

2025-2026 学年七年级数学上学期期末模拟卷

(考试时间: 90 分钟 试卷满分: 100 分)

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。
4. 测试范围: 沪教版(五四制)(2024)第 10 章整式的加减、第 11 章整式的乘除、第 12 章因式分解、第 13 章分式、第 14 章图形的运动。

第一部分 (选择题 共 18 分)

一、单选题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 满分 18 分。在每个小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求的)

1. 下列各组单项式是同类项的是 ()

A. $3x$ 和 $3xy$

B. $5a^3b^2c$ 和 $-5c^3b^2a$

C. $0.2m^2n$ 和 $0.2n-m$

D. $-7u^3v$ 和 $\frac{1}{2}vu^3$

【答案】D

【分析】本题考查了同类项, 解题的关键是熟练掌握同类项的定义。

根据同类项的定义求解即可, 所含字母相同, 并且相同字母的指数也相同, 这样的项叫做同类项, 据此判断即可。

【详解】解: A: $3x$ 和 $3xy$ 的字母不同 (前者只有 x , 后者有 x 和 y),

$\therefore$ 不是同类项, 不符合题意;

B: $5a^3b^2c$ 和 $-5c^3b^2a$ 的字母相同 (a 、 b 、 c), 但相同字母指数不同 (a 指数 $3 \neq 1$, c 指数 $1 \neq 3$),

$\therefore$ 不是同类项, 不符合题意;

C: $0.2m^2n$ 是单项式, 但 $0.2n-m$ 是多项式, 不是单项式,

$\therefore$ 不能是同类项, 不符合题意;

D: $-7u^3v$ 和 $\frac{1}{2}vu^3$ 的字母相同 (u 和 v), 且相同字母指数相同 (u 指数均为 3, v 指数均为 1),

$\therefore$ 是同类项, 符合题意。

故选：D.

2. 下列各式中能用平方差公式计算的是 ()

A. $(2-3x)(3x-2)$

B. $(m+3n)(3n-m)$

C. $(3a+2b)(3b-2a)$

D. $(4x-y)(-4x+y)$

【答案】B

【分析】本题考查了平方差公式，即 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ，平方差公式适用于两个二项式相乘，其中一项相同，另一项互为相反数。据此逐项判断即可。

【详解】解：A. $(2-3x)(3x-2) = -(2-3x)^2$ ，不符合题意；

B. $(m+3n)(3n-m) = (3n+m)(3n-m) = (3n)^2 - m^2$ ，符合题意；

C. $(3a+2b)(3b-2a)$ ，无相同项，不符合题意；

D. $(4x-y)(-4x+y) = -(4x-y)^2$ ，不符合题意。

故选：B.

3. 下列等式中，从左到右的变形是因式分解的是 ()

A. $24 = 2 \times 2 \times 6$

B. $a^2 - b^2 - 1 = (a+b)(a-b) - 1$

C. $-4y^2 + 4y - 1 = -(2y-1)^2$

D. $m^2 - 2m - 1 = m\left(m - 2 - \frac{1}{m}\right)$

【答案】C

【分析】本题考查了因式分解的定义和因式分解的方法，关键是熟练应用知识点进行判断；根据因式分解的定义和因式分解的方法逐个判断即可。

【详解】解：A、24 不是多项式，不属于因式分解，故本选项不符合题意；

B、等式右边不是几个整式的积的形式，不属于因式分解，故本选项不符合题意；

C、从左到右的变形属于因式分解且分解彻底，故本选项符合题意；

D、等式右边不是几个整式的积的形式，不属于因式分解，故本选项不符合题意。

故选：C.

4. 下列分式中，是最简分式的是 ()

A. $\frac{12x^2}{9x}$

B. $\frac{4xy}{3x^2}$

C. $\frac{x-1}{x^2-1}$

D. $\frac{x+1}{2x+1}$

【答案】D

【分析】 本题考查了最简分式， 解题关键是掌握最简分式的定义， 根据分子与分母没有公因式的分式， 即一个分式的分子与分母没有非零次的公因式时这个分式就被称为最简分式， 逐项判断即可.

【详解】 解： A、 $\frac{12x^2}{9x} = \frac{4x}{3}$ ， 故原式不是最简分式， 不符合题意；

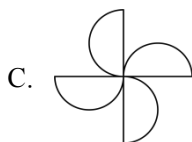
B、 $\frac{4xy}{3x^2} = \frac{4y}{3x}$ ， 故原式不是最简分式， 不符合题意；

C、 $\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x+1}$ ， 故原式不是最简分式， 不符合题意；

D、 $\frac{x+1}{2x+1}$ 无法化简， 是最简分式， 故符合题意；

故选： D.

5. 下列图形中， 既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()



【答案】 B

【分析】 本题考查了中心对称图形与轴对称图形的知识， 熟练掌握轴对称图形与中心对称图形的概念是解题的关键.

根据把一个图形绕某一点旋转 180° 后， 能够与原图形重合， 那么这个图形就叫做中心对称图形， 如果一个图形沿一条直线折叠， 直线两旁的部分能够互相重合， 这个图形就叫做轴对称图形， 逐项进行判断即可求解.

