

沪教版七年级数学上册期末复习试卷（一）

考查范围：第10章~第14章

一. 选择题

1. 下列各式中，与 $-2x^3y$ 是同类项的是（ ）.

A. $3xy^3$

B. $\frac{1}{2}yx^3$

C. $-a^3b$

D. $2x^3yz$

2. 若 $(a-2b)^2 = (a+2b)^2 - x$ ，则 x 等于（ ）.

A. $2ab$

B. $4ab$

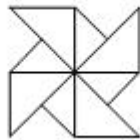
C. $8ab$

D. $-8ab$

3. 下列图形中是旋转对称图形但不是中心对称图形的是（ ）.



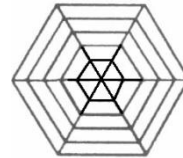
A



B



C



D

4. 下列等式中，从左到右的变形是因式分解的是（ ）.

A. $x^2 - 5x + 3 = x(x-5) + 3$

B. $(x-2)(x+5) = x^2 + 3x - 10$

C. $(2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$

D. $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$

5. 如果将分式 $\frac{x^2-y^2}{x+y}$ 中的 x 和 y 都扩大到原来的3倍，那么分式的值（ ）.

A. 扩大到原来的3倍

B. 扩大到原来的9倍

C. 缩小到原来的 $\frac{1}{3}$

D. 不变

6. 小敏和小明练习打字，小敏比小明每分钟多打25个字，完成1000字文稿小敏比小明少用2分钟，设小明每分钟打 x 个字，则可列方程（ ）.

A. $\frac{1000}{x} - \frac{1000}{x+25} = 2$

B. $\frac{1000}{x+25} - \frac{1000}{x} = 2$

C. $\frac{1000}{x} - \frac{1000}{x-25} = 2$

D. $\frac{1000}{x-25} - \frac{1000}{x} = 2$

二. 填空题

7. 将 $x^2 - 2x^3y + 2xy^2 - y^3$ 按字母 x 降幂排列_____.

8. 多项式 $3x^3 - 3x^4 + 2x + 1$ 有_____项，其中次数最高项是_____，常数项是_____.

9. 当 $m =$ _____ 时, 方程 $\frac{x}{x-1} + 1 = \frac{m}{x-1}$ 会产生增根.

10. 计算 $x+1 - \frac{x^2}{x-1}$ 的结果是 _____.

11. 因式分解: $m^2 + 4n - mn - 4m =$ _____;

12. 小杰从镜子中看到电子钟的示数是 $\boxed{20:15}$, 那么此时实际时间是 _____.

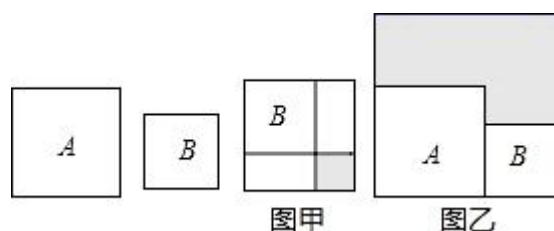
13. 若关于 m 的方程 $\frac{m-1}{x-1} = 2$ 的解为正数, 则 m 的取值范围是 _____.

14. 如果关于 x 的多项式 $1 + 4x^2 + k$ 是完全平方式, 那么 $k =$ _____.

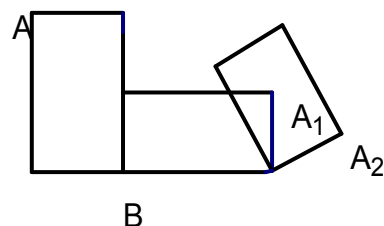
15. 计算: $a(a-b)^{-1} + a^{-1}b^2(b-a)^{-1} =$ _____.

16. 若 $x = 5^6$, $y = 6^5$, 则用 x, y 的代数式来表示 $30^{30} =$ _____.

17. 有两个正方形 A, B , 现将 B 放在 A 的内部如图甲, 将 A, B 并排放置后构造新的正方形如图乙. 若图甲和图乙中阴影部分的面积分别为 $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{7}{4}$, 则正方形 A, B 的面积之和为 _____.



