

2025-2026 学年七年级数学上学期期末模拟卷

强化卷·考试版

(考试时间: 100 分钟 试卷满分: 100 分)

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。
4. 测试范围: 沪教版 2024 五四制七年级上册。

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 3 分, 共 18 分. 下列各题四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题卡的相应位置上.)

1. 下列代数式中, 单项式有 () 个

$$a, \frac{1}{x}, \frac{-2xy}{\pi}, -0.1, \frac{x+y}{7}, 3x^2y-1$$

- A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 5 个

【答案】B

【分析】本题考查了单项式的判断, 多项式的判断, 解题关键是掌握上述知识点并能熟练运用求解.

根据单项式的定义 (由数字或字母的积组成, 或单独一个数字或字母, 分母中不含变量, 且无加减运算), 逐个判断各代数式.

【详解】解: $\because$ 单项式是数字或字母的积, 或单独的数字或字母, 分母中不含变量;

$\therefore a$ 是字母, 为单项式;

$\because \frac{1}{x}$ 分母中含变量, 不是单项式;

$\because \frac{-2xy}{\pi}$ 中 π 是常数, 是数字与字母的积, 为单项式;

$\because -0.1$ 是常数, 为单项式;

$\because \frac{x+y}{7}$ 含加法运算, 是多项式, 不是单项式;

$\because 3x^2y-1$ 含减法运算, 是二项式, 不是单项式.

$\therefore$ 单项式有 a 、 $\frac{-2xy}{\pi}$ 、 -0.1 , 共 3 个,

故选: B.

【点睛】掌握单项式的关键特征：无加减运算、分母无变量。常数和单独字母也是单项式。

2. 下列运算中，正确的是（ ）

A. $x^3 \cdot x^2 = x^4$

B. $(x+y)(x-y) = x^2 + y^2$

C. $x(x-2) = -2x + x^2$

D. $3x^3y^2 \div (xy^2) = 3x^4$

【答案】C

【分析】根据运算法则：同底数幂相乘，平方差公式，单项式乘以多项式，单项式除以单项式，分别对四个式子逐一计算，再作判断.

【详解】解： $x^3 \times x^2 = x^5$ ，故 A 错误；

$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ ，故 B 错误；

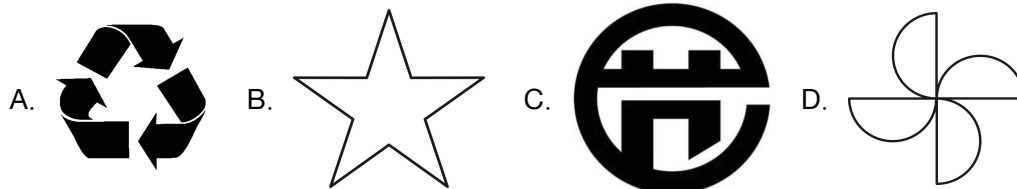
$x(x-2) = -2x + x^2$ ，故 C 正确；

$3x^3y^2 \div (xy^2) = 3x^2$ ，故 D 错误.

故选：C.

【点睛】本题考查了同底数幂相乘，计算单项式乘多项式及求值，计算单项式除以单项式，运用平方差公式进行运算等知识点，解题关键是掌握上述知识点并能运用求解.

3. 下列图形中是中心对称图形的是（ ）



【答案】D

【分析】本题考查了中心对称图形的概念，解题的关键是根据中心对称图形的定义（绕某点旋转 180° 后与原图形重合）逐一判断选项.

【详解】解：选项 A：不是中心对称图形；

选项 B：不是中心对称图形；

选项 C：不是中心对称图形；

选项 D：是中心对称图形.

故选：D.

4. 下列各项是最简分式的是（ ）

A. $\frac{4}{8a}$

B. $\frac{a^2b}{b}$

C. $\frac{y}{x-y}$

D. $\frac{a+b}{a^2-b^2}$

【答案】C

【分析】本题主要考查最简分式的定义，解题的关键是判断分子分母是否有公因式。

最简分式是指分子和分母没有公因式的分式，通过检查每个选项是否可约分，即可判断。

【详解】解：选项 A: $\frac{4}{8a}$ ，分子 4 和分母 $8a$ 有公因数 4，可约分为 $\frac{1}{2a}$ ，不是最简分式；

选项 B: $\frac{a^2b}{b}$ ，分子和分母有公因式 b ，可约分为 a^2 ，不是最简分式；

选项 C: $\frac{y}{x-y}$ ，分子 y 和分母 $x-y$ 没有公因式，是最简分式。

选项 D: $\frac{a+b}{a^2-b^2}$ ， $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ ，与分子有公因式 $a+b$ ，可约分为 $\frac{1}{a-b}$ ，不是最简分式；

