

2025 学年第一学期初一年级期末评价数学学科试卷

时间：90 分钟 满分：100 分

一、选择题（每题 2 分，满分 12 分）

1. 下列说法中，正确的是（ ）

A. 0 是整式

B. 两个单项式的和一定是单项式

C. $2a$ 一定是偶数

D. $3(a-b)^2$ 与 $-3(b-a)^2$ 一定是同类项

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查整式、单项式、偶数和同类项的概念，整式是单项式和多项式的统称，而 0 是单项式，据此可判断 A；根据 x 与 y 的和为 $x+y$ ，但是 $x+y$ 不是单项式可判断 B；当 $a=0.5$ 时， $2a=1$ 不是偶数，据此可判断 C；所含字母相同，相同字母的指数也相同的单项式叫做同类项，据此可判断 D。

【详解】解：A、0 是单项式，故 0 是整式，原说法正确，符合题意；

B、两个单项式的和不一定是单项式，例如 x 与 y 的和为 $x+y$ ，但是 $x+y$ 不是单项式，原说法错误，不符合题意；

C、 $2a$ 不一定是偶数，例如当 $a=0.5$ 时， $2a=1$ 不是偶数，原说法错误，不符合题意；

D、 $3(a-b)^2$ 和 $-3(b-a)^2$ 不是单项式，故二者不是同类项，原说法错误，不符合题意；

故选：A.

2. 下列计算正确的是（ ）

A. $a^2 + a^2 = a^4$

B. $2ab^2 \cdot ab^2 = 2a^2b^4$

C. $6a^6 \div 2a^2 = 3a^3$

D. $(a^2b^3)^{-2} = -a^4b^6$

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了单项式乘以单项式的运算，单项式除以单项式的运算，积的乘方运算，合并同类项和负整数指数幂，根据相关运算法则求解判断即可.

【详解】解：A、 $a^2 + a^2 = 2a^2$ ，原式计算错误，不符合题意；

B、 $2ab^2 \cdot ab^2 = 2a^2b^4$ ，原式计算正确，符合题意；

C、 $6a^6 \div 2a^2 = 3a^4$ ，原式计算错误，不符合题意；

D、 $(a^2b^3)^{-2} = a^{-4}b^{-6} = \frac{1}{a^4b^6}$ ，原式计算错误，不符合题意；

故选：B.

3. 下列各式可以利用平方差公式计算的是（ ）

A. $(4p+q)(4q-p)$

B. $(m+1)(-m-1)$

C. $(-a+b)(a-b)$

D. $(x+2y)(-x+2y)$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了平方差公式，平方差公式适用于形式为 $(a+b)(a-b)$ 的表达式，即两项中一项相同，另一项互为相反数，据此特点逐一判断即可.

【详解】解：A、 $(4p+q)(4q-p)$ ，无相同项和相反项，不可用平方差公式计算，不符合题意；

B、 $(m+1)(-m-1) = -(m+1)(m+1)$ ，不符合题意平方差公式的特点，不可用平方差公式计算，不符合题意；

C、 $(-a+b)(a-b) = -(a-b)(a-b)$ ，不符合题意平方差公式的特点，不可用平方差公式计算，不符合题意；

D、 $(x+2y)(-x+2y) = (2y+x)(2y-x)$ ，相同项为 $2y$ 和 $2y$ ，相反项为 x 和 $-x$ ，可用平方差公式计算，符合题意.

故选：D.

4. 分式 $\frac{3a^2b^2}{2a^2+2b^2}$ 中的 a 和 b 同时扩大为原来的2倍，得到的分式的值是原来的（ ）

A. $\frac{1}{4}$

B. 2倍

C. 4倍

D. 无法确定

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了分式的基本性质，把原分式中的 a ， b 分别用 $2a, 2b$ 替换，计算出新分式的结果，再与原分式比较即可得到答案.

【详解】解：当 a 和 b 同时扩大2倍时，新分式为：

$$\frac{3 \cdot (2a)^2 \cdot (2b)^2}{2 \cdot (2a)^2 + 2 \cdot (2b)^2}$$

$$= \frac{3 \cdot 4a^2 \cdot 4b^2}{2 \cdot 4a^2 + 2 \cdot 4b^2}$$

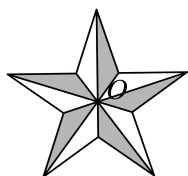
$$= \frac{48a^2b^2}{8a^2 + 8b^2}$$

$$= \frac{12a^2b^2}{2a^2 + 2b^2},$$

∴得到的分式的值是原来的 4 倍,

故选: C.

5. 把图中的五角星图案, 绕着它的中心 O 旋转, 旋转后的五角星能与自身重合, 则旋转角的度数可能是 ()



A. 36°

B. 72°

C. 108°

D. 180°

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查旋转对称图形的概念: 把一个图形绕着一个定点旋转一个角度后, 与初始图形重合, 这种图形叫做旋转对称图形, 这个定点叫做旋转对称中心, 旋转的角度叫做旋转角.

五角星图案, 可以被平分成五部分, 因而每部分被分成的圆心角是 72° , 并且圆具有旋转不变性, 因而旋转 72° 的整数倍, 就可以与自身重合, 即可得出答案.

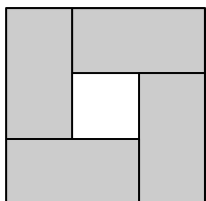
【详解】解: ∵该图形被平分为 5 部分,

$$\therefore 360^\circ \div 5 = 72^\circ,$$

∴旋转 72° 的整数倍, 就可以与自身重合,

故选 B.