(第 17 题)



(第 18 题)

18. 如图, 一长为 $4cm$, 宽为 $3cm$ 的长方形木板 (其中 $BA = 5cm$), 在桌面上作无滑动的顺时针方向的翻滚, 木板上的点 A 位置变化为 $A \rightarrow A_1 \rightarrow A_2$, 其中第二次翻滚时被桌面上一小木块挡住, 使木板和桌面成 30° 角, 则点 A 翻滚到 A_2 位置时共走过路径长为 _____.

三. 简答题

19. 先化简, 再求值: $[(2x-y)^2 - (x-y)(x+y) - 2y^2] \div x$, 其中 $x = 2$, $y = -3$;

20. $(-a)^5 \cdot a^3 + (-3a^4)^2$

21.因式分解: $a^5b^3c^2 + 5a^4b^2c - 7a^3bc$

22. $-1^{2020} + (-2)^3 + (\pi - 1)^0 + \left(-\frac{1}{4}\right)^{-2}$

23.解方程

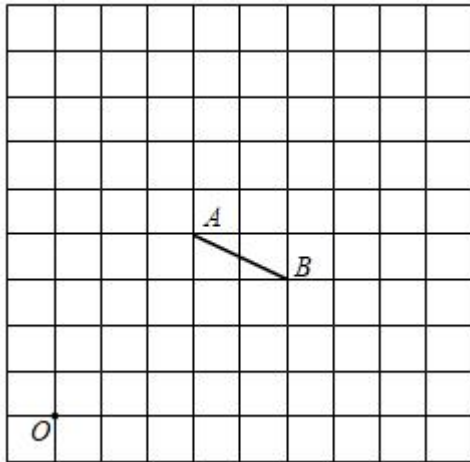
$$\frac{x}{x-2} - \frac{1-x^2}{x^2-5x+6} = \frac{2x}{x-3}$$

24.某生态柑橘园现有柑橘31吨,租用9辆A和B两种型号的货车将柑橘一次性运往外地销售.已知每辆车满载时,A型货车的总费用500元,B型货车的总费用480元,每辆B型货车的运费是每辆A型货车的运费的1.2倍.

(1) 每辆A型货车和B型货车的运费各多少元?

(2) 若每辆车满载时,租用1辆A型车和7辆B型车也能一次性将柑橘运往外地销售,则每辆A型货车和B型车各运多少吨?

25. 如图，在由边长为 1 个单位长度的小正方形组成的 10×10 网格中，已知点 O , A , B 均为网格线的交点.



- (1) ①在给定的网格中，沿 OA 方向将点 A 平移线段 OA 的长度得到点 A_1 ，沿 OB 方向将点 B 平移线段 OB 的长度得到点 B_1 ，画出线段 A_1B_1 ；
 ②将线段 A_1B_1 绕点 B_1 逆时针旋转 90° 得到线段 A_2B_1 。画出线段 A_2B_1 和 AA_2 ；
- (2) 求以 A 、 A_1 、 B_1 、 A_2 为顶点的四边形 $AA_1B_1A_2$ 的面积.

25.在初中数学学习阶段，我们常常会利用一些变形技巧来简化式子，解答问题.

材料一：在解决某些分式问题时，倒数法是常用的变形技巧之一，所谓倒数法，即把式子变成其倒数形式，从而运用约分化简，以达到计算目的.

例：已知： $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{4}$ ，求代数式 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 的值.

解：∵ $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{4}$ ，∴ $\frac{x^2+1}{x} = 4$

即 $\frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} = 4$ ∴ $x + \frac{1}{x} = 4$ ∴ $x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2 = 16 - 2 = 14$

材料二：在解决某些连等式问题时，通常可以引入参数“ k ”，将连等式变成几个值为 k 的等式，这样就可以通过适当变形解决问题.

例：若 $2x = 3y = 4z$ ，且 $xyz \neq 0$ ，求 $\frac{x}{y+z}$ 的值.

