

2025 学年第一学期期末质量调研卷

七年级数学学科

(时间: 90 分钟 分值: 100 分)

一、填空题 (本大题共 14 题, 每题 2 分, 满分 28 分)

1. 整式 $3x^2y - x - \frac{1}{2}$ 的次数是_____次, 一次项系数是_____.

【答案】 ①. 三 ②. -1

【解析】

【分析】 本题考查了多项式的定义, 几个单项式的和 (或者差), 叫做多项式, 多项式中的每个单项式叫做多项式的项, 这些单项式中的最高项的次数, 就是这个多项式的次数, 其中多项式中不含字母的项叫做常数项, 根据多项式的相关定义即可得出结果, 熟练掌握多项式的定义是解此题的关键.

【详解】 解: 整式 $3x^2y - x - \frac{1}{2}$ 的次数是三次, 一次项系数是 -1,

故答案为: 三, -1.

2. 若关于 x 、 y 的单项式 $-2x^{m+2}y^4$ 与 $3xy^n$ 是同类项, 则 m^n 的值为_____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 本题考查了同类项的定义, 根据同类项的定义, 所含字母相同, 并且相同字母的指数也相同, 列出方程求解 m 和 n 的值, 再计算 m^n 即可得出结果, 熟练掌握同类项的定义是解此题的关键.

【详解】 解: $\because$ 关于 x 、 y 的单项式 $-2x^{m+2}y^4$ 与 $3xy^n$ 是同类项,

$$\therefore m+2=1, \quad n=4,$$

$$\therefore m=-1,$$

$$\therefore m^n = (-1)^4 = 1,$$

故答案为: 1.

3. 若分式 $\frac{x^2-4}{x+2}$ 有意义, 则 x 满足_____.

【答案】 $x \neq -2$

【解析】

【分析】根据分式有意义的条件，即分母不能为零，求解即可.

【详解】解：若分式 $\frac{x^2-4}{x+2}$ 要有意义，

则 $x+2 \neq 0$,

$\therefore x \neq -2$,

故答案为: $x \neq -2$.

【点睛】本题考查了分式有意义的条件，熟知分式有意义的条件，即分母不能为零，是解题的关键.

4. 若 $-x^2+x-3$ 减去一个整式的差是 $4x^2-3x+4$ ，则这个整式是_____.

【答案】 $-5x^2+4x-7$

【解析】

【分析】本题考查了整式的减法，根据减法规则，减数等于被减数减去差，因此所求整式为

$(-x^2+x-3)-(4x^2-3x+4)$ ，再通过整式加减运算求解即可，熟练掌握运算法则是解此题的关键.

【详解】解：由题意可得：这个整式 $=(-x^2+x-3)-(4x^2-3x+4)$

$$= -x^2+x-3-4x^2+3x-4$$

$$= -5x^2+4x-7,$$

故答案为: $-5x^2+4x-7$.

5. 计算: $(x^4+5x^3-6x^2) \div \frac{1}{3}x^2 =$ _____.

【答案】 $3x^2+15x-18$

【解析】

【分析】本题考查了多项式除以单项式，根据多项式除以单项式的运算法则计算即可得出结果，熟练掌握运算法则是解此题的关键.

【详解】解: $(x^4+5x^3-6x^2) \div \frac{1}{3}x^2$

$$= x^4 \div \frac{1}{3}x^2 + 5x^3 \div \frac{1}{3}x^2 - 6x^2 \div \frac{1}{3}x^2$$

$$= 3x^2+15x-18,$$

故答案为: $3x^2+15x-18$.

6. 因式分解: $x^2 - 10xy - 24y^2 =$ _____.

【答案】 $(x-12y)(x+2y)$

【解析】

【分析】此题主要考查因式分解. 本题为二次三项式的因式分解, 通过寻找两个数满足和为 -10 、积为 -24 , 进而分解.

【详解】解: $x^2 - 10xy - 24y^2 = (x-12y)(x+2y)$,

故答案为: $(x-12y)(x+2y)$.

7. 若关于 x 的整式 $ax^4 + x^2 + 16$ 是某一个整式的平方, 则 a 的值是 _____.

