米/分的速度行驶, 另一半时间以 b 米/分的速度行驶. 已知 $a \neq b$, $a > 0$, $b > 0$, 试比较 B 、 C 两机器人行走的时间 t_1 , t_2 大小, 并说明理由.

【详解】(1) 解：设原行走的速度为 x 米/分,

根据题意得: $\frac{180-x}{x} = \frac{180-x}{1.5x} + \frac{40}{60},$

解得 $x = 60,$

经检验, $x = 60$ 为原方程的解,

$$\therefore 1 + \frac{180-x}{1.5x} = 1 + \frac{180-60}{1.5 \times 60} = \frac{7}{3},$$

$\therefore$ 机器人走完全程所花的时间 $\frac{7}{3}$ 分钟; …… (4 分)

(2) 解: B 机器人所需时间 $t_1 = \frac{90}{a} + \frac{90}{b} = \frac{90(a+b)}{ab},$

C 机器人所需时间 $t_2 = \frac{180}{\frac{a}{2} + \frac{b}{2}} = 180 \div \frac{a+b}{2} = 180 \times \frac{2}{a+b} = \frac{360}{a+b},$

$$\therefore t_1 - t_2 = \frac{90(a+b)}{ab} - \frac{360}{a+b} = \frac{90[(a+b)^2 - 4ab]}{ab(a+b)} = \frac{90(a-b)^2}{ab(a+b)},$$

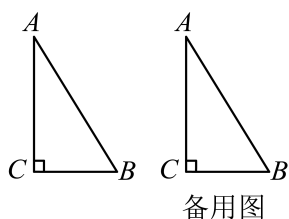
$$\because a \neq b, \quad a > 0, \quad b > 0,$$

$$\therefore (a-b)^2 > 0, \quad ab(a+b) > 0,$$

$$\therefore t_1 - t_2 > 0,$$

$$\therefore t_1 > t_2. \dots\dots (8 \text{ 分})$$

25. **【新考向】** (12 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC = a$, $AC = b$, ($b > a > 0$), 如果将 $\triangle ABC$ 绕点 B 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle A_1BC_1$, 将 $\triangle ABC$ 沿着射线 CB 方向平移得到 $\triangle A_2B_2C_2$.



(1) 画出 $\triangle A_1BC_1$.

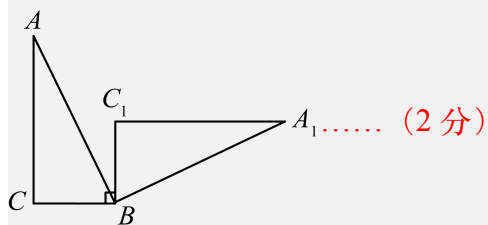
(2) 若平移的距离为 a .

① 求四边形 $A_1A_2C_2B_2$ 的面积 S_1 . (用 a, b 的代数式表示).

② 若四边形 $A_1A_2C_2B_2$ 的面积为 20, $\triangle ABC$ 的面积为 6, 求平移的距离.

(3) 若 $\triangle A_1A_2C_2$ 的面积和 $\triangle A_1C_2B_2$ 的面积相等, 直接写出平移的距离. (用 a, b 的代数式表示)

【详解】 (1) 解: 如图所示, $\triangle A_1BC_1$ 即为所求;



(2) 解: ① 由平移的性质可得 $B_2C_2 = a = BC$, $A_2C_2 = AC = b$, $\angle A_2B_2C_2 = \angle C = 90^\circ$,

$\therefore$ 点 C_2 与点 B 重合,

由旋转的性质可得 $BC_1 = BC = a$, $A_1C_1 = AC = b$, $\angle CBC_1 = \angle A_1C_1B = 90^\circ$,