6. 用四个完全一样的长方形 (长、宽分别设为 a 、 b , $a > b$) 拼成如图所示的大正方形, 已知大正方形的面积为 81, 中间空缺的小正方形的面积为 9, 那么下列关系式中不正确的是 ()



A. $a + b = 9$

B. $a - b = 3$

C. $a^2 + b^2 = 45$

D. $ab = 36$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查完全平方公式的几何背景，掌握完全平方公式的结构特征是正确解答的关键．用代数式表示图形中各个部分的面积，再由图形中面积之间的和差关系逐项进行判断即可．

【详解】解：∵大正方形的面积为 81，中间空缺的小正方形的面积为 9，

$$\therefore (a+b)^2 = 81, (a-b)^2 = 9,$$

$$\text{又} \because a > b > 0,$$

$$\therefore a+b=9, a-b=3,$$

$$\text{解得 } a=6, b=3,$$

$$\therefore ab=6 \times 3=18, a^2+b^2=36+9=45,$$

因此选项 D 符合题意，

故选：D．

二、填空题（每题 2 分，满分 32 分）

7. 计算： $\frac{1}{3}x - 9x = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-\frac{26}{3}x$

【解析】

【分析】本题考查合并同类项，直接计算系数相减即可．

【详解】解：原式 $= \frac{1}{3}x - 9x = \left(\frac{1}{3} - 9\right)x = \left(\frac{1}{3} - \frac{27}{3}\right)x = \frac{-26}{3}x = -\frac{26}{3}x$ ，

故答案为： $-\frac{26}{3}x$.

8. 若 $a - (b - c - d) = (a + c) - A$ ，那么 $A = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $b - d$

【解析】

【分析】本题主要考查了整式的加减运算，根据题意可得 $A = (a + c) - [a - (b - c - d)]$ ，据此根据整式的加减运算法则求解即可．

【详解】解：∵ $a - (b - c - d) = (a + c) - A$ ，

$$\therefore A = (a + c) - [a - (b - c - d)]$$

$$= a + c - (a - b + c + d)$$

$$= a + c - a + b - c - d$$

$$= b - d,$$

故答案为: $b - d$.

9. 计算: $(a^{-2})^{-3} \cdot a = a^{(-2) \times (-3)} \cdot a = a^6 \cdot a = a^{6+1} = a^7$, 其中, 第一步运算的依据是_____法则. (选填“积的乘方”、“幂的乘方”、“同底数幂的乘法”或“同底数幂的除法”)

【答案】 幂的乘方

【解析】

【分析】 本题主要考查幂的乘方运算, 关键是熟练掌握幂的乘方运算法则是解题的关键. 根据题意可知, 第一步运算的依据是幂的乘方运算法则即底数不变, 指数相乘, 公式为 $(a^m)^n = a^{mn}$.

【详解】 解: 计算 $(a^{-2})^{-3} \cdot a = a^{(-2) \times (-3)} \cdot a = a^6 \cdot a = a^{6+1} = a^7$, 其中第一步运算的依据是幂的乘方, 故答案为: 幂的乘方.

$$10. (-3x^2y)^2 \div \underline{\hspace{2cm}} = \frac{1}{3}x^2y.$$

【答案】 $27x^2y$

【解析】

【分析】 本题主要考查了积的乘方运算, 单项式除以单项式的运算, 根据题意只需要计算出 $(-3x^2y)^2 \div \frac{1}{3}x^2y$ 的结果即可得到答案.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & (-3x^2y)^2 \div \frac{1}{3}x^2y \\ &= 9x^4y^2 \div \frac{1}{3}x^2y \\ &= 27x^2y, \end{aligned}$$

故答案为: $27x^2y$.

11. 已知整式 $mx^2 + 7x - 20$ (m 是常数) 可以分解为两个一次因式的积, 其中一个因式是 $2x + 5$, 则另一个因式是_____.

【答案】 $3x - 4$ ## $-4 + 3x$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解的意义, 设另一个因式为一次式, 通过比较系数求解.

【详解】解：设另一个因式为 $ax+b$ ，则 $(2x+5)(ax+b) = mx^2 + 7x - 20$ 。

$$\therefore (2x+5)(ax+b) = 2ax^2 + (2b+5a)x + 5b = mx^2 + 7x - 20.$$

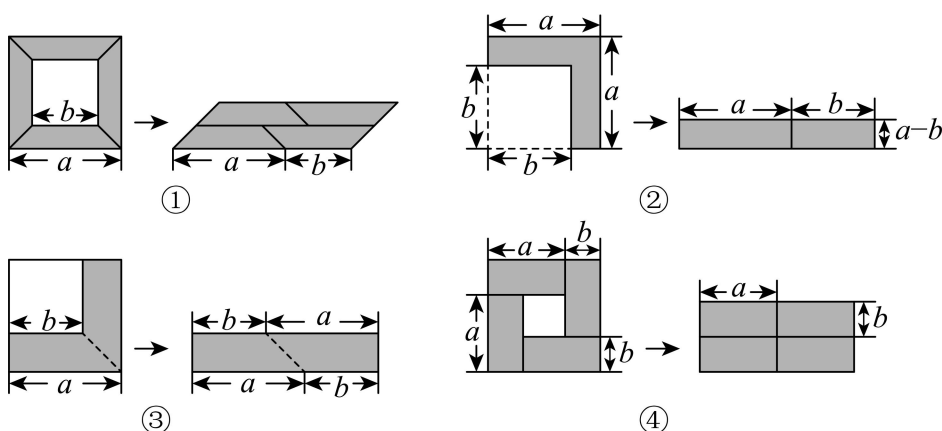
$\therefore$ 对于常数项， $5b = -20$ ，解得 $b = -4$ ；