解：令 $2x = 3y = 4z = k$ ($k \neq 0$)

则 $x = \frac{k}{2}$ ， $y = \frac{k}{3}$ ， $z = \frac{k}{4}$ ，∴ $\frac{x}{y+z} = \frac{\frac{1}{2}k}{\frac{1}{3}k + \frac{1}{4}k} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{12}} = \frac{6}{7}$

根据材料回答问题：

(1) 已知 $\frac{x}{x^2-x+1} = \frac{1}{4}$ ，求 $x + \frac{1}{x}$ 的值.

(2) 已知 $\frac{a}{5} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}$ ，($abc \neq 0$)，求 $\frac{3b+4c}{2a}$ 的值.

(3) 若 $\frac{yz}{bz+cy} = \frac{zx}{cx+az} = \frac{xy}{ay+bx} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$ ， $x \neq 0$ ， $y \neq 0$ ， $z \neq 0$ ，且 $abc = 7$ ，求

xyz 的值.

沪教版七年级数学上册期末复习试卷（一） 参考答案

1. 下列各式中，与 $-2x^3y$ 是同类项的是 (**B**).

A. $3xy^3$

B. $\frac{1}{2}yx^3$

C. $-a^3b$

D. $2x^3yz$

解析：同类项是指 (1) 所含字母相同；(2) 相同字母的指数相同.

2. 若 $(a-2b)^2 = (a+2b)^2 - x$ ，则 x 等于 (**C**).

A. $2ab$

B. $4ab$

C. $8ab$

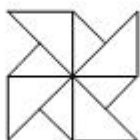
D. $-8ab$

解析： $x = (a+2b)^2 - (a-2b)^2 = 8ab$.

3. 下列图形中是旋转对称图形但不是中心对称图形的是 (**A**).



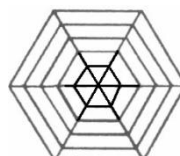
A



B



C



D

解析：中心对称图形是指把一个图形绕一点旋转 180 度后能与自身重合；旋转对称图形是指把一个图形绕一定点旋转一定角度（小于周角）后能与自身重合.

备注：本题考查了旋转对称图形和中心对称图形的概念.

4. 下列等式中，从左到右的变形是因式分解的是 (**D**).

A. $x^2 - 5x + 3 = x(x-5) + 3$

B. $(x-2)(x+5) = x^2 + 3x - 10$

C. $(2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$

D. $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$

解析：因式分解是指把一个多项式化为几个整式的乘积的形式. 故答案是 D

5. 如果将分式 $\frac{x^2 - y^2}{x + y}$ 中的 x 和 y 都扩大到原来的 3 倍，那么分式的值 (**A**).

A. 扩大到原来的 3 倍

B. 扩大到原来的 9 倍

C. 缩小到原来的 $\frac{1}{3}$

D. 不变

解析： x 和 y 都扩大到原来的 3 倍，即为 $3x$ 和 $3y$ ；

则 $\frac{(3x)^2 - (3y)^2}{3x + 3y} = \frac{9x^2 - 9y^2}{3x + 3y} = \frac{9(x^2 - y^2)}{3(x + y)} = 3 \frac{x^2 - y^2}{x + y}$ ，所以原分式的值扩大到原来的 3 倍.

6.小敏和小明练习打字，小敏比小明每分钟多打 25 个字，完成 1000 字文稿小敏比 小 明 少用 2 分钟，设小明每分钟打 x 个字，则可列方程 (**A**) .

$$A. \frac{1000}{x} - \frac{1000}{x+25} = 2$$

$$B. \frac{1000}{x+25} - \frac{1000}{x} = 2$$

$$C. \frac{1000}{x} - \frac{1000}{x-25} = 2$$

$$D. \frac{1000}{x-25} - \frac{1000}{x} = 2$$

解析：解：设小明每分钟打 x 个字，则小敏每分钟打 $(x+25)$ 个字，

由题意得： $\frac{1000}{x} - \frac{1000}{x+25} = 2$ ， 故选 **A** .

7.将 $x^2 - 2x^3y + 2xy^2 - y^3$ 按字母 x 降幂排列_____.

答案 $-2x^3y + x^2 + 2xy^2 - y^3$.