$\therefore A_2, C_1, B$ 三点共线,

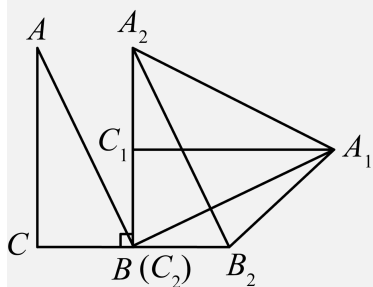
$$\therefore A_2C_1 = A_2B - BC_1 = b - a,$$

$$\therefore S_1 = S_{\triangle A_1C_1A_2} + S_{\text{四边形}A_1C_1BB_2}$$

$$= \frac{1}{2}b(b-a) + \frac{a+b}{2} \cdot a$$

$$= \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}ab$$

$$= \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2; \dots\dots (5 \text{ 分})$$



② $\because$ 四边形 $A_1A_2C_2B_2$ 的面积为 20, ABC 的面积为 6,

$$\therefore \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 = 20, \quad \frac{1}{2}ab = 6,$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 40, \quad ab = 12,$$

$$\therefore (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 64, \quad (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = 16,$$

$\therefore b > a > 0,$

$$\therefore \begin{cases} a+b=8 \\ b-a=4 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} a = 2 \\ b = 6 \end{cases},$$

$\therefore$ 平移距离为 2; $\cdots \cdots$ (8 分)

(3) 解: 由平移的性质可得 $B_2C_2 = BC = a$,

由旋转的性质可得 $BC_1 = BC = a$, $AC_1 = AC = b$, $\angle CBC_1 = \angle AC_1B = 90^\circ$,

$$\therefore A_1C_1 \parallel B_2C_2,$$

$$\therefore S_{\triangle A_1C_2B_2} = \frac{1}{2} B_2C_2 \cdot BC_1 = \frac{1}{2} a^2,$$

$\therefore \triangle A_1A_2C_2$ 的面积和 $\triangle A_1C_2B_2$ 的面积相等,

$$\therefore S_{\triangle A_1 A_2 C_2} = \frac{1}{2}a^2;$$

设 A_1 到 A_2C_2 的距离为 h ,

$$\therefore \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}a^2,$$

$$\therefore h = \frac{a^2}{b},$$

$\therefore$ 平移的距离为 $a+b-\frac{a^2}{b}$ 或 $a+b+\frac{a^2}{b}$. $\cdots\cdots$ (12 分)

26. **【新考向】** (12 分) 课本上在面对整式除法的时候告诉了我们长除法的方法, 根据因式分解的定义我们可以发现, 如果我们知道一个整式其中的一个因式, 那么通过长除法得到的余式一定是 0, 商式则是这个整式的另一个因式, 所以现在我们也可以利用长除法帮助我们一起分解因式. 下面请先阅读课本上的材料并解决下列问题.

整式除以整式——长除法

类比于两数相除可以用竖式运算, 整式除以整式也可以用竖式运算. 其步骤是:

- (1) 把被除式和除式按同一字母降幂排列 (若有缺项用零补齐);
- (2) 用竖式进行运算;
- (3) 当余式的次数低于除式的次数时, 运算终止, 得到商式和余式.

例如, 求 $(5x^4 + 3x^3 + 2x - 4) \div (x^2 + 1)$ 的商式和余式, 可以计算:

$$\begin{array}{r} \overline{) 5x^4+3x^3+0x^2+2x-4} \\ \underline{5x^4+0x^3+5x^2} \\ 3x^3-5x^2+2x \\ \underline{3x^3+0x^2+3x} \\ -5x^2-x-4 \\ \underline{-5x^2+0x-5} \\ -x+1 \end{array}$$

因此, 商式是 $5x^2 + 3x - 5$, 余式是 $-x + 1$.

(1) 小明在对 $2x^4 + 6x^3 + x^2 - 7x - 2$ 进行因式分解后检查答案, 答案中有一个因式 $(x \bullet 2)$ 中的符号被墨水遮挡看不清了, 请使用长除法来帮助小明判断这个因式是什么?