【答案】 $\frac{1}{64}$

【解析】

【分析】本题考查了完全平方公式, 熟练掌握完全平方公式的结构特点是解本题的关键.

根据完全平方公式的结构特点, 设原式为某个整式的平方, 通过比较系数建立方程组求解

【详解】设整式为 $px^2 + qx + r$, 则其平方为 $p^2x^4 + 2pqx^3 + (2pr + q^2)x^2 + 2qrx + r^2$, 与原式 $ax^4 + x^2 + 16$ 比较系数, 得: $p^2 = a$, $2pq = 0$, $2pr + q^2 = 1$, $2qr = 0$, $r^2 = 16$

由 $r^2 = 16$ 得 $r = \pm 4$,

由 $2pq = 0$ 且 $p \neq 0$ 得 $q = 0$,

代入 $2pr + q^2 = 1$ 得 $2pr = 1$,

将 $r = \pm 4$ 代入得 $2p \times (\pm 4) = 1$,

即 $\pm 8p = 1$,

解得 $p = \pm \frac{1}{8}$,

则 $a = p^2 = \left(\pm \frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64}$,

故答案为: $\frac{1}{64}$.

8. 计算: $(x^{-1} - y^{-1})^{-1} =$ _____.

【答案】 $\frac{xy}{y-x}$

【解析】

【分析】 本题考查分式的化简，先将负指数化为分数形式，然后通分计算差，最后取倒数即可.

【详解】 解：原式 $= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)^{-1}$

$$= \left(\frac{y-x}{xy} \right)^{-1}$$
$$= \frac{xy}{y-x}.$$

故答案为： $\frac{xy}{y-x}$.

9. 将分式 $\frac{x^4}{3y(m^2+n^2)}$ 表示成不含有分母的形式：_____.

【答案】 $3^{-1}x^4y^{-1}(m^2+n^2)^{-1}$

【解析】

【分析】 本题考查了负整数指数幂，根据负整数指数幂的意义进行变形即可，熟练掌握运算法则是解题的关键；

【详解】 解：根据负整数指数幂的意义，分母中的常数 3 可写为 3^{-1} ，字母 y 可写为 y^{-1} ， (m^2+n^2) 可写为 $(m^2+n^2)^{-1}$ ，

因此原式化为 $3^{-1}x^4y^{-1}(m^2+n^2)^{-1}$ ，

故答案为： $3^{-1}x^4y^{-1}(m^2+n^2)^{-1}$.

10. 以下图形中，既是轴对称图形，又是中心对称图形的有_____. (填序号即可)

①圆；②长方形；③等边三角形；④平行四边形；⑤线段；⑥角.

【答案】 ①②⑤

【解析】

【分析】 本题考查了中心对称图形与轴对称图形的知识，把一个图形绕某一点旋转 180° 后，能够与原图形重合，那么这个图形就叫做中心对称图形，如果一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，

这个图形就叫做轴对称图形，根据轴对称图形与中心对称图形的概念逐项分析即可得出结果，熟练掌握轴对称图形与中心对称图形的概念，是解题的关键.

- 【详解】解：①圆是轴对称图形，任何直径所在直线都是对称轴，也是中心对称图形，圆心是对称中心；
②长方形是轴对称图形，有两条对称轴（对边中点的连线），也是中心对称图形，对角线交点为对称中心；
③等边三角形是轴对称图形，有三条对称轴，但不是中心对称图形；
④平行四边形不是轴对称图形，但它是中心对称图形，对角线交点为对称中心；
⑤线段是轴对称图形，其垂直平分线是对称轴，也是中心对称图形，中点为对称中心；
⑥角是轴对称图形，角平分线是对称轴，但不是中心对称图形.

故答案为：①②⑤.

11. 如果关于 x 的方程 $\frac{x-1}{x-2} = 3 + \frac{a}{x-2}$ 无解，那么 a 的值是_____.

【答案】1

【解析】

【分析】本题考查了根据分式方程的解的情况求参数，分式方程无解的可能情况是整式方程无解或整式方程的解为增根. 本题中整式方程恒有解，因此只需令解为增根即可，熟练掌握此知识点并灵活运用是解此题的关键.