【详解】 解： A、 绕中心点旋转 180° 后， 能够与原图形重合， 是中心对称图形， 沿任意一条直线折叠， 直线两旁的部分都不能够互相重合， 不是轴对称图形， 故选项 A 不符合题意，

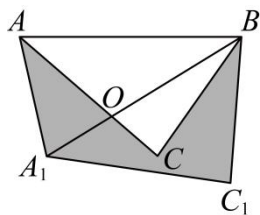
B、 绕中心点旋转 180° 后， 能够与原图形重合， 是中心对称图形， 沿过中心点的竖直直线折叠， 直线两旁的部分能够互相重合， 是轴对称图形， 故选项 B 符合题意，

C、 绕中心点旋转 180° 后， 能够与原图形重合， 是中心对称图形， 沿任意一条直线折叠， 直线两旁的部分都不能够互相重合， 不是轴对称图形， 故选项 C 不符合题意，

D、 绕任意点旋转 180° 后， 都不能够与原图形重合， 不是中心对称图形， 沿过中心点的竖直直线折叠， 直线两旁的部分能够互相重合， 是轴对称图形， 故选项 D 不符合题意.

故选： B.

6. 如图， 将 ABC 绕点 B 逆时针旋转 n° 后得到 A_1BC_1 ， 其中点 A 、 C 分别与点 A_1 、 C_1 对应， AC 与 A_1B 交于点 O ， 那么下列说法中错误的是 ()



- A. $AB = A_1B$
- B. $\angle ABA_1 = \angle CBC_1$
- C. 阴影部分的面积与 $\triangle ABA_1$ 的面积相等
- D. $\triangle AA_1O$ 与 $\triangle BCO$ 的面积相等

【答案】D

【分析】本题考查三角形的面积、旋转的性质. 根据旋转的性质即可判断 A、B；设 A_1BC_1 中阴影部分的面积为 S_1 ，求得 $S_{\triangle AOB} = S_1$ ，从而得 $S_{\text{阴影}} = S_{\triangle ABA_1}$ 即可判断 C；由 $S_{\triangle AA_1O} + S_{\triangle AOB} = S_{\triangle ABA_1}$ ， $S_{\triangle BCO} + S_{\triangle AOB} = S_{\triangle ABC}$ ， $S_{\triangle ABA_1} = S_{\triangle ABC}$ 不一定成立，说明 $S_{\triangle AA_1O} = S_{\triangle BCO}$ 不一定成立.

【详解】解：根据旋转的性质， $AB = A_1B$ ， $\angle ABA_1 = \angle CBC_1 = n^\circ$ ，

$\therefore$ A、B 说法正确，不符合题意；

设 A_1BC_1 中阴影部分的面积为 S_1 ，

$$\because S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} = S_{\triangle BOC} + S_1,$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = S_1,$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\triangle AA_1O} + S_1 = S_{\triangle AA_1O} + S_{\triangle AOB} = S_{\triangle ABA_1},$$

$\therefore$ C 说法正确，不符合题意；

$$S_{\triangle AA_1O} + S_{\triangle AOB} = S_{\triangle ABA_1}, \quad S_{\triangle BCO} + S_{\triangle AOB} = S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore S_{\triangle ABA_1} = S_{\triangle ABC} \text{ 不一定成立,}$$

$$\therefore S_{\triangle AA_1O} = S_{\triangle BCO} \text{ 不一定成立,}$$

$\therefore$ D 说法错误，符合题意.

故选：D.

第二部分 (非选择题 共 82 分)

二、填空题 (本大题共 12 小题, 每小题 2 分, 满分 24 分)

7. 计算: $(x-y)^3[(y-x)^4]^3 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $(x-y)^{15}$

【分析】 本题考查了同底数幂相乘, 幂的乘方运算, 先理解题意, 整理得 $(y-x)^4 = (x-y)^4$, 再把 $x-y$ 看作整体, 再运算幂的乘方运算, 然后运算同底数幂相乘, 即可作答.

【详解】 解: $(x-y)^3[(y-x)^4]^3$

$$= (x-y)^3[(x-y)^4]^3$$

$$= (x-y)^3 \times (x-y)^{12}$$

$$= (x-y)^{15}$$

故答案为: $(x-y)^{15}$

8. 把整式 $5x^2y - \frac{2}{3}xy + 3y^4 - 4x^4$ 按字母 x 的升幂排列是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $3y^4 - \frac{2}{3}xy + 5x^2y - 4x^4$

【分析】 本题考查了多项式的重新排列, 我们把一个多项式的各项按照某个字母的指数从大到小或从小到大的顺序排列, 称为按这个字母的降幂或升幂排列.

按字母 x 的升幂排列, 即根据 x 的指数从小到大的顺序排列各项.

【详解】 解: 整式中各项关于 x 的指数分别为: $3y^4$ 中 x 的指数为 0, $-\frac{2}{3}xy$ 中 x 的指数为 1, $5x^2y$ 中 x 的指数为 2, $-4x^4$ 中 x 的指数为 4.

按字母 x 的指数从小到大排列为 $3y^4 - \frac{2}{3}xy + 5x^2y - 4x^4$.

故答案为: $3y^4 - \frac{2}{3}xy + 5x^2y - 4x^4$.

9. 如果分式 $\frac{x^2-x-6}{2+x}$ 无意义, 那么分式 $\frac{2x-3}{x+1}$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 7

【分析】 根据分式无意义的条件: 分母为 0, 即可求出 $x = -2$, 再将 $x = -2$ 代入 $\frac{2x-3}{x+1}$ 求值即可.

【详解】 $\because$ 分式 $\frac{x^2-x-6}{2+x}$ 无意义,

$$\therefore 2+x=0,$$

解得: $x=-2$.