对于一次项系数， $2b+5a = 7$ ，代入 $b = -4$ 得 $-8+5a = 7$ ，解得 $a = 3$ 。

$\therefore$ 另一个因式为 $3x-4$ 。

故答案为： $3x-4$ 。

12. 某数学兴趣小组在学习了“平方差公式”后，构造了如下图所示的四种图形，想用“等面积法”来验证“平方差公式”，以下四种方法中能够验证“平方差公式”的有_____（填图中的序号）。



【答案】①②③

【解析】

【分析】本题考查平方差公式的几何背景，掌握平方差公式 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 以及等面积法是解题的关键。

用不同的方法分别用代数式表示各个图形中左图、右图阴影部分面积即可得出等式，再进行判断即可。

【详解】解：图①中，左图阴影部分可以看作两个正方形的面积差，即 $(a^2 - b^2)$ ，拼成的右图是底为 $(a+b)$ ，高为 $(a-b)$ 的平行四边形，面积为 $(a+b)(a-b)$ ， $\therefore (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ ，故图①可以验证平方差公式；

图②中，左图阴影部分可以看作两个正方形的面积差，即 $(a^2 - b^2)$ ，拼成的右图是长为 $(a+b)$ ，宽为 $(a-b)$ 的长方形，面积为 $(a+b)(a-b)$ ， $\therefore (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ ，故图②可以验证平方差公式；

图③中，左图阴影部分可以看作两个正方形的面积差，即 $(a^2 - b^2)$ ，拼成的右图是底为 $(a+b)$ ，高为 $(a-b)$ 的平行四边形，面积为 $(a+b)(a-b)$ ， $\therefore (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ ，故图③可以验证平方差公式；

图④中，左图阴影部分可以看作两个正方形的面积差，即 $(a+b)^2 - (a-b)^2$ ，拼成的右图是长为 $2a$ ，宽为 $2b$ 的长方形，面积为 $4ab$ ， $\therefore (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$ ，故图④不能验证平方差公式；

综上所述，能验证平方差公式的有①②③，

故答案为：①②③.

13. 若 $(x^2 - 2x + m)(x^2 + x - 25)$ 的展开式中不含 x 的一次项，则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -50

【解析】

【分析】 本题考查多项式乘以多项式，通过多项式乘法，确定展开式中 x 的一次项系数，并令其为零求解 m .

【详解】 解： $(x^2 - 2x + m)(x^2 + x - 25)$ 的展开式中， x 的一次项由 m 与 x 相乘、 $-2x$ 与 -25 相乘得到，

即 x 的一次项系数为： $m \times 1 + (-2) \times (-25) = m + 50$ ，

因不含 x 的一次项，

故 $m + 50 = 0$ ，

解得 $m = -50$.

故答案为 -50 .

14. 计算： $\frac{x^{-1} - y^{-1}}{x^{-2} - y^{-2}} = \underline{\hspace{2cm}}$. (结果用不含负整数指数幂的形式表示)

【答案】 $\frac{xy}{x+y}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了通分，约分，分解因式，负整数指数幂，将负指数转化为分式形式，然后把分母利用平方差公式分解因式，再约分后把分母通分即可得到答案.

【详解】 解： $\frac{x^{-1} - y^{-1}}{x^{-2} - y^{-2}}$

$$= \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \\
&= \frac{1}{\frac{x+y}{xy}} \\
&= \frac{xy}{x+y},
\end{aligned}$$

故答案为: $\frac{xy}{x+y}$.

15. 如果分式 $\frac{(x+3)(x-1)}{x^2-1}$ 的值为零, 那么 x 的值为_____.

【答案】 -3

【解析】

【分析】 本题主要考查了分式的值为零的条件, 分式的值为零的条件是分子为零且分母不为零, 据此列式求解即可.

【详解】 解: $\because$ 分式 $\frac{(x+3)(x-1)}{x^2-1}$ 的值为零,

$$\therefore (x+3)(x-1)=0, \text{ 且 } x^2-1 \neq 0,$$

$$x+3=0 \text{ 或 } x-1=0,$$

$$\text{解得 } x=-3 \text{ 或 } x=1,$$

$$\text{当 } x=-3 \text{ 时, } x^2-1=(-3)^2-1=9-1=8 \neq 0, \text{ 符合题意;}$$

$$\text{当 } x=1 \text{ 时, } x^2-1=1^2-1=1-1=0, \text{ 不符合题意;}$$

综上所述, $x=-3$,

故答案为: -3.

16. 若 $\left(\frac{1}{2}\right)^m = 4^n$, $27^n = 3^{m+5}$, 则 $m-n$ 的值为_____.

【答案】 -3

【解析】

【分析】 本题考查了幂的乘方运算的运用, 关键是将等式两边的底数化为相同的数, 再根据“同底数幂相等则指数相等” 建立方程组求解.

【详解】 解: $\because \frac{1}{2} = 2^{-1}$, $4 = 2^2$,

$\therefore (2^{-1})^m = (2^2)^n$, 即 $2^{-m} = 2^{2n}$,

$\therefore -m = 2n$, 即 $m = -2n$;

$\because 27 = 3^3$,

$\therefore (3^3)^n = 3^{m+5}$, 即 $3^{3n} = 3^{m+5}$,

$\therefore 3n = m+5$;

解 $\begin{cases} m = -2n \\ 3n = m+5 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} m = -2 \\ n = 1 \end{cases}$,

则 $m-n = -2-1 = -3$;

故答案为: -3.

17. 已知 $x^2 - 6x + 2 = 0$, 那么 $x^2 + \frac{4}{x^2} =$ _____.