解析：①看清那一个字母；②看清升降幂.

8.多项式 $3x^3 - 3x^4 + 2x + 1$ 有_____项，其中次数最高项是_____，常数项是_____.

答案：四， $-3x^4$ ， 1 根据多项式的项，多项式的次数，常数项的定义判断即可. $\because$ 多项式 $3x^3 - 3x^4 + 2x + 1$ 中有 $3x^3$ ， $-3x^4$ ， $2x$ ， 1 四个单项式， $\therefore$ 多项式 $3x^3 - 3x^4 + 2x + 1$ 有四项，次数最高项是 $-3x^4$ ，常数项是 1，故答案为：四， $-3x^4$ ， 1.

9.当 $m =$ _____时，方程 $\frac{x}{x-1} + 1 = \frac{m}{x-1}$ 会产生增根.

解析：由题意得方程的增根是 $x-1=0$ ，即 $x=1$ ；

方程 $\frac{x}{x-1} + 1 = \frac{m}{x-1}$ 两边同时乘以 $(x-1)$ ，得 $x + x - 1 = m$ ，即 $m = 2x - 1$.

将 $x=1$ 代入，得 $m=1$ ，

所以，当 $m=1$ 时，原方程有增根.

10. 计算 $x+1-\frac{x^2}{x-1}$ 的结果是_____.

分析：先通分再化简即可.

$$x+1-\frac{x^2}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} - \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2-1}{x-1} - \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{1-x}$$

11.因式分解： $m^2 + 4n - mn - 4m =$ _____；

解析： $m^2 + 4n - mn - 4m = (m^2 - mn) + (4n - 4m) = m(m-n) - 4(m-n) = (m-n)(m-4)$ ；

12.小杰从镜子中看到电子钟的示数是 $\boxed{20:15}$ ，那么此时实际时间是_____.

答案 21: 05.

解析：镜子中看到的数字与实际数字是关于镜面垂直的线对称.

13.若关于 m 的方程 $\frac{m-1}{x-1} = 2$ 的解为正数，则 m 的取值范围是_____.

答案： $m > -1$ 且 $m \neq 1$

解：原方程整理得： $m-1 = 2x-2$ ，则 $x = \frac{m+1}{2}$ ；

$\because$ 原方程有解， $\therefore x-1 \neq 0$ ，即 $\frac{m+1}{2} \neq 1$ ，故 $m \neq 1$ ，

又 $\because$ 方程的解为正数， $\therefore \frac{m+1}{2} > 0$ ，故 $m > -1$ ；

所以 $m > -1$ 且 $m \neq 1$.

14.如果关于 x 的多项式 $1+4x^2+k$ 是完全平方式，那么 $k =$ _____.

答案 $\pm 4x$ ； $4x^4$.

解析：分三种情况：①当 1 和 $4x^2$ 都为平方项时， $k = \pm 4x$ ；②当 $4x^2$ 为中间项时， $k = 4x^4$ ；

③当 1 为中间项时， $k = \frac{1}{16x^2}$ ，此时代数式不是多项式，故不满足.

15.计算： $a(a-b)^{-1} + a^{-1}b^2(b-a)^{-1} =$ _____.

答案： $\frac{a+b}{a}$

解析： $a(a-b)^{-1} + a^{-1}b^2(b-a)^{-1} = \frac{a}{a-b} + \frac{b^2}{a(b-a)} = \frac{a^2-b^2}{a(a-b)} = \frac{a+b}{a}$.

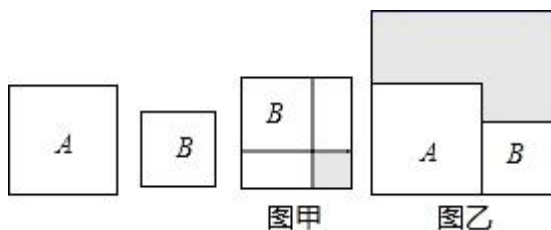
16.若 $x = 5^6$ ， $y = 6^5$ ，则用 x 、 y 的代数式来表示 $30^{30} =$ _____.

答案： x^5y^6 .