将 $x=-2$ 代入 $\frac{2x-3}{x+1}$, 得: $\frac{2x-3}{x+1} = \frac{2 \times (-2) - 3}{-2+1} = 7$.

故答案为: 7.

【点睛】本题考查分式无意义的条件, 分式的求值. 掌握分式无意义的条件: 分母为 0, 是解题关键.

10. 化简: $\frac{x^2-x-6}{x^2-9} =$ _____.

【答案】 $\frac{x+2}{x-3}$

【分析】先把分子分母分解因式约分化简.

【详解】解: $\frac{x^2-x-6}{x^2-9} = \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)^2} = \frac{x+2}{x-3}$

故答案为: $\frac{x+2}{x-3}$.

【点睛】本题考查了约分, 熟练分解因式是解题的关键.

11. 计算: $(2x^3-2x) \div 2x - (-2x)^2 =$ _____.

【答案】 $-3x^2-1$

【分析】本题考查了整式的混合运算, 熟练掌握相关运算法则是解题的关键.

先根据多项式除以单项式法则、积的乘方法则计算, 再合并同类项即可.

【详解】解: $(2x^3-2x) \div 2x - (-2x)^2 = x^2-1-4x^2$
 $= -3x^2-1,$

故答案为: $-3x^2-1$.

12. 计算: $\left(-\frac{1}{8}\right)^{12} \times 4^{19} =$ _____.

【答案】 4

【分析】本题主要考查了积的乘方运算, 负整数指数幂, 同底数幂乘法, 熟练掌握运算法则, 是解题的关键. 将原式中的底数转换为以 2 为底的幂形式, 再利用同底数幂乘法运算法则, 进行求解即可.

【详解】解: $\because \left(-\frac{1}{8}\right)^{12} = (-2^{-3})^{12} = (-1)^{12} \times (2^{-3})^{12} = 1 \times 2^{-36} = 2^{-36},$

$$4^{19} = (2^2)^{19} = 2^{38},$$

$$\therefore 2^{-36} \times 2^{38} = 2^{-36+38} = 2^2 = 4.$$

故答案为：4.

13. 已知整式 $x^2 - x + k$ 可以因式分解为 $(x+m)(x-5)$ ，则 m 的值为_____.

【答案】4

【分析】本题考查的是多项式因式分解与整式乘法的互逆关系，解题关键是利用整式乘法展开因式分解式，再通过对对应项系数相等列方程求解.

通过展开因式分解形式，比较同类项系数，建立方程求解即可.

【详解】展开 $(x+m)(x-5) = x^2 + (m-5)x - 5m$ ，与原式 $x^2 - x + k$ 比较系数，

得 $m-5 = -1$ ，解得 $m = 4$.

故答案为 4

14. 若 x 满足 $(2024-x)^2 + (2026-x)^2 = 4042$ ，则 $(2024-x)(2026-x)$ 的值为_____.

【答案】2019

【分析】本题考查利用完全平方公式变形求值，设 $a = 2024 - x$ ， $b = 2026 - x$ ，则已知 $a^2 + b^2 = 4042$ ，且 $b - a = 2$. 利用完全平方公式 $(b-a)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ ，代入已知值求解 ab 即可.

【详解】解：设 $a = 2024 - x$ ， $b = 2026 - x$ ，则 $a^2 + b^2 = 4042$ ， $b - a = (2026 - x) - (2024 - x) = 2$ ；

$$\therefore (b-a)^2 = a^2 + b^2 - 2ab,$$

$$\therefore 2^2 = 4042 - 2ab, \text{ 即 } 4 = 4042 - 2ab$$

$$\therefore 2ab = 4042 - 4 = 4038$$

$$\therefore ab = 2019$$

故 $(2024-x)(2026-x) = ab = 2019$ ；

故答案为：2019.

15. 关于 x 的分式方程 $\frac{2-x}{x-3} = \frac{a}{3-x} - 2$ 有增根，则 a 的值是_____.

【答案】1

【分析】先把分式方程去分母变为整式方程，然后把 $x=2$ 代入计算，即可求出 m 的值.

【详解】解： $\therefore \frac{2-x}{x-3} = \frac{a}{3-x} - 2$ ，

$\therefore$ 去分母，得： $2-x=-a-2(x-3)$ ；

$\therefore$ 分式方程有增根，

$\therefore x=3$ ，

把 $x=3$ 代入 $2-x=-a-2(x-3)$ ，则

$2-3=-a-2(3-3)$ ，

解得： $a=1$ ；

故答案为： 1.

【点睛】此题考查了分式方程的增根，增根确定后可按如下步骤进行：①化分式方程为整式方程；②把增根代入整式方程即可求得相关字母的值.

16. 在学校组织的一次汉字打字比赛中，“阳光”中队的小聪输入 1000 个字的时间比小明输入 1200 字的时间少 2 分钟，小聪与小明平均每分钟打字个数之比是 5:4，设小聪平均每分钟打字为 $5x$ 个，根据题意可列方程是_____.

【答案】 $\frac{1000}{5x}+2=\frac{1200}{4x}$

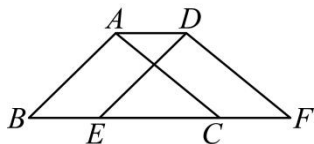
【分析】本题考查了列分式方程，找准等量关系，正确建立方程是解题关键. 先求出小明平均每分钟打字为 $4x$ 个，再根据小聪输入 1000 个字的时间比小明输入 1200 字的时间少 2 分钟建立方程即可得.