【答案】 32

【解析】

【分析】 本题考查了求代数式的值、利用完全平方公式的变形进行计算, 由题意可得: $x \neq 0$, $x^2 - 6x + 2 = 0$

两边同时除以 x 并整理得 $x + \frac{2}{x} = 6$, 再利用完全平方公式的变形将式子变为 $\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 - 4$, 代入数值进行

计算即可, 熟练掌握完全平方公式是解此题的关键.

【详解】 解: 由题意可得: $x \neq 0$,

$\because x^2 - 6x + 2 = 0$,

$\therefore x - 6 + \frac{2}{x} = 0$,

$\therefore x + \frac{2}{x} = 6$,

$$\therefore x^2 + \frac{4}{x^2} = \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 - 4 = 6^2 - 4 = 32,$$

故答案为：32.

18. 如果关于 x 的分式方程 $\frac{ax-6}{x-1} = 3$ 无解，那么 a 的值为_____.

【答案】3 或 6

【解析】

【分析】本题主要考查了分式方程的无解问题，把原方程去分母化为整式方程，化简得到 $(a-3)x=3$ ，分式方程无解需考虑整式方程无解和解为增根两种情况，据此讨论求解即可.

【详解】解： $\frac{ax-6}{x-1} = 3$

方程两边同时乘以 $x-1$ ，得 $ax-6=3(x-1)$ ，

整理得 $(a-3)x=3$ ，

当 $a-3=0$ 时，方程无解，此时 $a=3$ ；

当 $a-3 \neq 0$ 时，则 $x = \frac{3}{a-3}$ ，

$\therefore$ 原方程无解，

$\therefore$ 原分式方程有增根，

$\therefore x-1=0$ ，即 $x=1$ ，

$\therefore \frac{3}{a-3} = 1$ ，

解得 $a=6$ ，

经检验， $a=6$ 是方程 $\frac{3}{a-3} = 1$ 的解；

综上所述， a 的值为 3 或 6，

故答案为：3 或 6.

19. 若 x 满足 $(30-x)(x-10)=160$ ，则 $(30-x)^2 + (x-10)^2$ 的值为_____.

【答案】80

【解析】

【分析】本题主要考查了完全平方公式的变形求值，通过换元法，设 $a=30-x$ ， $b=x-10$ ，则可得到 $a+b=20$ ， $ab=160$ ，再由 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ 计算求解即可.

【详解】解：设 $a=30-x$ ， $b=x-10$ ，

$$\therefore a+b=(30-x)+(x-10)=30-x+x-10=20,$$

$$\therefore (30-x)(x-10)=160,$$

$$\therefore ab=160,$$

$$\therefore (30-x)^2+(x-10)^2$$

$$=a^2+b^2$$

$$=(a+b)^2-2ab$$

$$=20^2-2\times 160$$

$$=400-320$$

$$=80.$$

故答案为：80.

20. 已知 $(x+1)^{x+4}=1$, 则 $x=$ _____.

【答案】 -4 或 -2 或 0

【解析】

【详解】 分三种情况讨论：

当 $x+4=0$ ，即 $x=-4$ 时， $(x+1)^{x+4}=1$

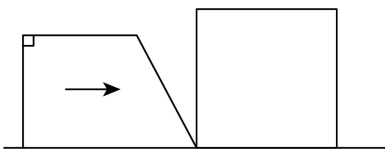
当 $x+1=1$ ，即 $x=0$ 时， $(x+1)^{x+4}=1$

当 $x+1=-1$ ，即 $x=-2$ 时， $(x+1)^{x+4}=1$ ，

综上， x 的值为 -4 或 -2 或 0，

故答案为 -4 或 -2 或 0.

21. 已知，直角梯形的上底为12厘米，下底为18厘米，高为12厘米．正方形的边长为13厘米，起始状态如图所示．若正方形固定不动，把直角梯形以2厘米/秒的速度向右沿直线平移，设直角梯形的平移时间为 t 秒，两个图形的重叠部分面积为 S 平方厘米，则当 $S=72$ 时， $t=$ _____.

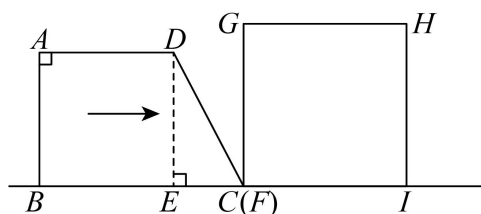


【答案】 4.5 或 12.5 ## 12.5 或 4.5

【解析】

【分析】 本题考查一元一次方程的几何应用，直角梯形，长方形的面积等知识，分①当线段 DE 未进入正方形内部时，②当线段 DE 进入正方形内部，但点 C 还在线段 FI 的延长线上，但 AB 未进入正方形内部时，③点 C 在线段 FI 的延长线上，线段 DE 在正方形内部，且 AB 进入正方形内部时，④当线段 DE 由正方形内部转为不在内部，但 AB 还在正方形内部时，⑤当线段 AB 由正方形内部转为不在内部时，共六种情况讨论列出方程或推导 $S \neq 60$ 即可得解。

【详解】 解：标记和作图如下，其中 $DE \perp BC$ 于 E ，四边形 $ABCD$ 是直角梯形，四边形 $FGHI$ 是正方形：



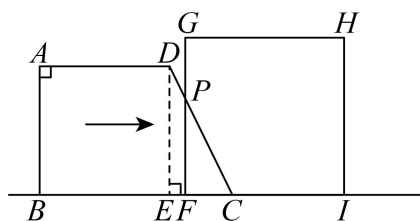
依题意可知， $AB = DE = 12\text{cm}$ ， $AD = BE = 12\text{cm}$ ， $BC = 18\text{cm}$ ，

$$\therefore CE = BC - BE = 6\text{cm}，$$

$$\therefore S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} CE \times DE = 36\text{cm}^2，S_{\text{四边形}ADEB} = AB^2 = 144\text{cm}^2，$$