故选：C。

5. 下列各式中，从左到右的变形属于因式分解且正确的是（ ）

A. $(x+2)(x-2)=x^2-4$

B. $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$

C. $3x^2+6x=3(x^2+2x)$

D. $x^2+1=x\left(x+\frac{1}{x}\right)$

【答案】B

【分析】本题考查因式分解的定义和正确性，掌握知识点是解题的关键。

因式分解是将多项式写成几个整式的乘积的形式，且变形必须恒等。选项 A 是展开而非分解；选项 B 分解正确；选项 C 未彻底分解；选项 D 含有分式，不是整式乘积。

【详解】解：A: $(x+2)(x-2)=x^2-4$ 是乘法运算，不是因式分解，不符合题意；

B: $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$ ，是因式分解，符合题意；

C: $3x^2+6x=3(x^2+2x)$ ，虽恒等但 x^2+2x 可进一步分解为 $x(x+2)$ ，未彻底分解，不符合题意；

D: $x^2+1=x\left(x+\frac{1}{x}\right)$ ，含分式 $\frac{1}{x}$ ，不是整式乘积，也不是因式分解，不符合题意。

故选：B。

6. 关于 x 的分式方程 $\frac{2}{x-2}+\frac{mx}{x^2-4}=\frac{3}{x+2}$ 会产生增根，则 m 的值为（ ）

A. -4

B. 6 或 -4

C. -6 或 4

D. 6

【答案】B

【分析】 本题主要考查分式方程的解法，熟练掌握分式方程的解法是解题的关键；分式方程产生增根时，增根为使分母为零的值，即 $x=2$ 或 $x=-2$ ，代入去分母后的整式方程求解 m 即可.

【详解】 解： 方程两边同乘公分母 $(x+2)(x-2)$ ，得：

$$2(x+2)+mx=3(x-2),$$

化简得： $(m-1)x+10=0$ ，

$\therefore$ 增根为 $x=2$ 或 $x=-2$ ，

当 $x=2$ 时，代入得： $2(m-1)+10=0$ ，解得 $m=-4$ ；

当 $x=-2$ 时，代入得： $-2(m-1)+10=0$ ，解得 $m=6$ ；

$\therefore m$ 的值为 6 或 -4 ；

故选 B.

二、填空题：(本大题共 12 题，每题 2 分，共 24 分.)

7. 要使分式 $\frac{2-x}{x-1}$ 有意义，则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \neq 1$

【分析】 本题主要考查了分式有意义的条件. 分式有意义的条件是分母不等于零据此解答即可.

【详解】 解： 分式 $\frac{2-x}{x-1}$ 有意义，

$$\therefore x-1 \neq 0,$$

解得： $x \neq 1$.

故答案为 $x \neq 1$.

8. 计算： $(2a-b)(3a+2b)=$ _____.

【答案】 $6a^2+ab-2b^2$

【分析】 本题考查多项式乘法的运算，根据分配律展开两个二项式的乘积，并合并同类项即可.

【详解】 解： 原式 $=2a \times 3a + 2a \times 2b + (-b) \times 3a + (-b) \times 2b$

$$=6a^2+4ab-3ab-2b^2$$

$$=6a^2+ab-2b^2.$$

故答案为： $6a^2+ab-2b^2$.

9. 多项式 $\frac{2x^2-3xy+5y^2-6y^3}{3}$ 中, 其中三次项的系数是_____.

【答案】 -2

【分析】 本题主要考查了多项式次数和系数的定义, 将多项式除以 3, 得到各项的系数, 再识别次数为 3 的项, 其系数即为所求.

【详解】 解: $\frac{2x^2-3xy+5y^2-6y^3}{3} = \frac{2}{3}x^2 - xy + \frac{5}{3}y^2 - 2y^3$, 故原多项式的次数为 3 的项是 $-2y^3$, 即三次项的系数是 -2.

故答案为: -2.

10. 因式分解: $x^2-5x-6=$ _____.

【答案】 $(x+1)(x-6)$

【分析】 本题考查了因式分解, 根据十字相乘法进行因式分解即可.

【详解】 解: $x^2-5x-6=(x+1)(x-6)$,

故答案为: $(x+1)(x-6)$.

11. 将整式 $2m^2n-mn^2+6n-m^3$ 按字母 m 降幂排列为_____.

【答案】 $-m^3+2m^2n-mn^2+6n$

【分析】 本题考查了多项式的降幂排序, 解题关键是熟知降幂排序的定义.