解析： $30^{30} = (5 \times 6)^{30} = 5^{30} \times 6^{30} = (5^6)^5 \times (6^5)^6 = x^5y^6$.

17. 有两个正方形 A ， B ，现将 B 放在 A 的内部如图甲，将 A ， B 并排放置后构造新的正方形如图乙. 若图甲和图乙中阴影部分的面积分别为 $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{7}{4}$ ，则正方形 A ， B 的面积之和为

_____.



答案: 2

设正方形 A 、 B 的边长, 分别表示甲、乙图中的阴影面积, 再变形可得答案;

解: 解: 设 A 的边长为 x , B 的边长为 y ,

由甲、乙阴影面积分别是 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{7}{4}$ 可列方程组:

$$\begin{cases} (x-y)^2 = \frac{1}{4} \\ (x+y)^2 - x^2 - y^2 = \frac{7}{4} \end{cases}$$

将②化简得 $2xy = \frac{7}{4}$ ③,

由①得 $x^2 + y^2 - 2xy = \frac{1}{4}$, 将③代入可知 $x^2 + y^2 = \frac{1}{4} + \frac{7}{4} = 2$.

$\therefore$ 正方形 A , B 的面积之和为 2.

故答案为: 2.

18. 如图, 一长为 4cm , 宽为 3cm 的长方形木板 (其中 $BA = 5\text{cm}$), 在桌面上作无滑动的顺时针方向的翻滚, 木板上的点 A 位置变化为 $A \rightarrow A_1 \rightarrow A_2$, 其中第二次翻滚时被桌面上一小木块挡住, 使木板和桌面成 30° 角, 则点 A 翻滚到 A_2 位置时共走过路径长为_____.

解: 点 A 以点 B 为旋转中心, 以 $\angle ABA_1$ 为旋转角, 顺时针

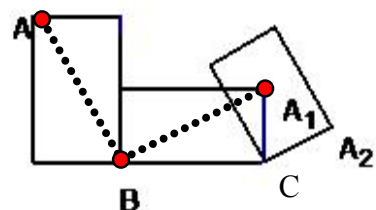
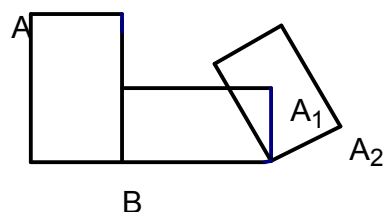
旋转得到 A_1 ; 同理 A_2 是由 A_1 以点 C 为旋转中心, 以

$\angle A_1CA_2$ 为旋转角, 顺时针旋转得到.

$$\because \angle ABA_1 = 90^\circ, \angle A_1CA_2 = 60^\circ, AB = 5\text{cm}, CA_1 = 3\text{cm}$$

$\therefore$ 点 A 翻滚到 A_2 位置时共走过路径长为:

$$l = \frac{90 \cdot \pi \cdot 5}{180} + \frac{60 \cdot \pi \cdot 3}{180} = \frac{7\pi}{2} (\text{cm}).$$



三. 解答题

19. 先化简, 再求值: $[(2x-y)^2 - (x-y)(x+y) - 2y^2] \div x$, 其中 $x=2$, $y=-3$;

解: $[(2x-y)^2 - (x-y)(x+y) - 2y^2] \div x$

$$= (4x^2 - 4xy + y^2 - x^2 + y^2 - 2y^2) \div x$$

$$= (3x^2 - 4xy) \div x$$

$$= 3x - 4y$$

当 $x=2$, $y=-3$ 时, 原式 $= 3 \times 2 - 4 \times (-3) = 18$

20.解: (1) $(-a)^5 \cdot a^3 + (-3a^4)^2$,

$$= -a^8 + 9a^8,$$

$$= 8a^8;$$

21.因式分解: $a^5b^3c^2 + 5a^4b^2c - 7a^3bc$

答案: $a^3bc(a^2b^2c + 5ab - 7)$

解: 原式 $= a^3bc(a^2b^2c + 5ab - 7)$

22. $-1^{2020} + (-2)^3 + (\pi - 1)^0 + \left(-\frac{1}{4}\right)^{-2}$,

$$= -1 - 8 + 1 + 16,$$

$$= 8;$$

23. $\frac{x}{x-2} - \frac{1-x^2}{x^2-5x+6} = \frac{2x}{x-3}$.