①当线段 DE 未进入正方形内部时， $CF = (2t)\text{cm}$ ， $CF < CE$ ，即 $2t \leq 6$ ，

$$\therefore 0 < t \leq 3，$$

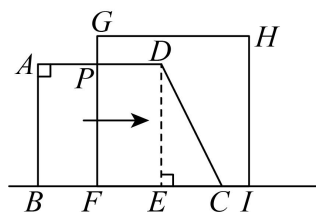


此时重合部分是 $\triangle CPF$ ， $S = S_{\triangle CPF} < S_{\triangle CDE} = 36\text{cm}^2$ ，

此时无解；

②当线段 DE 进入正方形内部，但点 C 还在线段 FI 上时， $CF = (2t)\text{cm}$ ， $CE < CF \leq FI$ ，即 $6 < 2t \leq 13$ ，

$$\therefore 3 < t \leq 6.5，$$



则重合部分是直角梯形 $CDPF$ ， $EF = DP = CF - CE = (2t - 6)\text{cm}$ ，

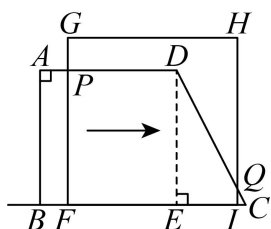
$$\therefore S = S_{\text{直角梯形}CDPF} = \frac{1}{2}(DP + CF) \times DE = \frac{1}{2}(2t - 6 + 2t) \times 12 = 72\text{cm}^2,$$

解得 $t = 4.5$;

③当点 C 在线段 FI 的延长线上, 但 AB 未进入正方形内部时, $CF = (2t)\text{cm}$, $FI < CF \leq BC$, 即

$$13 < 2t \leq 18, \quad EF = CF - CE = (2t - 6)\text{cm},$$

$$\therefore 6.5 < t \leq 9,$$



此时重合部分是五边形 $PFIQD$,

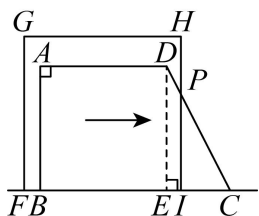
$$\therefore S = S_{\text{五边形}PFIQD} > S_{\text{四边形}DEFP} = EF \times DE = 24t - 72 > 24 \times 6.5 - 72 = 84\text{cm}^2,$$

即此时无解;

④当点 C 在线段 FI 的延长线上时, 线段 DE 在正方形内部, 且 AB 进入正方形内部时, $CF = (2t)\text{cm}$,

$$BC < CF < CE + FI, \quad \text{即 } 18 < 2t \leq 6 + 13,$$

$$\therefore 9 < t \leq 9.5,$$



则重合部分是五边形 $ADPIB$,

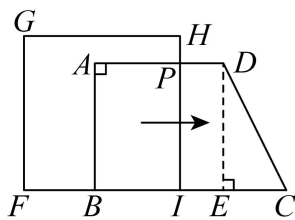
$$\therefore S = S_{\text{五边形}ADPIB} > S_{\text{四边形}ADEB} = AB^2 = 144\text{cm}^2,$$

此时无解;

⑤当线段 DE 由正方形内部转为不在内部, 但 AB 还在正方形内部时, $CF = (2t)\text{cm}$,

$$CE + FI < CF < BC + FI, \quad \text{即 } 6 + 13 < 2t \leq 18 + 13,$$

$$\therefore 9.5 < t \leq 15.5,$$



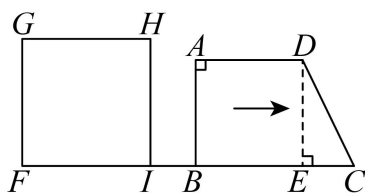
则重合部分是长方形 $ABIP$ ， $BI = FI - BF = FI - (CF - BC) = (31 - 2t) \text{ cm}$ ，

$$\therefore S = S_{\text{长方形}ABIP} = BI \times DE = (31 - 2t) \times 12 = 72,$$

解得 $t = 12.5$ ；

⑥当线段 AB 由正方形内部转为不在内部时， $CF = (2t) \text{ cm}$ ， $BC + FI \leq CF$ ，即 $18 + 13 \leq 2t$ ，

$$\therefore t \geq 15.5,$$

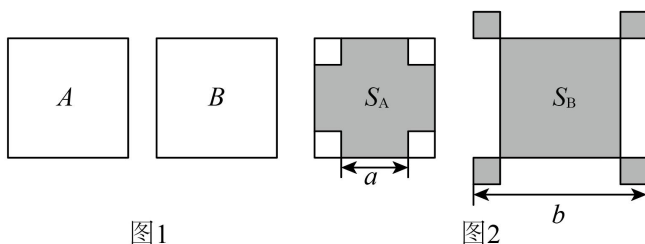


则此时重叠部分为线段或无重叠，无解；

综上所述， t 的值为 4.5 或 12.5，

故答案为：4.5 或 12.5.

22. 如图 1 所示，有两张完全相同的大正方形纸片 A 、 B ，从纸片 A 的四个角裁剪四个完全相同的小正方形，并将四个小正方形纸片拼放在纸片 B 的四个顶点处．图 2 中已标出裁剪后 A 、 B 纸片尺寸，并且记载剪后的面积分别为 S_A 、 S_B （图 2 中阴影部分），则 $S_A = \underline{\hspace{2cm}}$ ．（用含 a 、 b 的代数式表示）



【答案】 $ab + ba$

【解析】

【分析】 本题考查了乘法公式与几何图形，掌握利用代数表示面积是解题的关键．

设四个小正方形的边长为 x ，根据原正方形的边长不变可列方程求出 $x = \frac{b-a}{4}$ ，然后根据割补法可求出 S_A ．

【详解】 解：设四个小正方形的边长为 x ，

则 $a + 2x = b - 2x$,

$$\text{得 } x = \frac{b-a}{4},$$

$$\therefore S_A = (a + 2x)^2 - 4x^2 = a^2 + 4x^2 + 4ax - 4x^2 = a^2 + 4ax = a^2 + 4a \times \frac{b-a}{4} = ab,$$

故答案为: ab .