【详解】解：由题意得：小明平均每分钟打字为 $4x$ 个，

则可列方程是 $\frac{1000}{5x}+2=\frac{1200}{4x}$ ，

故答案为： $\frac{1000}{5x}+2=\frac{1200}{4x}$.

17. 如图，将周长为 16cm 的 $\triangle ABC$ 沿 BC 方向平移到 $\triangle DEF$ 的位置，已知四边形 $ABFD$ 的周长为 20cm，那么平移的距离为_____cm.



【答案】 2

【分析】本题考查了平移的性质，根据平移的性质即可求解.

【详解】解：由平移知： $AD=BE=CF$ ， $AC=DF$ ；

$\therefore$ 四边形 $ABFD$ 的周长为 20cm， $\triangle ABC$ 的周长为 16cm，

$\therefore AB+BF+DF+AD=20$ ， $AB+BC+AC=16$ ，

$\therefore BF=BC+CF$ ，

$$\therefore AB + BC + AC + 2AD = 20,$$

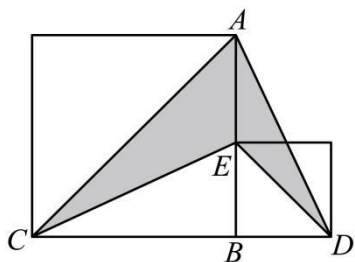
$$\text{即 } 16 + 2AD = 20,$$

$$\therefore AD = 2\text{cm},$$

即平移的距离为 2cm；

故答案为：2.

18. 如图，大正方形边长为 a ，小正方形边长为 b ，大正方形与小正方形的面积之差是 30，则阴影部分的面积是 _____.



【答案】15

【分析】由题意得出 $a^2 - b^2 = 30$ ，再根据阴影部分的面积等于 $S_{\triangle AEC} + S_{\triangle AED} = \frac{1}{2}(a-b)(a+b)$ 即可得出结果.

【详解】解：由题意得， $a^2 - b^2 = 30$ ， $AB = BC = a$ ， $BE = BD = b$ ，

$$\therefore AE = a - b,$$

$$\therefore \text{阴影部分的面积等于 } S_{\triangle AEC} + S_{\triangle AED} = \frac{1}{2}(a-b)(a+b) = \frac{1}{2}(a^2 - b^2) = 15,$$

故答案为：15.

【点睛】本题考查平方差公式和几何图形的面积. 熟练掌握平方差公式，是解题的关键.

三、解答题（本大题共 10 小题，满分 58 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

19. （本题 5 分）计算： $a^2 \cdot a^3 \cdot a + (-2a^4)^3 \div 4a^6$.

【答案】 $-a^6$

【分析】本题考查了整式的混合运算，准确熟练地进行计算是解题的关键. 根据整式的混合运算法则，先算乘方，再算乘除，后算加减，即可解答.

【详解】解： $a^2 \cdot a^3 \cdot a + (-2a^4)^3 \div 4a^6$

$$= a^6 + (-8a^{12}) \div 4a^6$$

$$= a^6 + (-2a^6)$$

$$= -a^6.$$

20. (本题 5 分) 因式分解:

(1) $(a^2 + 3a)^2 - 8(a^2 + 3a) + 16$;

(2) $t^4 - 4t^2 + 4t - 1$.

【答案】 (1) $(a+4)^2(a-1)^2$

(2) $(t-1)^2(t^2+2t-1)$

【分析】 本题考查了因式分解，关键是掌握公式法（完全平方和（差）和平方差公式）和提公因式法结合使用即可得出结果.

(1) 将 $(a^2 + 3a)$ 看成整体，应用完全平方公式因式分解，再利用十字相乘法分解即可得出结果；

(2) 利用平方差和完全平方公式分解因式即可得出结果.

【详解】 (1) 解：原式 $= [(a^2 + 3a) - 4]^2$
 $= (a^2 + 3a - 4)^2$
 $= (a + 4)^2(a - 1)^2$;

(2) 解：原式 $= t^4 - (4t^2 - 4t + 1)$
 $= t^4 - (2t - 1)^2$
 $= (t^2 + 2t - 1)(t^2 - 2t + 1)$
 $= (t - 1)^2(t^2 + 2t - 1)$.

21. (本题 5 分) 先化简，再求值： $[(a - 3b)^2 - (a + 2b)(a - 2b)] \div (-2b)$ ，其中 $a = \frac{1}{3}$ ， $b = -2$.

【答案】 $3a - \frac{13}{2}b$ ，14

【分析】 本题考查的是整式的混合运算—化简求值，根据完全平方公式、平方差公式、合并同类项、多项式除以单项式把原式化简，把 a 、 b 的值代入计算得到答案.

【详解】 解： $[(a - 3b)^2 - (a + 2b)(a - 2b)] \div (-2b)$
 $= [(a^2 - 6ab + 9b^2) - (a^2 - 4b^2)] \div (-2b)$
 $= (a^2 - 6ab + 9b^2 - a^2 + 4b^2) \div (-2b)$
 $= (-6ab + 13b^2) \div (-2b)$

$$= 3a - \frac{13}{2}b,$$

$$\text{当 } a = \frac{1}{3}, b = -2 \text{ 时, 原式} = 3 \times \frac{1}{3} - \frac{13}{2} \times (-2) = 14$$

22. (本题 5 分) 已知: 代数式 $A = 3x^2 - 6xy + 5x + 1$, 代数式 $B = 2x^2 - 3xy - 3x - 1$, 代数式

$$C = a(x^2 - 2) - b(2x + 3).$$

(1) 化简 $A - 2B$ 所表示的代数式;

(2) 若代数式 $A - 2B + C$ 的值与 x 的取值无关, 求出 $a + b$ 的值.