【详解】解：去分母可得： $x-1=3(x-2)+a$,

整理可得： $x-1=3x-6+a$,

$\therefore -2x+5-a=0$,

$\therefore x = \frac{5-a}{2}$,

当 $x=2$ 时，原方程无解，

故 $\frac{5-a}{2} = 2$,

解得： $a=1$,

故答案为：1.

12. 若 $2^x + 5^x = a$ ， $10^x = b$ （ x 为整数），则 $2^{-2x} + 5^{-2x}$ 的值是_____.（用含 a 、 b 的代数式表示结果）

【答案】 $\frac{a^2 - 2b}{b^2}$

【解析】

【分析】根据题意，得 $2^{-2x} + 5^{-2x} = \frac{1}{(2^x)^2} + \frac{1}{(5^x)^2} = \frac{(2^x)^2 + (5^x)^2}{(2^x)^2 \cdot (5^x)^2}$ ，公式变形后代入计算解答即可。

本题考查了幂的运算，完全平方公式的变形计算，熟练掌握公式，正确变形是解题的关键。

【详解】解：由 $2^x + 5^x = a$ ，得 $(2^x + 5^x)^2 = a^2$ ，

$$\text{故 } (2^x)^2 + 2 \cdot 2^x \cdot 5^x + (5^x)^2 = a^2,$$

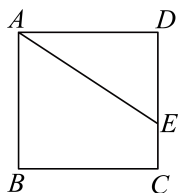
$$\text{又 } 2^x \cdot 5^x = 10^x = b,$$

$$\text{所以 } (2^x)^2 + (5^x)^2 = a^2 - 2b, \quad (2^x \cdot 5^x)^2 = (2^x)^2 (5^x)^2 = (10^x)^2 = b^2,$$

$$\text{故 } 2^{-2x} + 5^{-2x} = \frac{1}{2^{2x}} + \frac{1}{5^{2x}} = \frac{(2^x)^2 + (5^x)^2}{(2^x)^2 (5^x)^2} = \frac{a^2 - 2b}{b^2},$$

$$\text{故答案为: } \frac{a^2 - 2b}{b^2}.$$

13. 如图，正方形 $ABCD$ 中，点 E 是 DC 边上一点， $DE = 2a$ ， $EC = a$ ， $\triangle ADE$ 经过某一种图形的运动得到 $\triangle ABF$ ，点 E 落在直线 BC 上的点 F 处，则 CF 的长度是_____。（用含 a 的代数式表示）



【答案】 a 或 $5a$

【解析】

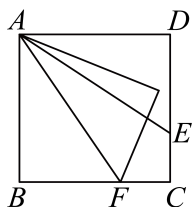
【分析】本题考查了勾股定理，旋转的性质，由题意可得： $\angle D = \angle B = 90^\circ$ ，

$AB = BC = AD = CD = DE + CE = 3a$ ，则 $AE = \sqrt{13}a$ ，分两种情况：当点 F 落在线段 BC 上时；当点 F 落在线段 CB 的延长线上时；分别结合旋转的性质以及勾股定理求解即可得出结果，熟练掌握以上知识点并灵活运用是解此题的关键。

【详解】解：由题意可得： $\angle D = \angle B = 90^\circ$ ， $AB = BC = AD = CD = DE + CE = 3a$ ，

$$\therefore AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{(3a)^2 + (2a)^2} = \sqrt{13}a,$$

如图，当点 F 落在线段 BC 上时，

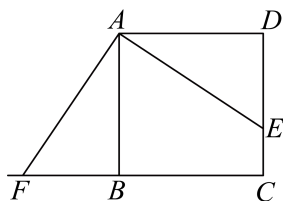


由旋转的性质可得 $AF = AE = \sqrt{13}a$,

$$\therefore BF = \sqrt{AF^2 - AB^2} = 2a,$$

$$\therefore CF = BC - BF = a,$$

如图, 当点 F 落在线段 CB 的延长线上时,



此时点 B 和点 D 重合,

由旋转的性质可得 $BF = DE = 2a$,

$$\therefore CF = BF + BC = 5a,$$

综上所述, CF 的长度是 a 或 $5a$,

故答案为: a 或 $5a$.