方程两边同乘 $(x-2)(x-3)$, 得: $x(x-3) - (1-x^2) = 2x(x-2)$

解得: $x=1$, 经检验: $x=1$ 是原分式方程的解,

所以原分式方程的解是 $x=1$.

备注: 本题考查了分式方程的解法步骤, 注意要检验根.

24.某生态柑橘园现有柑橘31吨, 租用9辆A和B两种型号的货车将柑橘一次性运往外地销售. 已知每辆车满载时, A型货车的总费用500元, B型货车的总费用480元, 每辆B型货车的运费是每辆A型货车的运费的1.2倍.

(1) 每辆A型货车和B型货车的运费各多少元?

(2) 若每辆车满载时, 租用1辆A型车和7辆B型车也能一次性将柑橘运往外地销售, 则每辆A型货车和B型车各运多少吨?

分析:

(1) 设每辆A型货车运费为 x 元, 则每辆B型车运费为 $1.2x$ 元; 根据题意, 列分式方程并求解, 即可得到答案;

(2) 根据(1)的结论, 可得A型货车和B型货车的数量; 结合题意, 设每辆A型货车运 a

吨，每辆 B 型货车运 b 吨，列二元一次方程组并求解，即可得到答案.

解题过程:

(1) 设每辆 A 型货车运费为 x 元，则每辆 B 型货车运费为 $1.2x$ 元

由题意得: $\frac{500}{x} + \frac{480}{1.2x} = 9$,

解得: $x = 100$

经检验, $x = 100$ 时, $x \neq 0$, $1.2x \neq 0$

$\therefore$ 每辆 A 型货车运费 100 元, 每辆 B 型货车的运费 120 元;

(2) 根据 (1) 的结论, A 型货车的数量为: $\frac{500}{100} = 5$ 辆

$\therefore B$ 型货车的数量为: $9 - 5 = 4$ 辆

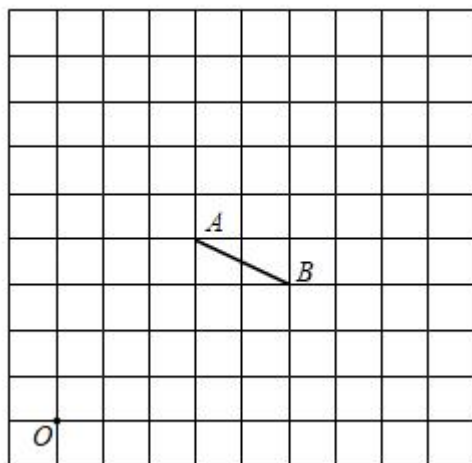
设每辆 A 型货车运 a 吨, 每辆 B 型货车运 b 吨,

由题意得: $\begin{cases} 5a + 4b = 31 \\ a + 7b = 31 \end{cases}$,

解得: $\begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases}$,

$\therefore$ 每辆 A 型货车运 3 吨, B 型货车运 4 吨.

25. 如图, 在由边长为 1 个单位长度的小正方形组成的 10×10 网格中, 已知点 O , A , B 均为网格线的交点.



(1) ①在给定的网格中, 沿 OA 方向将点 A 平移线段 OA 的长度得到点 A_1 , 沿 OB 方向将点 B 平移线段 OB 的长度得到点 B_1 , 画出线段 A_1B_1 ;

②将线段 A_1B_1 绕点 B_1 逆时针旋转 90° 得到线段 A_2B_1 . 画出线段 A_2B_1 和 AA_2 ;

(2) 求以 A 、 A_1 、 B_1 、 A_2 为顶点的四边形 $AA_1B_1A_2$ 的面积.