按照字母 m 的指数从高到低重新排列多项式即可解答.

【详解】 原多项式为 $2m^2n-mn^2+6n-m^3$. 各项中 m 的指数分别为: $-m^3$ 中 m 的指数是 3, $2m^2n$ 中 m 的指数是 2, $-mn^2$ 中 m 的指数是 1, $6n$ 中 m 的指数是 0. 按 m 的指数降幂排列, 顺序为指数 3、2、1、0, 因此排列为 $-m^3+2m^2n-mn^2+6n$.

故答案为: $-m^3+2m^2n-mn^2+6n$.

12. 若单项式 $3x^{2m}y^m$ 与 $x^{4-n}y^1$ 的和仍是单项式则 $m+n=$ _____.

【答案】 3

【分析】 本题考查了同类项: 字母相同, 且相同字母的指数分别相同的几个单项式, 理解同类项的概念是解题的关键; 根据两个单项式的和仍是单项式, 可知它们是同类项, 从而根据指数相同列出方程求解.

【详解】 解: $\because$ 单项式 $3x^{2m}y^m$ 与 $x^{4-n}y^1$ 的和是单项式,

$\therefore$ 它们为同类项,

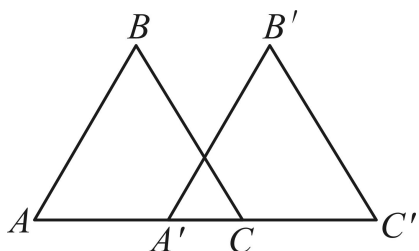
$\therefore 2m=4-n$ 且 $m=1$,

解得 $m=1$, $n=2$,

$$\therefore m+n=1+2=3.$$

故答案为：3.

13. 如图， $\triangle A'B'C'$ 是由 $\triangle ABC$ 沿射线 AC 方向平移 20cm 得到，若 $AC=30\text{cm}$ ，则 $A'C=$ _____ cm.



【答案】10

【分析】本题考查平移的基本性质：①平移不改变图形的形状和大小；②经过平移，对应点所连的线段平行且相等，对应线段平行且相等，对应角相等. 根据平移的性质可得 $AA'=20\text{cm}$ ，再根据 $A'C=AC-AA'$ 代入数据计算即可得解.

【详解】解： $\because \triangle A'B'C'$ 是由 $\triangle ABC$ 沿射线 AC 方向平移 20cm 得到，

$$\therefore AA'=20\text{cm},$$

$$\therefore A'C=AC-AA'=30-20=10(\text{cm}).$$

故答案为：10.

14. 将 $2a^2(a-b)^{-1}$ 写成只含有正整数指数幂的形式，其结果为_____.

【答案】 $\frac{2a^2}{a-b}$

【分析】根据负整数指数幂的性质变形即可.

【详解】解： $2a^2(a-b)^{-1}$

$$=2a^2 \cdot \frac{1}{a-b}$$

$$=\frac{2a^2}{a-b}$$

故答案为： $\frac{2a^2}{a-b}$.

【点睛】此题考查的是负整数指数幂化正整数指数幂，掌握负整数指数幂的性质是解题关键.

15. 如图，紫荆花绕着它的中心最少旋转 _____ 度就可以与它自身重合.



【答案】 72°

【分析】该图形被平分成五部分，因而每部分被分成的圆心角是 72° ，并且圆具有旋转不变性，因而旋转 72° 的整数倍，就可以与自身重合。

【详解】该图形围绕自己的旋转中心，最少顺时针旋转 72° 后，能与其自身重合。

【点睛】本题考查旋转对称图形的概念：把一个图形绕着一个定点旋转一个角度后，与初始图形重合，这种图形叫做旋转对称图形，这个定点叫做旋转对称中心，旋转的角度叫做旋转角。

16. 若 $x^2 + (k-1)x + \frac{9}{16}$ 是一个完全平方式，则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $\frac{5}{2}$ 或者 $-\frac{1}{2}$

【分析】此题考查了完全平方式，熟练掌握完全平方公式是解本题的关键。

根据完全平方式的结构，常数项 $\frac{9}{16}$ 可表示为 $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ ，因此中间项系数应与 $\pm 2 \times \frac{3}{4}$ 相等，从而求解 k 。

【详解】 $\because x^2 + (k-1)x + \frac{9}{16} = \left(x \pm \frac{3}{4}\right)^2 = x^2 \pm \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}$

$$\therefore k-1 = \pm \frac{3}{2}$$

$$\text{解得 } k = \frac{5}{2} \text{ 或 } k = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{5}{2} \text{ 或 } -\frac{1}{2}.$$