14. 将 $\triangle ABC$ 绕着点 A 逆时针旋转 60° 得 $\triangle ADE$, 点 B 的对应点是点 D , 点 C 的对应点是点 E . 如果 $\angle EAB = 5\angle DAC$, 那么 $\angle BAC$ 的度数是_____.

【答案】 40° 或 90°

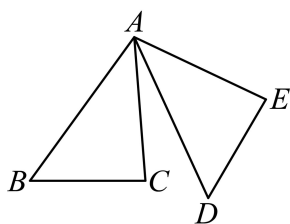
【解析】

【分析】 本题考查旋转的性质, 熟练掌握分类讨论的思想是解题的关键. 根据旋转的性质, 可得旋转角相等, 即 $\angle BAD = \angle CAE = 60^\circ$, 再根据角度和差关系, 结合条件 $\angle EAB = 5\angle DAC$, 列出方程求解, 注意要分两种情况进行讨论.

【详解】 解: 由旋转的性质, 得 $\angle BAD = \angle CAE = 60^\circ$,

设 $\angle BAC = \alpha$,

(i) 如图所示,

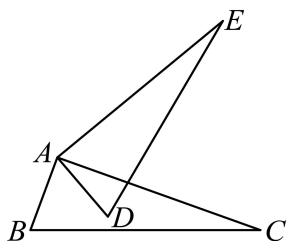


当 $\alpha < 60^\circ$ 时, 则 $\angle DAC = 60^\circ - \alpha$, $\angle EAB = 60^\circ + \alpha$,

根据题意, $60^\circ + \alpha = 5 \times (60^\circ - \alpha)$,

解得 $\alpha = 40^\circ$,

(ii) 如图所示,



当 $\alpha > 60^\circ$ 时, 则 $\angle DAC = \alpha - 60^\circ$, $\angle EAB = 60^\circ + \alpha$,

根据题意, $60^\circ + \alpha = 5 \times (\alpha - 60^\circ)$,

解得 $\alpha = 90^\circ$

综上所述, $\angle BAC$ 的度数是 40° 或 90° ,

故答案为 40° 或 90° .

二、选择题 (本大题共 4 题, 每题 3 分, 满分 12 分)

15. 下列代数式中, 是单项式的是 ()

A. $\frac{x-3y}{4}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{2}{x}$

D. $a+b$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了单项式的定义, 由数与字母的积和字母与字母的积组成的代数式叫做单项式, 由此逐项分析即可得出结果, 熟练掌握单项式的定义是解此题的关键.

【详解】 解: A、 $\frac{x-3y}{4} = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}y$, 是多项式, 不是单项式, 故不符合题意;

B、 $\frac{1}{6}$ 是单项式, 符合题意;

C、 $\frac{2}{x}$ 分母含字母, 不是单项式, 故不符合题意;

D、 $a+b$ 是多项式，不是单项式，故不符合题意；

故选：B.

16. 下列各式从左到右变形错误的是 ()

A. $\frac{a+2}{a^2-4} = \frac{a+2}{(a+2)(a-2)} = \frac{1}{a-2}$

B. $\frac{x^2-y^2}{x+y} = \frac{(x^2-y^2)(x-y)}{(x+y)(x-y)} = \frac{(x^2-y^2)(x-y)}{x^2-y^2} = x-y$

C. $\frac{2b}{3a} = \frac{2b+4b}{3a+6a}$

D. $\frac{4x^2}{2xy} = \frac{2x}{y}$

【答案】B

【解析】

【分析】此题考查分式的变形，熟练掌握分式的基本性质和分式的求值是解题的关键. 通过化简分式验证每个选项的正确性，选项 B 的变形中，分子分母同乘了 $(x-y)$ ，但未考虑 $x-y \neq 0$ 的条件，不符合分式的基本性质.