三、计算题 (满分 26 分)

23. 因式分解:

$$(1) (4a+b)^2 - (3a-3b)^2;$$

$$(2) 1 - 4x^2 - 4y^2 + 8xy;$$

$$(3) (x^2 - x)^2 - 10(x - x^2) - 24.$$

【答案】 (1) $(7a-2b)(a+4b)$

(2) $(2x-2y+1)(2y-2x+1)$

(3) $(x-2)(x+1)(x^2-x+12)$

【解析】

【分析】 本题主要考查因式分解, 选择合适的方法进行因式分解是解题的关键.

(1) 用平方差公式进行因式分解;

(2) 综合提取公因式法和公式法进行因式分解;

(3) 用十字相乘法进行因式分解.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned}\text{解: 原式} &= (4a+b)^2 - (3a-3b)^2 \\ &= [(4a+b) + (3a-3b)][(4a+b) - (3a-3b)] \\ &= (4a+b+3a-3b)(4a+b-3a+3b) \\ &= (7a-2b)(a+4b)\end{aligned}$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned}\text{解: 原式} &= 1 - 4x^2 - 4y^2 + 8xy \\ &= 1 - (4x^2 + 4y^2 - 8xy)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - 4(x^2 + y^2 - 2xy) \\
&= 1 - 4(x - y)^2 \\
&= [1 + 2(x - y)][1 - 2(x - y)] \\
&= (2x - 2y + 1)(2y - 2x + 1)
\end{aligned}$$

【小问 3 详解】

$$\begin{aligned}
\text{解: 原式} &= (x^2 - x)^2 - 10(x - x^2) - 24 \\
&= (x^2 - x)^2 + 10(x^2 - x) - 24 \\
&= [(x^2 - x) - 2][(x^2 - x) + 12] \\
&= (x^2 - x - 2)(x^2 - x + 12) \\
&= (x - 2)(x + 1)(x^2 - x + 12)
\end{aligned}$$

24. 化简:

$$\begin{aligned}
(1) & \quad (-3x^3)^2 - x^2 \cdot x^4 - (-x^2)^3; \\
(2) & \quad \left(x + 1 - \frac{1}{1-x}\right) \div \left(x - \frac{x^2}{x-1}\right).
\end{aligned}$$

【答案】(1) $9x^6$

(2) $-x$

【解析】

【分析】本题主要考查了整式的混合运算和分式的混合运算，熟知相关运算法则是解题的关键.

(1) 先计算积的乘方和同底数幂的乘法，再合并同类项即可；

(2) 先把小括号内的式子通分化简，再把除法变成乘法后约分即可得到答案.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned}
\text{解: } & (-3x^3)^2 - x^2 \cdot x^4 - (-x^2)^3 \\
&= 9x^6 - x^6 - (-x^6) \\
&= 9x^6 - x^6 + x^6 \\
&= 9x^6;
\end{aligned}$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned} \text{解: } & \left(x+1-\frac{1}{1-x}\right) \div \left(x-\frac{x^2}{x-1}\right) \\ & = \left(x+1+\frac{1}{x-1}\right) \div \left(x-\frac{x^2}{x-1}\right) \\ & = \frac{x^2-1+1}{x-1} \div \frac{x^2-x-x^2}{x-1} \\ & = \frac{x^2}{x-1} \div \frac{-x}{x-1} \\ & = \frac{x^2}{x-1} \cdot \frac{x-1}{-x} \\ & = -x. \end{aligned}$$

25. 解下列关于 x 的分式方程: $\frac{5x-4}{2x-4} = \frac{2x+5}{3x-6} - \frac{1}{2}$.

【答案】无解

【解析】

【分析】本题考查了分式方程的解法, 利用去分母将原方程化为整式方程, 解得 x 的值后并检验即可.

【详解】解: 原方程整理得 $\frac{5x-4}{2(x-2)} = \frac{2x+5}{3(x-2)} - \frac{1}{2}$

方程两边同乘 $6(x-2)$ 得: $3(5x-4) = 2(2x+5) - 3(x-2)$,

解得: $x=2$,

检验: 当 $x=2$ 时, $6(x-2)=0$,

则 $x=2$ 是分式方程的增根,

故原方程无解.

四、简答题 (满分 30 分)

26. 先化简, 再求值: $(x+y)(x-y+1) - (x-y)^2 + 2y(y-x)$, 其中 $x = \frac{24}{25}$, $y = -\frac{23}{24}$.

【答案】

$$x+y, \frac{1}{600}$$

【解析】

【分析】本题主要考查了整式的化简求值，先根据多项式乘以多项式和单项式乘以多项式的运算法则以及完全平方公式去括号，然后合并同类项化简，最后代入求值即可.

【详解】解： $(x+y)(x-y+1)-(x-y)^2+2y(y-x)$

$$= x^2 - xy + x + xy - y^2 + y - (x^2 - 2xy + y^2) + 2y^2 - 2xy$$

$$= x^2 - xy + x + xy - y^2 + y - x^2 + 2xy - y^2 + 2y^2 - 2xy$$

$$= x + y,$$

当 $x = \frac{24}{25}$, $y = -\frac{23}{24}$ 时, 原式 $= \frac{24}{25} + \left(-\frac{23}{24}\right) = \frac{576}{600} - \frac{575}{600} = \frac{1}{600}$.