17. 若 $2x - xy - 3y = 0$ ，则 $\frac{4x+3xy-6y}{3y-xy-2x} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $-\frac{5}{2}$

【分析】由已知等式得到 $xy = 2x - 3y$ ，再将 $\frac{4x+3xy-6y}{3y-xy-2x}$ 化为 $\frac{2(2x-3y)+3xy}{-(2x-3y)-xy}$ ，代入计算即可。

【详解】解： $\because 2x - xy - 3y = 0$,

$$\therefore xy = 2x - 3y,$$

$$\therefore \frac{4x+3xy-6y}{3y-xy-2x}$$

$$= \frac{4x-6y+3xy}{-2x+3y-xy}$$

$$= \frac{2(2x-3y)+3xy}{-(2x-3y)-xy}$$

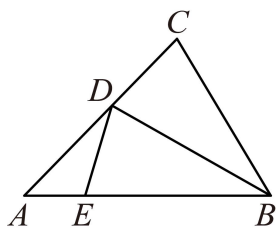
$$= \frac{2xy + 3xy}{-xy - xy}$$

$$= -\frac{5}{2}$$

故答案为: $-\frac{5}{2}$.

【点睛】本题考查了分式的化简求值，解题的关键是将所求代数式合理变形为含有已知等式中相同的部分.

18. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 10$ ， $BC = 8$ ， $AC = 9$ ，如果将 $\triangle BCD$ 沿 BD 翻折与 $\triangle BED$ 重合，点 C 的对应点 E 落在边 AB 上，那么 $\triangle AED$ 的周长是_____.



【答案】11

【分析】由翻折的性质可知： $DC = DE$ ， $BC = EB$ ，于是可得到 $AD + DE = 9$ ， $AE = 2$ ，即可得出结果.

【详解】由翻折的性质可知： $DC = DE$ ， $BC = EB = 8$ ，

$$\therefore AD + DE = AD + DC = AC = 9, \quad AE = AB - BE = AB - CB = 10 - 8 = 2,$$

$$\therefore \triangle ADE \text{ 的周长} = 9 + 2 = 11,$$

故答案为：11.

【点睛】本题考查了翻折的性质，熟练掌握折叠的性质是解题的关键

三、解答题：(本大题共 11 题，共 58 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.)

19. 计算

$$(1) a \cdot a^7 - (-3a^4)^2 + a^{10} \div a^2.$$

$$(2) -3x^2(2x - 4y) + 2x(x^2 - xy).$$

【答案】(1) $-7a^8$

$$(2) -4x^3 + 10x^2y$$

【分析】本题考查了整式的乘除运算.

(1) 分别计算同底数幂的乘法、积的乘方和同底数幂的除法，再合并即可求解；

(2) 先计算单项式乘多项式，再合并同类项即可.

【详解】(1) 解: $a \cdot a^7 - (-3a^4)^2 + a^{10} \div a^2$

$$= a^8 - 9a^8 + a^8$$

$$= -7a^8;$$

(2) 解: $-3x^2(2x-4y) + 2x(x^2-xy)$

$$= -6x^3 + 12x^2y + 2x^3 - 2x^2y$$

$$= -4x^3 + 10x^2y.$$

$$20. (x+3y)^2 + 2(x-y)(x+y) + (x-3y)^2$$

【答案】 $4x^2 + 16y^2$

【分析】 本题考查了多项式的乘法，完全平方公式与平方差公式，根据公式展开即可求解.

【详解】 解: $(x+3y)^2 + 2(x-y)(x+y) + (x-3y)^2$

$$= x^2 + 6xy + 9y^2 + 2(x^2 - y^2) + x^2 - 6xy + 9y^2$$

$$= x^2 + 6xy + 9y^2 + 2x^2 - 2y^2 + x^2 - 6xy + 9y^2$$

$$= 4x^2 + 16y^2$$

21. 因式分解:

$$(1) a + b - ab - 1;$$

$$(2) (x^2 - 2x)^2 - 5(x^2 - 2x) - 6.$$

【答案】 (1) $(a-1)(1-b)$

$$(2) (x^2 - 2x - 6)(x-1)^2$$

【分析】 本题考查了因式分解：十字相乘法、分组分解法，熟练掌握因式分解的方法是解题的关键.

(1) 先分组为 $(a-ab) + (b-1)$ ，再变形，然后利用提公因式法分解因式即可；

(2) 先根据十字相乘法分解因式，再根据完全平方公式分解因式即可.