【详解】解：选项 A: $\frac{a+2}{a^2-4} = \frac{a+2}{(a+2)(a-2)} = \frac{1}{a-2}$ ，其中 $a^2-4 \neq 0$ 即 $a \neq \pm 2$ ，变形后分母为 $a-2$ ，

符合分式的基本性质，故不符合题意；

选项 B: $\frac{x^2-y^2}{x+y} = \frac{(x^2-y^2)(x-y)}{(x+y)(x-y)} = \frac{(x^2-y^2)(x-y)}{x^2-y^2} = x-y$ ，变形中分子分母同乘 $(x-y)$ ，但未保证

$x-y \neq 0$ ，若 $x-y=0$ 则中间步骤分母为零，不符合分式的基本性质，故符合题意；

选项 C: $\frac{2b}{3a} = \frac{2b+4b}{3a+6a} = \frac{6b}{9a} = \frac{2b}{3a}$ ，等式成立，变形正确，故不符合题意；

选项 D: $\frac{4x^2}{2xy} = \frac{4x^2 \div 2x}{2xy \div 2x} = \frac{2x}{y}$ ，符合分式的基本性质，故不符合题意.

故选 B.

17. 下列说法错误的是 ()

A. 图形的平移后，每组对应点之间的距离相等

B. 图形的旋转后，对应点到旋转中心的距离相等

C. 两个图形如果关于一条直线成轴对称，那么由这两个图形所组成的图形是轴对称图形

D. 两个图形关于一条直线成轴对称，连接对称点的线段和对称轴互相垂直平分

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了平移的性质，旋转的性质，轴对称图形的定义及性质，利用平移的性质，旋转的性质，轴对称图形的定义及性质逐一分析探讨得出答案即可.

【详解】解：A、图形的平移后，每组对应点之间的距离相等，故原说法正确，不符合题意；

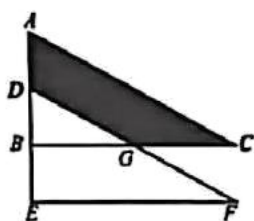
B、图形的旋转后，对应点到旋转中心的距离相等，故原说法正确，不符合题意；

C、两个图形如果关于一条直线成轴对称，那么由这两个图形所组成的图形是轴对称图形，故原说法正确，不符合题意；

D、两个图形关于一条直线成轴对称，连接对称点的线段被对称轴所在直线垂直平分，故原说法错误，符合题意；

故选：D.

18. 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 沿射线 AB 方向平移至 $\triangle DEF$ ，如果 $GC = 6$ 厘米， $EF = 12$ 厘米，四边形 $ADGC$ 的面积为 27 平方厘米，那么平移的距离是（ ）



A. 2 厘米

B. 3 厘米

C. 4 厘米

D. 5 厘米

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了平移的性质，解题的关键是熟练掌握平移的不变性.

由平移得， $S_{\triangle DEF} = S_{\triangle ABC}$ ， $BC = EF = 12\text{cm}$ ，则 $S_{\text{四边形}BGFE} = S_{\text{四边形}ADGC}$ ，再由梯形面积公式求解即可.

【详解】解：由平移得， $S_{\triangle DEF} = S_{\triangle ABC}$ ， $BC = EF = 12\text{cm}$ ，

$$\therefore S_{\triangle DEF} - S_{\triangle BDE} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle BDE}, \quad BG = BC - CG = 12 - 6 = 6\text{cm}$$

$$\therefore S_{\text{四边形}BGFE} = S_{\text{四边形}ADGC} = 27 = \frac{1}{2}(BG + EF) \times BE = \frac{1}{2}(6 + 12) \times BE,$$

$$\therefore BE = 3\text{cm},$$

∴ 平移的距离为 3 厘米,

故选: B.

三、简答题 (本大题共 6 题, 第 19、20、21、22 题每题 5 分, 第 23、24 题每题 6 分, 满分 32 分)

19. 计算: $(2x+3)(2x-3)(4x^2+9)$.

【答案】 $16x^4-81$

【解析】

【分析】 本题考查了整式的混合运算, 利用平方差公式进行计算即可得出结果, 熟练掌握平方差公式是解此题的关键.

【详解】 解: $(2x+3)(2x-3)(4x^2+9)$
 $= (4x^2-9)(4x^2+9)$
 $= 16x^4-81.$

20. 计算: $(3a^2b)^3 \cdot (2ab^2)^{-2} - a^4b^{-1}$.