分析:

(1) ① 延长 OA 到 A_1 使 $AA_1 = OA$, 延长 OB 到 B_1 使 $BB_1 = OB$;

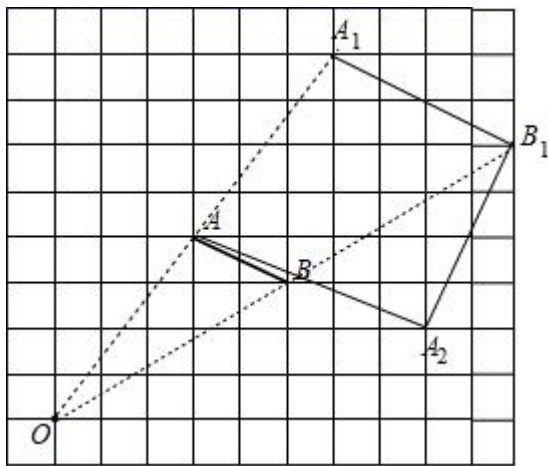
② 利用网格特点和旋转的性质画出 A_1 的对应点 A_2 即可得到线段 A_2B_1 , 然后连接 AA_2 ;

(2) 用一个矩形的面积分别减去四个直角三角形的面积去计算四边形 $AA_1B_1A_2$ 的面积.

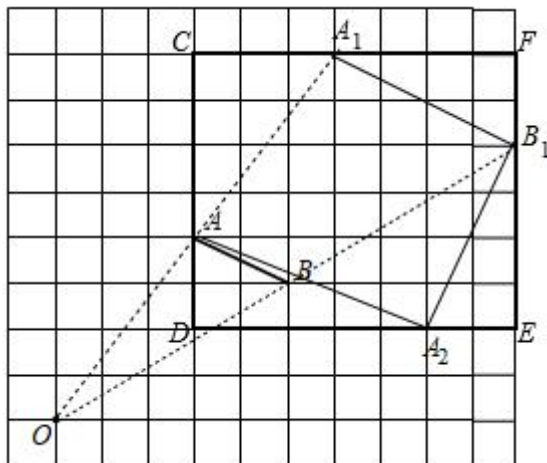
详细解析:

解: (1) ① 如图, A_1B_1 为所作;

② 如图, A_2B_1 和 AA_2 为所作;



(2) 如图,



$$S_{\text{四边形}AA_1B_1A_2} = S_{\text{长方形}CDEF} - S_{\triangle A_1B_1F} - S_{\triangle B_1A_2E} - S_{\triangle A_1AC} - S_{\triangle AA_2D}$$

$$= 7 \times 6 - \frac{1}{2} \times 4 \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 4 - \frac{1}{2} \times 4 \times 3 - \frac{1}{2} \times 2 \times 5$$

$$= 23,$$

$\therefore$ 四边形 $AA_1B_1A_2$ 的面积为 23.

考察意图：本题考查了作图－旋转变换：根据旋转的性质可知，对应角都相等都等于旋转角，对应线段也相等，由此可以通过作相等的角，在角的边上截取相等的线段的方法，找到对应点，顺次连接得出旋转后的图形，也考查了平移变换。

25.在初中数学学习阶段，我们常常会利用一些变形技巧来简化式子，解答问题.

材料一：在解决某些分式问题时，倒数法是常用的变形技巧之一，所谓倒数法，即把式子变成其倒数形式，从而运用约分化简，以达到计算目的.

例：已知： $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{4}$ ，求代数式 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 的值.

解：∵ $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{4}$ ，∴ $\frac{x^2+1}{x} = 4$

即 $\frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} = 4$ ∴ $x + \frac{1}{x} = 4$ ∴ $x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2 = 16 - 2 = 14$

材料二：在解决某些连等式问题时，通常可以引入参数“ k ”，将连等式变成几个值为 k 的等式，这样就可以通过适当变形解决问题.

例：若 $2x = 3y = 4z$ ，且 $xyz \neq 0$ ，求 $\frac{x}{y+z}$ 的值.