【详解】 (1) 解: $a + b - ab - 1$

$$= (a-ab) + (b-1)$$

$$= a(1-b) - (1-b)$$

$$=(a-1)(1-b);$$

(2) 解: 原式 $= (x^2 - 2x - 6)(x^2 - 2x + 1)$

$$= (x^2 - 2x - 6)(x - 1)^2.$$

22. 解方程:

$$(1) \frac{2x}{x-2} - \frac{2}{2-x} = 1;$$

$$(2) \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}.$$

【答案】(1) $x = -4$

(2) 方程无解

【分析】 本题主要考查了解分式方程，平方差公式分解因式等知识点，熟练掌握分式方程的解法并牢记最终检验是解题的关键.

(1) 首先去分母，方程两边同乘 $(x-2)$ ，可得 $2x+2=x-2$ ，然后解方程即可，最后一定要检验；

(2) 首先去分母，方程两边同乘 $(x+1)(x-1)$ ，可得 $x+1+x-1=2$ ，然后解得 $x=1$ ，经检验 $x=1$ 不是原分式方程的解，因而原方程无解.

【详解】(1) 解: $\frac{2x}{x-2} - \frac{2}{2-x} = 1,$

去分母，两边同乘 $(x-2)$ ，得: $2x+2=x-2,$

解得: $x=-4,$

经检验, $x=-4$ 是原分式方程的解,

$$\therefore x = -4;$$

(2) 解: $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1},$

即: $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{(x+1)(x-1)},$

去分母，两边同乘 $(x+1)(x-1)$ ，得: $x+1+x-1=2,$

解得: $x=1,$

检验: 把 $x=1$ 代入 $(x+1)(x-1)$ ，得: $(x+1)(x-1)=0,$

$\therefore x=1$ 不是原分式方程的解,

$\therefore$ 原方程无解.

23. 计算: $(x^{-1} - y^{-1}) \div (x^{-2} - y^{-2})$ (结果用不含负整数指数幂的形式表示).

【答案】 $\frac{xy}{x+y}$

【分析】 此题考查了分式的混合运算和负整数指数幂. 先将负整数指数化为正整数指数, 即分式形式, 再通分相除, 利用平方差公式分解, 约分后可得到结果.

【详解】

解: $(x^{-1} - y^{-1}) \div (x^{-2} - y^{-2})$.

$$= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) \div \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right).$$

$$= \frac{y-x}{xy} \div \frac{y^2-x^2}{x^2y^2}.$$

$$= \frac{y-x}{xy} \cdot \frac{x^2y^2}{(y+x)(y-x)}.$$

$$= \frac{xy}{x+y}.$$

24. 先化简再求值: $\left(\frac{2x-1}{x+1} - x + 1 \right) \div \frac{x-2}{x^2+2x+1}$, 其中 $x = \frac{1}{3}$.

【答案】 $-x(x+1)$, $-\frac{4}{9}$

【分析】 本题考查了分式的化简求值, 先计算括号里面的加减, 再计算括号外面的除法, 即可化简, 再代入 $x = \frac{1}{3}$ 进行计算即可, 熟练掌握分式的混合运算是解此题的关键.

【详解】解: $\left(\frac{2x-1}{x+1} - x + 1 \right) \div \frac{x-2}{x^2+2x+1}$

$$= \frac{2x-1-x(x+1)+x+1}{x+1} \cdot \frac{(x+1)^2}{x-2}$$

$$= \frac{-x^2+2x}{x+1} \cdot \frac{(x+1)^2}{x-2}$$

$$= \frac{-x(x-2)}{x+1} \cdot \frac{(x+1)^2}{x-2}$$

$$= -x(x+1),$$

当 $x = \frac{1}{3}$ 时, 原式 $= -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3} + 1 \right) = -\frac{4}{9}$.

25. 某区为治理污水, 需要铺设一段全长为 300 米的污水排放管道. 铺设 120 米后, 为了尽量减少施工对城市交通所造成的影响, 以后每天铺设管道的长度比原计划增加 20%, 结果共用 30 天完成这一任务. 求原

计划每天铺设管道的长度.

【答案】原计划每天铺设管道 9 米.

【分析】本题考查了分式方程的应用, 此题涉及的公式: 工作时间=工作量 $\div$ 工作效率, 解答本题的关键是读懂题意, 找出合适的等量关系, 列方程求解. 设原计划每天铺设管道的长度为 x m, 则增加后每天的工作效率为 $(1+20\%)x$, 找出等量关系: 铺设 120m 的时间+铺设 $(300-120)m$ 的时间=30 天, 列方程求解即可.