27. 下列 3×3 网格图都是由 9 个相同的小正方形组成，每个网格图中有 3 个小正方形已涂上阴影，请在余下的 6 个空白小正方形中，按下列要求涂上阴影：

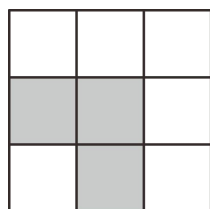


图1

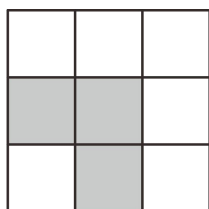


图2

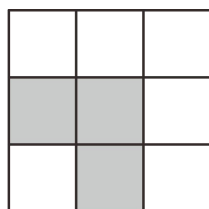


图3

- (1) 选取 1 个涂上阴影，使 4 个阴影小正方形组成一个轴对称图形，但不是中心对称图形；
- (2) 选取 1 个涂上阴影，使 4 个阴影小正方形组成一个中心对称图形，但不是轴对称图形；
- (3) 选取 2 个涂上阴影，使 5 个阴影小正方形组成既是一个中心对称图形，又是轴对称图形.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

(3) 见解析

【解析】

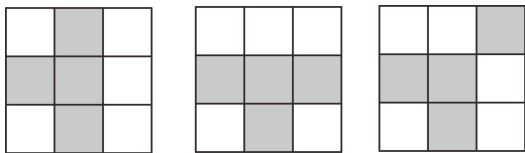
【分析】(1) 轴对称图形定义：如果一个平面图形沿着一条直线折叠后，直线两旁的部分能够互相重合，那么这个图形叫做轴对称图形，据此涂上阴影即可；

(2) 中心对称图形定义：把一个图形绕着某一点旋转 180° ，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形叫做中心对称图形，据此涂上阴影即可；

(3) 根据中心对称图形和轴对称图形定义涂上阴影即可.

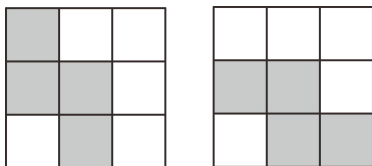
【小问 1 详解】

解：画出下列一种即可：



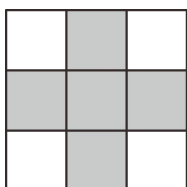
【小问 2 详解】

解：画出下列一种即可：



【小问 3 详解】

解：画出下列图形即可：



【点睛】 本题主要考查轴对称图形和中心对称图形，掌握轴对称图形和中心对称图形定义

是解题的关键.

28. 定义：若两个分式的和为 n (n 为正整数)，则称这两个分式互为“ n 阶分式”，例如：

$$\frac{3}{x+1} + \frac{3x}{1+x} = \frac{3(1+x)}{1+x} = 3, \text{ 则分式 } \frac{3}{x+1} \text{ 与 } \frac{3x}{1+x} \text{ 互为“3 阶分式”}.$$

(1) 填空：分式 $\frac{10x}{3+2x}$ 与 $\frac{15}{3+2x}$ 互为“_____阶分式”；

(2) 已知分式 $\frac{12x+3}{2x+3}$ 与 A 互为“4 阶分式”，求分式 A ；

(3) 已知分式 $B = \frac{2x+1}{x-2}$ 、 $C = \frac{M}{x^2+2x-8}$ ，且 B 与 $5C$ 互为“2 阶分式”. 求代数式 M (用含 x 的式子表示).

【答案】 (1) 5 (2) $\frac{-4x+9}{2x+3}$

(3) $M = -x - 4$

【解析】

【分析】 本题主要考查了分式的加减运算，正确理解“ n 阶分式”的定义是解题的关键.

(1) 求出分式 $\frac{10x}{3+2x}$ 与 $\frac{15}{3+2x}$ 的和，再根据定义可得答案；

(2) 根据定义可得 $\frac{12x+3}{2x+3} + A = 4$ ，则 $A = 4 - \frac{12x+3}{2x+3}$ ，据此计算求解即可；

(3) 根据定义可得 $B + 5C = 2$ ，即 $\frac{2x+1}{x-2} + \frac{5M}{x^2+2x-8} = 2$ ，据此去分母求出 M 即可.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } \frac{10x}{3+2x} + \frac{15}{3+2x} = \frac{10x+15}{3+2x} = \frac{5(2x+3)}{3+2x} = 5,$$

$$\therefore \text{分式 } \frac{10x}{3+2x} \text{ 与 } \frac{15}{3+2x} \text{ 互为“5阶分式”};$$

【小问2详解】

$$\text{解: } \because \text{分式 } \frac{12x+3}{2x+3} \text{ 与 } A \text{ 互为“4阶分式”,}$$

$$\therefore \frac{12x+3}{2x+3} + A = 4,$$

$$\begin{aligned} \therefore A &= 4 - \frac{12x+3}{2x+3} \\ &= \frac{8x+12}{2x+3} - \frac{12x+3}{2x+3} \\ &= \frac{-4x+9}{2x+3}; \end{aligned}$$