(2) 已知整式 $3x^5 + 9x^4 + 4x^3 - 9x^2 - 15x - 10$ 有一个因式是 $(x^2 + x + 1)$, 请试着运用长除法将整式 $3x^5 + 9x^4 + 4x^3 - 9x^2 - 15x - 10$ 进行因式分解.

(3) ① 已知 $2x^4 + 5x^3 - 5x - \star$ 有一个因式是 $(x - 1)$, 请问 $\star$ 处的数字应该是几?

(4) ② 已知整式 $5x^5 + 4x^4 - 3x^3 + px^2 + qx + m$ 有一个因式是 $(x + 1)$, 求 p , q , m 之间存在的关系.

【详解】 (1) 解: 若因式为 $(x + 2)$, 那么用长除法操作如下:

$$\begin{array}{r}
 2x^3+2x^2-3x-1 \\
 x+2 \overline{) 2x^4+6x^3+x^2-7x-2} \\
 \underline{2x^4+4x^3} \\
 2x^3+x^2 \\
 \underline{2x^3+4x^2} \\
 -3x^2-7x \\
 \underline{-3x^2-6x} \\
 -x-2 \\
 \underline{-x-2} \\
 0
 \end{array}$$

若因式为 $(x-2)$ ，用长除法操作如下：

$$\begin{array}{r}
 2x^3+10x^2+21x+35 \\
 x-2 \overline{) 2x^4+6x^3+x^2-7x-2} \\
 \underline{2x^4-4x^3} \\
 10x^3+x^2 \\
 \underline{10x^3-20x^2} \\
 21x^2-7x \\
 \underline{21x^2-42x} \\
 35x-2 \\
 \underline{35x-70} \\
 68
 \end{array}$$

故该因式为 $(x+2)$ ；……（3分）

（2）解：用长除法操作如下：

$$\begin{array}{r}
 3x^3+6x^2-5x-10 \\
 x^2+x+1 \overline{) 3x^5+9x^4+4x^3-9x^2-15x-10} \\
 \underline{3x^5+3x^4+3x^3} \\
 6x^4+x^3-9x^2 \\
 \underline{6x^4+6x^3+6x^2} \\
 -15x^3-15x^2-15x \\
 \underline{-5x^3-5x^2-5x} \\
 -10x^2-10x-10 \\
 \underline{-10x^2-10x-10} \\
 0
 \end{array}$$

故 $3x^5+9x^4+4x^3-9x^2-15x-10=(3x^3+6x^2-5x-10)(x^2+x+1)$ ；……（6分）

（3）解：用长除法操作如下：

$$\begin{array}{r}
 2x^3+7x^2+7x+2 \\
 x-1 \overline{) 2x^4+5x^3+0x^2-5x-\star} \\
 \underline{2x^4-2x^3} \\
 7x^3+0x^2 \\
 \underline{7x^3-7x^2} \\
 7x^2-5x \\
 \underline{7x^2-7x} \\
 2x-\star \\
 \underline{2x-2} \\
 -\star+2
 \end{array}$$

那么 $-\star + 2 = 0$,

$\therefore \star$ 为 2; (9 分)

(4) 解: 用长除法操作如下:

$$\begin{array}{r}
 5x^4-x^3-2x^2+(p+2)x+(q-p-2) \\
 x+1 \overline{) 5x^5+4x^4-3x^3+px^2+qx+m} \\
 \underline{5x^5+5x^4} \\
 -x^4-3x^3 \\
 \underline{-x^4-x^3} \\
 -2x^3+px^2 \\
 \underline{-2x^3-2x^2} \\
 (p+2)x^2+qx \\
 \underline{(p+2)x+(p+2)x} \\
 (q-p-2)x+m \\
 \underline{(q-p-2)x+(q-p-2)} \\
 m-(q-p-2)
 \end{array}$$

那么 $m - (q - p - 2) = 0$,

$\therefore q - p - 2 = m$ (12 分)