【详解】解: 原计划每天铺设管道 x 米;

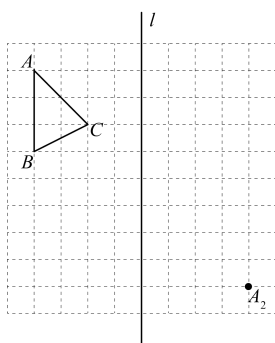
列方程: $\frac{120}{x} + \frac{300-120}{(1+20\%)x} = 30$,

解得 $x=9$,

经检验 $x=9$ 是原方程的解且符合题意;

答: 原计划每天铺设管道 9 米.

26. 在如图所示的方格中, 每个小方格都是边长为 1 个单位的正方形, ABC 的三个顶点都在格点上 (每个小方格的顶点叫格点)



(1)画出 ABC 向右平移 2 个单位, 再向下平移 4 个单位后的 $\triangle A_1B_1C_1$;

(2)如果点 A 与点 A_2 关于某点成中心对称, 请标出这个对称中心点 O , 并画出 ABC 关于点 O 成中心对称的 $\triangle A_2B_2C_2$;

(3)画出 ABC 关于直线 l 成轴对称的图形 $\triangle A_3B_3C_3$.

【答案】(1)见解析

(2)见解析

(3)见解析

【分析】本题主要考查了画平移图形, 画中心对称图形和画轴对称图形:

(1) 根据平移方式确定 A 、 B 、 C 对应点 A_1 、 B_1 、 C_1 的位置, 描出 A_1 、 B_1 、 C_1 , 再顺次连接 A_1 、 B_1 、 C_1 即可;

(2) 由中心对称图形的性质可得 O 是 AA_2 的中点, 据此确定点 O 的位置, 再连接 CO 并延长到 C_2 使得

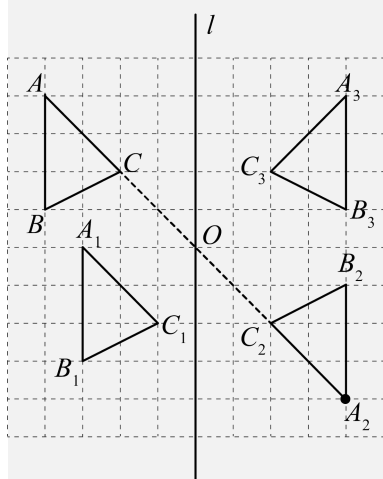
$C_2O=CO$ ，同理作出 B_2 ，再顺次连接 A_2 、 B_2 、 C_2 ；

(3) 根据轴对称图形的特点，找到 A 、 B 、 C 对应点 A_3 、 B_3 、 C_3 的位置，描出 A_3 、 B_3 、 C_3 并顺次连接 A_3 、 B_3 、 C_3 即可。

【详解】(1) 解：如图所示， $\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求；

(2) 解：如图所示，点 O 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 即为所求；

(3) 解：如图所示， $\triangle A_3B_3C_3$ 即为所求。



27. 某数学兴趣小组在学习了“平方差公式”后，构造了如图 9 的四种图形，想用“等面积法”来验证“平方差公式”：

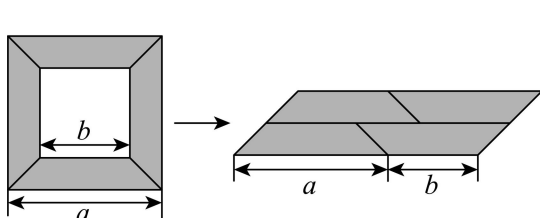


图1

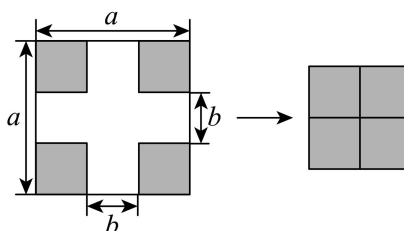


图2

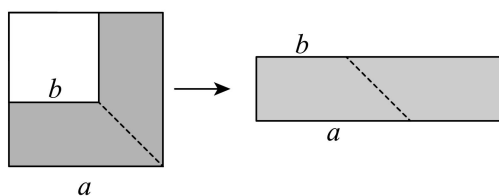


图3

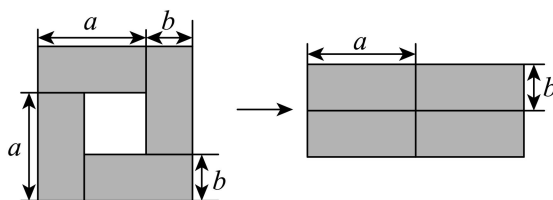


图4

(1) 【探究】以上四种方法中能够验证“平方差公式”的有_____；(填序号)