【答案】 (1)

$$-x^2 + 11x + 3$$

(2)

$$\frac{13}{2}$$

【分析】 本题考查了整式的加减、整式的无关问题, 关键是灵活运用知识点解决问题;

(1) 将整式代入计算即可;

(2) 将整式代入计算化简, 然后令 x 项和 x^2 项的系数分别为零即可求得.

【详解】 (1) 解: $\because A = 3x^2 - 6xy + 5x + 1, B = 2x^2 - 3xy - 3x - 1,$

$$\therefore A - 2B = (3x^2 - 6xy + 5x + 1) - 2(2x^2 - 3xy - 3x - 1)$$

$$= 3x^2 - 6xy + 5x + 1 - 4x^2 + 6xy + 6x + 2$$

$$= (3 - 4)x^2 + (-6 + 6)xy + (5 + 6)x + (1 + 2)$$

$$= -x^2 + 11x + 3;$$

(2) 解: $\because A - 2B = -x^2 + 11x + 3, C = a(x^2 - 2) - b(2x + 3),$

$$\therefore A - 2B + C$$

$$= -x^2 + 11x + 3 + a(x^2 - 2) - b(2x + 3)$$

$$= -x^2 + 11x + 3 + ax^2 - 2a - 2bx - 3b$$

$$= (-1 + a)x^2 + (11 - 2b)x + (3 - 2a - 3b),$$

$\because$ 上式与 x 的取值无关,

$$\therefore -1 + a = 0, 11 - 2b = 0,$$

即: $a=1, b=\frac{11}{2}$,

$\therefore a+b=1+\frac{11}{2}=\frac{13}{2}$.

23. (本题 5 分) 先化简再求值: $\left(\frac{3}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}\right) \div \frac{x^2-3x}{x^2-6x+9}$, 其中 x 可在 $-3, 0, 1$ 三个数中任选一个合适的数.

【答案】 $-\frac{1}{x+3}, -\frac{1}{4}$

【分析】 先利用异分母分式加减法法则计算括号里, 再算括号外, 然后把 x 的值代入化简后的式子, 进行计算即可解答.

【详解】解: $\left(\frac{3}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}\right) \div \frac{x^2-3x}{x^2-6x+9}$
 $= \frac{3-(x+3)}{(x+3)(x-3)} \cdot \frac{(x-3)^2}{x(x-3)}$
 $= \frac{-x}{(x+3)(x-3)} \cdot \frac{x-3}{x}$
 $= -\frac{1}{x+3},$

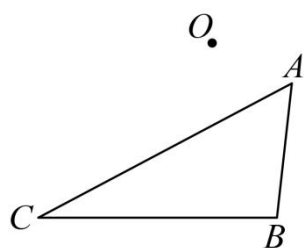
$\because x^2-9 \neq 0, x \neq 0,$

$\therefore x \neq \pm 3, x \neq 0,$

$\therefore$ 当 $x=1$ 时, 原式 $= -\frac{1}{1+3} = -\frac{1}{4}$.

【点睛】 本题考查了分式的混合运算—化简求值, 准确熟练地进行计算是解题的关键.

24. (本题 5 分) 如图, 已知点 O 与三角形 ABC .



(1) 画出三角形 ABC 关于点 O 成中心对称的图形, 记作三角形 $A'B'C'$, 其中点 A, B, C 分别与点 A', B', C' 对应;

(2) 画出三角形 $A'B'C'$ 绕点 O 按逆时针方向旋转 90° 后的图形, 记作三角形 $A''B''C''$, 其中点 A', B', C' 分别与点 A'', B'', C'' 对应;

(3) 将三角形 ABC 绕点 O 按顺时针方向旋转 $m^\circ (0 < m < 360)$ 得三角形 $A'B'C'$, 再将三角形 $A'B'C'$ 绕点 O 按逆时针方向旋转 $n^\circ (0 < n < 360, \text{ 且 } m > n)$ 小明认为, 三角形 ABC 经过一次运动就能和三角形 $A''B''C''$ 重合, 他的

观点正确吗？如果认为正确；如果认为不正确，请说明理由.

【答案】(1)见解析

(2)见解析

(3)正确，理由见解析

【分析】本题考查了中心对称图形的性质，图形旋转的性质等知识点，解题的关键是熟练掌握中心对称和旋转的基本概念与操作方法，能够准确找出对应点的位置来绘制图形，并依据旋转的角度关系判断图形是否重合.

(1) 根据中心对称的性质，连接三角形 ABC 各顶点与对称中心 O 并延长相同长度，确定对应点 A' ， B' ， C' 的位置，从而画出三角形 $A'B'C'$.

(2) 依据图形旋转的性质，以点 O 为旋转中心，将三角形 $A'B'C'$ 的各顶点绕点 O 逆时针旋转 90° ，找到对应点 A'' , B'' , C'' ，进而画出三角形.