【小问3详解】

$$\text{解: } \because B = \frac{2x+1}{x-2}, C = \frac{M}{x^2+2x-8}, \text{ 且 } B \text{ 与 } 5C \text{ 互为“2阶分式”,}$$

$$\therefore B + 5C = 2, \text{ 即 } \frac{2x+1}{x-2} + \frac{5M}{x^2+2x-8} = 2,$$

$$\therefore \frac{2x+1}{x-2} + \frac{5M}{(x+4)(x-2)} = 2,$$

$$\therefore (2x+1)(x+4) + 5M = 2(x+4)(x-2),$$

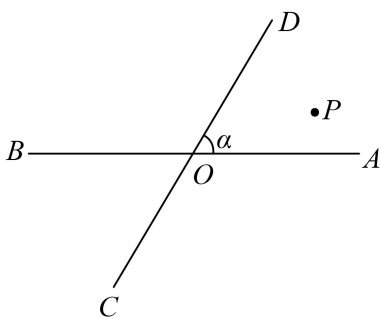
$$\therefore 2x^2 + x + 8x + 4 + 5M = 2(x^2 + 2x - 8),$$

$$\therefore 2x^2 + 9x + 4 + 5M = 2x^2 + 4x - 16,$$

$$\therefore 5M = -5x - 20,$$

$$\therefore M = -x - 4.$$

29. 已知: 直线 AB 、 CD 相交于点 O , 且 $\angle AOD = \alpha$ ($0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$), 点 P 是 $\angle AOD$ 内任意一点. 点 P 依次轮流沿直线 AB 、 CD 翻折, 将点 P 关于 AB 对称的点记为点 P_1 , 点 P_1 关于 CD 对称的点记为点 P_2 , 点 P_2 关于 AB 对称的点记为点 P_3 , ……



(1) 当 $\alpha = 60^\circ$ 时, 如图, 点 P 为图中所给的位置,

①分别画出点 P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 , 并连接 OP 、 OP_1 、 OP_2 、 OP_3 、 OP_4 ;

②设 $\angle AOP = \beta$, 分别求此时 $\angle POP_2$ 、 $\angle P_2OP_4$ 的大小;

(2) 填空: 由 (1) 可知, 经过两次翻折 (对称轴不平行) 后的图形可以看作是原图形经过一次_____ (选填 “平移”、“旋转”、“翻折”、“中心对称”) 得到;

(3) 填空: 若点 P 经过以上六次翻折后得到的点 P_6 与点 P 中心对称, 则 $\alpha =$ _____;

(4) 如果按照这样的方式 n 次翻折后, 得到的点 P_n 第一次落入 $\angle AOD$ 内, 问: 当 α 与 n 满足什么关系时, 对任意的点 P 得到的点 P_n 都刚好与点 P 重合? (直接写出结果, 不要求写出过程)

【答案】 (1) ①图见解析; ② $\angle POP_2$ 、 $\angle P_2OP_4$ 的大小均为 120°

(2) 旋转 (3) 30°

(4) $n\alpha = 360^\circ$

【解析】

【分析】 本题考查翻折问题以及角度的和差计算, 准确理解题意是解题的关键.

(1) ①按要求作图即可; ②根据翻折得性质, 对角度求解即可;

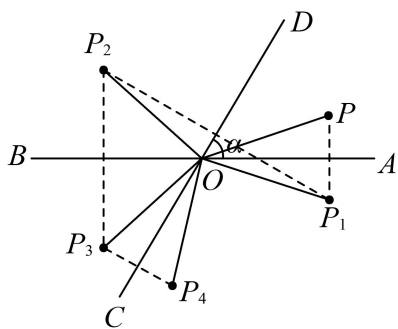
(2) 观察图象, 即可得出结果;

(3) 得出翻折和旋转之间的联系, 即可求出 α 的值;

(4) 根据翻折与旋转之间的联系, 可得出结果.

【小问 1 详解】

解: ①作图如下:



$$\textcircled{2} \because \angle AOP = \beta,$$

$$\therefore \angle AOP_1 = \beta,$$

$$\therefore \angle DOP_2 = \angle DOP_1 = 60^\circ + \beta,$$

$$\therefore \angle POP_2 = \angle P_1OP_2 - \angle P_1OP = 2\angle DOP_2 - 2\angle AOP_1 = 120^\circ;$$

$$\because \angle BOP_2 = \angle BOP_3, \quad \angle COP_3 = \angle COP_4,$$

$$\therefore \angle P_2OP_4 = \angle BOP_2 + \angle BOP_3 + \angle COP_3 + \angle COP_4 = 2\angle BOP_3 + 2\angle COP_3 = 2\angle BOC,$$

$$\because \angle BOC = \angle AOD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle P_2OP_4 = 2 \times 60^\circ = 120^\circ.$$

【小问 2 详解】

解：观察图象可判断，经过两次翻折（对称轴不平行）后的图形可以看作是原图形经过一次旋转后得到.

【小问 3 详解】

解：观察（1）中的图形，得出以下规律，

第一次翻折后相当于顺时针旋转 2β 得到；

第二次翻折后相当于逆时针旋转 2α 得到；

第三次翻折后相当于顺时针旋转 $2\alpha + 2\beta$ 得到；

第四次翻折后相当于逆时针旋转 4α 得到；

第五次翻折后相当于顺时针旋转 $4\alpha + 2\beta$ 得到；

第六次翻折后相当于逆时针旋转 6α 得到；

$$\because P_6 \text{ 与点 } P \text{ 中心对称},$$

$$\text{即 } 6\alpha = 180^\circ,$$

$\therefore \alpha = 30^\circ$.

【小问 4 详解】

解：结合规律，得 n 次翻折可视为第 $\frac{n}{2}$ 组两次翻折，

即相当于逆时针旋转 $n\alpha$ ，

要使 P_n 与 P 重合，绕点 O 旋转的总角度必须是 360° 的整数倍。

又因为题目要求是第一次落入 $\angle AOD$ 内且刚好重合，所以取最小的整数倍，

即： $n\alpha = 360^\circ$.