(2) 【应用】利用“平方差公式”计算： $2026^2 - 2022 \times 2030$

(3) 【拓展】计算： $\left(1 + \frac{1}{2}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2^4}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2^8}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2^{32}}\right)$

【答案】(1)①③

(2)16

(3) $2 - \frac{1}{2^{63}}$

【分析】本题考查平方差公式与几何图形的面积，利用平方差公式进行简算，熟练掌握平方差公式，是解题的关键：

(1) 用两种方法表示出阴影部分的面积，进行判断即可；

(2) 利用平方差公式进行简算即可；

(3) 先求出 $\left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2^4}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2^8}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2^{32}}\right)$ 的值，再用原式除以 $\left(1 - \frac{1}{2}\right)$ ，进行计算即可。

【详解】(1) 解：图①中，左图阴影部分可以看作两个正方形的面积差，即 $(a^2 - b^2)$ ，拼成的右图是底为 $(a + b)$ ，高为 $(a - b)$ 的平行四边形，面积为 $(a + b)(a - b)$ ，

$\therefore (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ ，故图①可以验证平方差公式；

图②中，左图阴影部分的面积 $4 \cdot \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = (a - b)^2$ ，右图阴影部分的面积可以表示为 $(a - b)^2$ ，故图②不能验证平方差公式；

图③中，左图阴影部分可以看作两个正方形的面积差，即 $(a^2 - b^2)$ ，拼成的右图是底为 $(a + b)$ ，高为 $(a - b)$ 的平行四边形，面积为 $(a + b)(a - b)$ ，

$\therefore (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ ，故图③可以验证平方差公式；

图④中，左图阴影部分的可以看作两个正方形的面积差，即 $(a + b)^2 - (a - b)^2$ ，拼成的右图是长为 $2a$ ，宽为 $2b$ 的长方形，面积为 $4ab$ ，

$\therefore (a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$ ，故图④不能验证平方差公式；

故答案为：①③

(2) 解： $2026^2 - 2022 \times 2030$

$$= 2026^2 - (2026 - 4)(2026 + 4)$$

$$= 2026^2 - (2026^2 - 4^2)$$

$$= 2026^2 - 2026^2 + 4^2 = 16;$$

$$\begin{aligned}
 & \text{(3) 解: } \because \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2^4}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2^8}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2^{32}}\right) \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2^4}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2^8}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2^{32}}\right) \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2^4}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2^4}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2^8}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2^{32}}\right) \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2^8}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2^8}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2^{32}}\right) \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2^{16}}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2^{32}}\right) \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2^{32}}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2^{32}}\right) = 1 - \frac{1}{2^{64}} \\
 &\therefore \text{原式} = \left(1 - \frac{1}{2^{64}}\right) \div \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^{64}}\right) \times 2 = 2 - \frac{1}{2^{63}}.
 \end{aligned}$$

28. 定义: 如果一个分式能化成一个整式与一个分子为常数的分式的和的形式, 则称这个分式为“和谐分式”

$$\text{如 } \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1},$$

$$\frac{a^2-2a+3}{a-1} = \frac{(a-1)^2+2}{a-1} = a-1 + \frac{2}{a-1},$$

则 $\frac{x+1}{x-1}$ 和 $\frac{a^2-2a+3}{a-1}$ 都是“和谐分式”.

(1) 下列分式中, 属于“和谐分式”的是: _____ (填序号);

$$\textcircled{1} \frac{x+1}{x}; \textcircled{2} \frac{x+2}{2}; \textcircled{3} \frac{x+2}{x+1}; \textcircled{4} \frac{y^2+1}{y^2}.$$

(2) 将“和谐分式” $\frac{x^2-2x-3}{x-1}$ 化成一个整式与一个分子为常数的分式的和的形式: $\frac{x^2-2x-3}{x-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(3) 当 x 取什么整数时, “和谐分式” $\frac{x^2-2x-3}{x-1}$ 的值为整数.

【答案】 (1) ①③④

$$(2) x-1 - \frac{4}{x-1}$$

(3) $x=0$ 或 $x=2$ 或 $x=-1$ 或 $x=3$ 或 $x=-3$ 或 $x=5$

【分析】 此题考查分式的变形计算, 同分母分式加法逆运算,

(1) 根据同分母分式加法将各分式变形, 即可判断;

(2) 根据同分母分式加法将各分式变形;

(3) 根据 (2) 所求可得当 x 为整数时, $\frac{4}{x-1}$ 的值为整数, 据此讨论求解即可.