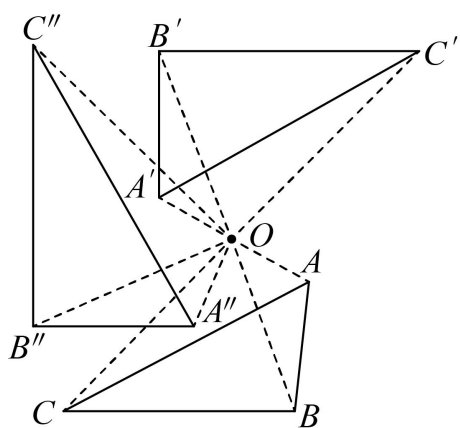
(3) 分析两次旋转的角度关系，由于顺时针旋转 $m^\circ(0 < m < 360)$ 后再逆时针旋转 $n^\circ(0 < n < 360)$ ，且 $m > n$ ，相当于整体顺时针旋转了 $(m-n)^\circ$ ，判断这个角度下三角形 ABC 能否与三角形 $A''B''C''$ 重合.

【详解】(1) 连接 AO 并延长至 A' ，使 $OA' = OA$ ，

连接 BO 并延长至 B' ，使 $OB' = OB$ ，

连接 CO 并延长至 C' ，使 $OC' = OC$ ，

依次连接 A', B', C' ，得到三角形 $A'B'C'$ ，此三角形 ABC 关于点 O 成中心对称的图形；

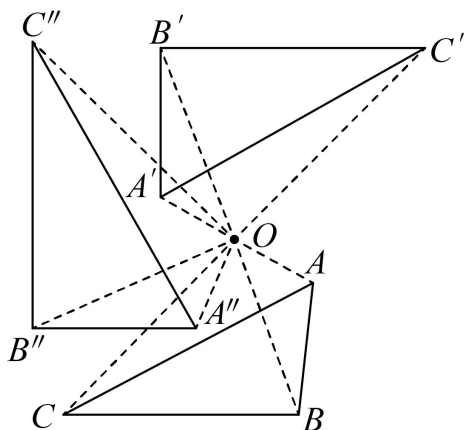


(2) 以点 O 为旋转中心，将点 A' 绕点 O 逆时针旋转 90° ，得到点 A'' ，

同样方法，将点 B' 绕点 O 逆时针旋转 90° 得到点 B'' ，

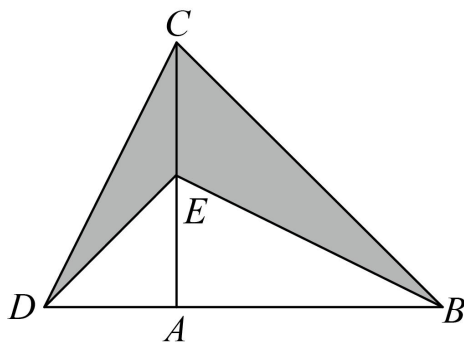
将点 C' 绕点 O 逆时针旋转 90° 得到点 C'' ，

依次连接 A'', B'', C'' ，画出三角形 $A''B''C''$ ；



(3) 因为三角形 ABC 绕点 O 顺时针旋转 m° 得到三角形 $A'B'C'$ ，再将三角形 $A'B'C'$ 绕点 O 逆时针旋转 n° ，所以三角形 ABC 相对于初始位置顺时针旋转了 $(m-n)$ ，而三角形 ABC 直接绕点 O 顺时针旋转 $(m-n)^\circ$ 后，其位置与经过两次旋转得到的三角形 $A''B''C''$ 位置相同 (根据旋转的性质，旋转角度相同，旋转中心相同，图形的最终位置相同)，所以小明的观点正确，即三角形 ABC 经过一次运动 (绕点 O 顺时针旋转 $(m-n)^\circ$) 就能和三角形 $A''B''C''$ 重合。

25. (本题 6 分) 如图, 在三角形 CDB 中, 已知 CA 是 DB 上的高, $AC = AB = a$, 点 E 是 AC 的一点, $AE = AD = b$, $a > b > 0$.



- (1) 求阴影部分的面积 (用含 a 、 b 的式子表示).
- (2) 当 $a = 10.75$, $b = 5.25$ 时, 求阴影部分的面积的值.
- (3) 三角形 CAD 可以通过一种运动与三角形 BAE 完全重合, 请写出具体的运动方法: _____.

【答案】 (1) $= \frac{1}{2}(a+b)(a-b)$

(2) 44

(3) $\triangle CAD$ 绕点 A 顺时针旋转 90°

【分析】 本题考查旋转的性质，列代数式，代数式求值，解决本题的关键的掌握旋转的性质.

(1) 根据阴影部分的面积=三角形 BCD 的面积-三角形 BED 的面积，代入 a ， b 计算即可；

(2) 结合 (1) 代入值计算即可;

(3) 根据旋转的性质即可解决问题.

【详解】(1) 解: 阴影部分的面积=三角形 BCD 的面积-三角形 BED 的面积

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} \times BD \cdot AC - \frac{1}{2} BD \cdot AE \\&= \frac{1}{2} BD (AC - AE) \\&= \frac{1}{2} (AD + AB) (AC - AE) \\&= \frac{1}{2} (a + b) (a - b); \end{aligned}$$

(2) 解: 当 $a = 10.75$, $b = 5.25$ 时,

$$\begin{aligned}\text{阴影部分的面积} &= \frac{1}{2} (a + b) (a - b) \\&= \frac{1}{2} (10.75 + 5.25) (10.75 - 5.25) \\&= \frac{1}{2} \times 16 \times 5.5 \\&= 44;\end{aligned}$$

(3) 解: 三角形 CAD 可以通过一种旋转运动与三角形 BAE 完全重合,

具体的运动方法: 三角形 CAD 可以绕着点 A 顺时针旋转 90° 与三角形 BAE 完全重合.