解：令 $2x = 3y = 4z = k$ ($k \neq 0$)

则 $x = \frac{k}{2}$ ， $y = \frac{k}{3}$ ， $z = \frac{k}{4}$ ，∴ $\frac{x}{y+z} = \frac{\frac{1}{2}k}{\frac{1}{3}k + \frac{1}{4}k} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{12}} = \frac{6}{7}$

根据材料回答问题：

(1) 已知 $\frac{x}{x^2-x+1} = \frac{1}{4}$ ，求 $x + \frac{1}{x}$ 的值.

(2) 已知 $\frac{a}{5} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}$ ，($abc \neq 0$)，求 $\frac{3b+4c}{2a}$ 的值.

(3) 若 $\frac{yz}{bz+cy} = \frac{zx}{cx+az} = \frac{xy}{ay+bx} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$ ， $x \neq 0$ ， $y \neq 0$ ， $z \neq 0$ ，且 $abc = 7$ ，求

xyz 的值.

解：(1) ∵ $\frac{x}{x^2-x+1} = \frac{1}{4}$ ，

$$\therefore \frac{x^2 - x + 1}{x} = 4,$$

$$\therefore x - 1 + \frac{1}{x} = 4,$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = 5;$$

$$(2) \therefore \text{设 } \frac{a}{5} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = k \ (k \neq 0), \text{ 则 } a = 5k, \ b = 2k, \ c = 3k,$$

$$\therefore \frac{3b+4c}{2a} = \frac{6k+12k}{10k} = \frac{18}{10} = \frac{9}{5};$$

$$(3) \text{解法一: 设 } \frac{yz}{bz+cy} = \frac{zx}{cx+az} = \frac{xy}{ay+bx} = \frac{1}{k} \ (k \neq 0),$$

$$\therefore \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = k \text{①}, \quad \frac{c}{z} + \frac{a}{x} = k \text{②}, \quad \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = k \text{③},$$

$$\text{①+②+③得: } 2 \left(\frac{b}{y} + \frac{c}{z} + \frac{a}{x} \right) = 3k,$$

$$\frac{b}{y} + \frac{c}{z} + \frac{a}{x} = \frac{3}{2}k \text{④},$$

$$\text{④ - ①得: } \frac{a}{x} = \frac{1}{2}k,$$

$$\text{④ - ②得: } \frac{b}{y} = \frac{1}{2}k,$$

$$\text{④ - ③得: } \frac{c}{z} = \frac{1}{2}k,$$

$$\therefore x = \frac{2a}{k}, \ y = \frac{2b}{k}, \ z = \frac{2c}{k} \text{ 代入 } \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{1}{k} \text{ 中, 得:}$$

$$\frac{\frac{4}{k^2}(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2} = \frac{1}{k},$$

$$\frac{4}{k^2} = \frac{1}{k},$$

$$k = 4,$$

$$\therefore x = \frac{2a}{4}, \ y = \frac{2b}{4}, \ z = \frac{2c}{4},$$

$$\therefore xyz = \frac{8abc}{64} = \frac{8 \times 7}{64} = \frac{7}{8};$$

$$\text{解法二: } \therefore \frac{yz}{bz+cy} = \frac{zx}{cx+az} = \frac{xy}{ay+bx},$$

$$\therefore \frac{bz+cy}{yz} = \frac{cx+az}{zx} = \frac{ay+bx}{xy},$$

$$\therefore \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{c}{z} + \frac{a}{x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{y},$$

$$\therefore \frac{b}{y} = \frac{a}{x}, \quad \frac{c}{z} = \frac{b}{y},$$

$$\therefore x = \frac{ay}{b}, \quad z = \frac{cy}{b},$$

$$\text{将其代入 } \frac{zx}{cx+az} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2} \text{ 中得: } \frac{\frac{cy}{b} \cdot \frac{ay}{b}}{\frac{acy}{b} + \frac{acy}{b}} = \frac{\frac{a^2y^2}{b^2} + y^2 + \frac{c^2y^2}{b^2}}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\frac{y}{2b} = \frac{y^2}{b^2}, \quad y = \frac{b}{2},$$

$$\therefore x = \frac{ab}{2b} = \frac{a}{2}, \quad z = \frac{cy}{2y} = \frac{c}{2},$$

$$\therefore xyz = \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{c}{2} = \frac{7}{8}.$$