【详解】(1) 解: ① $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{x} + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$, ② $\frac{x+2}{2} = \frac{x}{2} + 1$; ③ $\frac{x+2}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} + \frac{1}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$, ④ $\frac{y^2+1}{y^2} = 1 + \frac{1}{y^2}$,

$\therefore$ ①③④的分式是“和谐分式”,

故答案为: ①③④;

(2) 解: $\frac{x^2-2x-3}{x-1}$

$$= \frac{x^2-2x+1-4}{x-1}$$

$$= \frac{(x-1)^2-4}{x-1}$$

$$= x-1 - \frac{4}{x-1},$$

故答案为: $x-1 - \frac{4}{x-1}$;

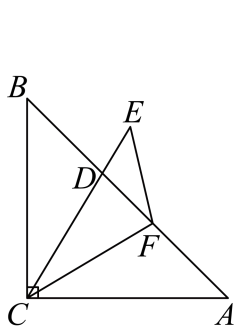
(3) 解: $\because \frac{x^2-2x-3}{x-1} = x-1 - \frac{4}{x-1}$ 的值为整数,

$\therefore$ 当 x 为整数时, $\frac{4}{x-1}$ 的值为整数

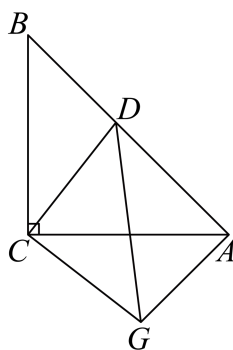
$\therefore$ 当 $x-1 = \pm 1$ 或 $x-1 = \pm 2$ 或 $x-1 = \pm 4$ 时, 分式的值为整数,

$\therefore x = 0$ 或 $x = 2$ 或 $x = -1$ 或 $x = 3$ 或 $x = -3$ 或 $x = 5$.

29. 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, $AB = 8$, $\angle ABC = \angle BAC = 45^\circ$, 点 D 在边 AB 上, $BD = a$.



图①



图②

(1) 如图①, $\triangle CBD$ 绕着点 C 顺时针方向旋转, 点 B 的对应点 E 落在射线 CD 上, 点 D 的对应点 F 落在边 AB 上, 而点 E 关于直线 CF 的对称点恰好是点 A , 那么 DF 的长度为_____ (结果用含 a 的代数式表示); 旋转角的度数为_____;

(2) 如图②, $\triangle CBD$ 绕着点 C 顺时针方向旋转 90° 后得到 $\triangle CAG$, 点 B 和点 D 的对应点分别是点 A 和点 G . 连接 DG , 用含 a 的代数式表示 $S_{\triangle ADG}$.

【答案】(1) $8-2a$, 30° ;

$$(2) -\frac{1}{2}a^2 + 4a$$

【分析】 本题考查的是轴对称的性质，旋转的性质，整式的乘法运算；

(1) 根据旋转与轴对称的性质先判断 $\angle BCE = \angle ECF = \angle ACF = 30^\circ$ ，可得旋转角，再证明 ABC 是轴对称图形， CDF 是轴对称图形，进一步可得 DF 的长度；

(2) 由旋转可得： $CD = CG$ ， $\angle DCG = \angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle B = \angle CAG = 45^\circ$ ， $BD = AG = a$ ，证明 $\angle BAG = 90^\circ$ ，求解 $AD = 8 - a$ ，再进一步求解三角形的面积即可。

【详解】 (1) 解： $\because \triangle CBD$ 绕着点 C 顺时针方向旋转，点 B 的对应点 E 落在射线 CD 上，点 D 的对应点 F 落在边 AB 上，而点 E 关于直线 CF 的对称点恰好是点 A ，

$$\therefore \angle BCE = \angle ECF = \angle ACF,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCE = \angle ECF = \angle ACF = 30^\circ,$$

$$\therefore \text{旋转角是 } 30^\circ,$$

$$\because AC = BC, \angle ABC = \angle CAB = 45^\circ,$$

$$\therefore ABC \text{ 是轴对称图形},$$

$$\text{由旋转可得: } CD = CF,$$

$$\therefore CDF \text{ 是轴对称图形},$$

$$\therefore BD = AF = a,$$

$$\because AB = 8,$$

$$\therefore DF = 8 - 2a;$$

(2) 解： 由旋转可得：

$$CD = CG, \angle DCG = \angle ACB = 90^\circ, \angle B = \angle CAG = 45^\circ, BD = AG = a,$$

$$\because \angle CAB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BAG = 90^\circ,$$

$$\because AB = 8,$$

$$\therefore AD = 8 - a,$$

$$\therefore S_{\triangle ADG} = \frac{1}{2}a(8 - a) = -\frac{1}{2}a^2 + 4a.$$