故答案为: 三角形 CAD 可以绕着点 A 顺时针旋转 90° 与三角形 BAE 完全重合.

26. (本题 7 分) 《哪吒 2》上映后非常火爆, 哪吒、敖丙造型的玩偶深受大众喜爱, 某商家发现商机, 花费 4000 元购买了一批哪吒玩偶和敖丙玩偶, 已知商家购买哪吒玩偶的费用是敖丙玩偶费用的 2 倍少 500 元.

(1) 商家购买哪吒玩偶和敖丙玩偶各花费多少钱?

(2) 已知每个敖丙玩偶的进价比哪吒玩偶的进价贵 5 元, 且购进的哪吒玩偶的数量是敖丙玩偶数量的 2.5 倍. 则每个敖丙玩偶的进价为多少元?

【答案】(1) 购买敖丙玩偶花了 1500 元, 购买哪吒玩偶花了 2500 元

(2) 每个敖丙玩偶的进价为 15 元.

【分析】本题考查了一元一次方程的应用, 分式方程的应用, 解题的关键是: (1) 找准等量关系, 正确列出一元一次方程; (2) 找准等量关系, 正确列出分式方程.

(1) 设购买敖丙玩偶花了 x 元, 购买哪吒玩偶花了 $(2x - 500)$ 元, 根据花费 4000 元购买了一批哪吒玩偶和敖丙玩偶, 已知商家购买哪吒玩偶的费用是敖丙玩偶费用的 2 倍少 500 元; 列出一元一次方程组, 解方程即可;

(2) 设每个敖丙玩偶的进价为 a 元, 则每个哪吒玩偶的进价为 $(a-5)$ 元, 根据每个敖丙玩偶的进价比哪吒玩偶的进价贵 5 元, 且购进的哪吒玩偶的数量是敖丙玩偶数量的 2.5 倍, 列出分式方程, 解方程即可.

【详解】(1) 解: 设购买敖丙玩偶花了 x 元, 购买哪吒玩偶花了 $(2x-500)$ 元,

由题意得: $x+2x-500=4000$,

解得: $x=1500$,

$2x-500=2500$,

答: 购买敖丙玩偶花了 1500 元, 购买哪吒玩偶花了 2500 元;

(2) 解: 设每个敖丙玩偶的进价为 a 元, 则每个哪吒玩偶的进价为 $(a-5)$ 元,

由题意得: $\frac{2500}{a-5}=2.5 \times \frac{1500}{a}$,

解得: $a=15$,

经检验: $a=15$ 是所列方程的根, 且符合题意;

答: 每个敖丙玩偶的进价为 15 元.

27. (本题 7 分) 一个代数式只含有字母 x, y , 把 x 替换成 y , 把 y 替换成 x , 得到一个新的代数式. 若不论 x, y 如何取值, 新代数式的值与原代数式的值始终相等, 则称其为对称式. 例如: 代数式 $\frac{x+y}{xy}$, 新代数式为 $\frac{y+x}{yx}$, 因为 $\frac{x+y}{xy}=\frac{y+x}{yx}$, 所以 $\frac{x+y}{xy}$ 是对称式; 而代数式 $\frac{x-y}{x}$, 新代数式为 $\frac{y-x}{y}$, 因为当 $x=2, y=1$ 时, 代数式值为 $\frac{1}{2}$, 新代数式值为 -1 , 两者不相等, 所以 $\frac{x-y}{x}$ 不是对称式.

(1) 请判断 x^2y+xy^2 和 $\frac{x}{y}-\frac{y}{x}$ 是不是对称式? 模仿上面的格式说明理由;

(2) 关于字母 x, y 的代数式 $\frac{x+my}{xy}+\frac{x-y}{xy}$ (m 为常数) 是对称式, 求 m 的值.

【答案】(1) x^2y+xy^2 是对称式, $\frac{x}{y}-\frac{y}{x}$ 不是对称式

(2) $m=3$

【分析】本题考查了整式的化简与整式恒成立求参数, 正确理解新定义的含义是解题的关键.

(1) 根据对称式的定义对各式进行判断即可;

(2) 根据对称式的定义, 交换 x, y 的位置, 得到 $\frac{y+mx}{yx}+\frac{y-x}{yx}$, 由题意得 $\frac{x+my}{xy}+\frac{x-y}{xy}=\frac{y+mx}{yx}+\frac{y-x}{yx}$, 得到 $x+my+x-y=y+mx+y-x$, 化简求解即可.

【详解】(1) 解: 代数式 x^2y+xy^2 , 交换字母后的代数式为: y^2x+yx^2 ,

$\because x^2y+xy^2=y^2x+yx^2$,

$\therefore x^2y + xy^2$ 是对称式；

代数式 $\frac{x}{y} - \frac{y}{x}$ ，交换字母后的代数式为： $\frac{y}{x} - \frac{x}{y}$ ，

当 $x=1$ ， $y=2$ 时，

$$\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{1}{2} - \frac{2}{1} = -\frac{3}{2}, \quad \frac{y}{x} - \frac{x}{y} = \frac{2}{1} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \frac{x}{y} - \frac{y}{x} \neq \frac{y}{x} - \frac{x}{y},$$

$\therefore \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$ 不是对称式；

(2) 代数式 $\frac{x+my}{xy} + \frac{x-y}{xy}$ 交换 x ， y 的位置得到 $\frac{y+mx}{yx} + \frac{y-x}{yx}$ ，

$$\therefore \frac{x+my}{xy} + \frac{x-y}{xy} = \frac{y+mx}{yx} + \frac{y-x}{yx},$$

$$\therefore x+my+x-y=y+mx+y-x,$$

$$\therefore my-mx=y+y+y-x-x-x,$$

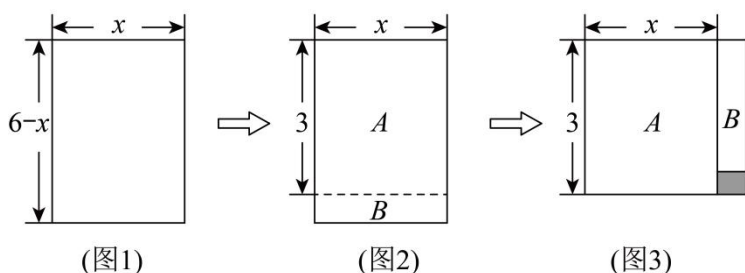
$$\therefore m(y-x)=3(y-x),$$

$\therefore$ 对称式是不论 x ， y 如何取值，新代数式的值与原代数式的值始终相等，

$\therefore m(y-x)=3(y-x)$ 不论 x ， y 如何取值均成立，

$$\therefore m=3.$$

28. (本题 8 分) 通过小学的学习，我们知道：周长一定的长方形中，正方形的面积最大. 此结论可以利用图形的割补加以说明.



(1) 【方法理解】

已知长方形的周长是 12，设长方形的一边长是 x ，则相邻一边长是 $(6-x)$.

①条件：当 $0 < x < 3$ 时，如图 1，将此长方形进行如下割补. 如图 2，长方形 B 的一边长是 x ，相邻一边长是 $3-x$. 如图 3，将长方形 B 割补到长方形 A 的右侧，阴影部分是一个边长为 x 的正方形 (以上两空，均用含 x 的代数式表示). 通过上述割补，图 1 中长方形的面积可以看成图 3 中两个正方形的面积之差，

所以代数式 $x(6-x)$ 、 9 、 $(3-x)^2$ 满足的等量关系是_____；

结论：可得 $x(6-x) < 9$ 。

②当 $3 < x < 6$ 时，同理可得 $x(6-x) < 9$ ；

③当 $x = 3$ 时，该长方形即为正方形；

综上所述，周长是 12 的长方形的最大面积是_____。

(2) 【方法迁移】

仿照上述方式，求出当 $-3 < x < 7$ 时，代数式 $(7-x)(3+x)$ 的最大值（无需描述割补过程，只需画出示意图）。

【答案】 $(1)(3-x)$ ； $(3-x)$ ； 9

(2)25

【分析】 本题考查了多项式乘多项式与图形面积、列代数式等知识点，理解材料的用意及数形结合是解题的关键。

(1) 根据图形面积的求法列代数式并整理即可解答；

(2) 根据题中图形面积的求法画出相应的图形，求出 $(7-x)(3+x)$ 的最大值，据此求解即可。

【详解】 (1) 解：①当 $0 < x < 3$ 时，如图 2，长方形 B 的一边长是 x ，相邻一边长为 $(6-x)-3=(3-x)$ ；如图 3，阴影部分是一个边长为 $(3-x)$ 的正方形，长方形 A 、 B 和阴影部分组成一个边长为 3 的正方形，

$$\therefore x(6-x) = 9 - (x-3)^2,$$

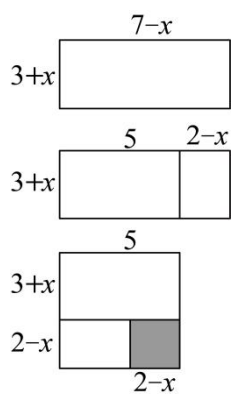
②当 $3 < x < 6$ 时，同理可得 $x(6-x) < 9$ ；

③当 $x = 3$ 时，该长方形即为正方形；

综上所述，周长是 12 的长方形的最大面积是 9。

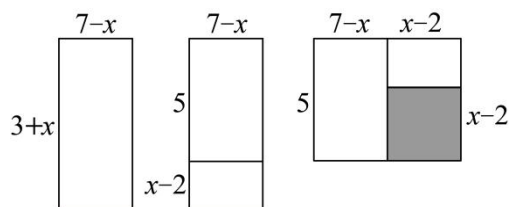
故答案为： $(3-x)$ ； $(3-x)$ ； 9。

(2) 解：当 $0 < 3+x < 7-x$ 时，如图，阴影部分是边长为 $(2-x)$ 的正方形，



$$\therefore (7-x)(3+x) = 5^2 - (2-x)^2 = 25 - (2-x)^2 < 25;$$

当 $0 < 7-x < 3+x$ 时, 如图, 阴影部分是边长为 $(2-x)$ 的正方形,



$$\therefore (7-x)(3+x) = 5^2 - (2-x)^2 = 25 - (2-x)^2 < 25,$$

当 $x = 2$ 时, 该长方形为边长是 5 的正方形, 即 $(7-x)(3+x) = 5 \times 5 = 25$

$\therefore$ 边长是 $(7-x)$ 和 $(3+x)$ 的长方形的最大面积是 25,

$\therefore (7-x)(3+x)$ 的最大值为 25.