【答案】 $\frac{23a^4}{4b}$

【解析】

【分析】 本题考查了幂的混合运算, 根据幂的乘方、积的乘方、负整数指数幂以及同底数幂相乘的运算法则计算即可得出结果, 熟练掌握运算法则是解此题的关键.

【详解】 解: $(3a^2b)^3 \cdot (2ab^2)^{-2} - a^4b^{-1}$
 $= (3a^2b)^3 \cdot \frac{1}{(2ab^2)^2} - \frac{a^4}{b}$
 $= 27a^6b^3 \cdot \frac{1}{4a^2b^4} - \frac{a^4}{b}$
 $= \frac{27a^4}{4b} - \frac{a^4}{b}$
 $= \frac{23a^4}{4b}.$

21. 因式分解: $2ax^2-12axy+18ay^2$

【答案】 $2a(x-3y)^2$

【解析】

【分析】 此题涉及到了因式分解，首先提取公因式，再运用完全平方公式即可.

【详解】 $2ax^2 - 12axy + 18ay^2 = 2a(x^2 - 6xy + 9y^2) = 2a(x-3y)^2$

【点睛】 此题考查因式分解，解题关键在于掌握完全平方公式.

22. 因式分解： $9x^2 - 3x + y - y^2$.

【答案】 $(3x-y)(3x+y-1)$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解，采用分组分解法分解因式即可得出结果，熟练掌握因式分解的方法是解此题的关键.

【详解】 解： $9x^2 - 3x + y - y^2$
 $= (9x^2 - y^2) - (3x - y)$
 $= (3x + y)(3x - y) - (3x - y)$
 $= (3x - y)(3x + y - 1).$

23. 解方程： $\frac{x}{x-2} - \frac{x-3}{2-x} = 1$.

【答案】 $x = 1$

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程，根据解分式方程的步骤计算即可得出结果，熟练掌握解分式方程的步骤是解此题的关键.

【详解】 解： 将原方程整理可得 $\frac{x}{x-2} + \frac{x-3}{x-2} = 1$ ，
去分母可得： $x + x - 3 = x - 2$ ，
解得： $x = 1$ ，
经检验， $x = 1$ 是原方程的解，
 $\therefore$ 原方程的解为 $x = 1$.

24. 先化简 $\left(\frac{3}{a+1} - a + 1\right) \div \frac{a^2 - 5a + 6}{a+1}$ ，再解答下列问题：

(1) 当 $a=1$ 时, 求代数式的值;

(2) 原代数式的值能等于 4 吗? 如果能, 请求出此时 a 的值; 如果不能, 请说明理由.

【答案】 (1) 化简为 $-\frac{a+2}{a-3}$, 值为 $\frac{3}{2}$

(2) 不能, 理由见解析

【解析】

【分析】 本题考查了分式的化简求值, 分式有意义的条件, 熟练掌握以上知识点并灵活运用是解此题的关键.

(1) 括号内先通分, 再将除法转化为乘法, 约分即可化简, 最后代入 $a=1$ 计算即可得出结果;

(2) 当 $-\frac{a+2}{a-3}=4$, 解得 $a=2$, 再结合分式有意义的条件判断即可得出结果.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned} \text{解: } & \left(\frac{3}{a+1} - a + 1 \right) \div \frac{a^2 - 5a + 6}{a+1} \\ &= \left[\frac{3}{a+1} - \frac{(a-1)(a+1)}{a+1} \right] \div \frac{a^2 - 5a + 6}{a+1} \\ &= \frac{4 - a^2}{a+1} \cdot \frac{a+1}{(a-2)(a-3)} \\ &= \frac{(2-a)(2+a)}{a+1} \cdot \frac{a+1}{-(2-a)(a-3)} \\ &= -\frac{a+2}{a-3}, \end{aligned}$$

$$\text{当 } a=1 \text{ 时, 原式} = \frac{3}{2}$$

【小问 2 详解】

解: 不能. 理由如下:

$$\text{当 } -\frac{a+2}{a-3} = 4,$$

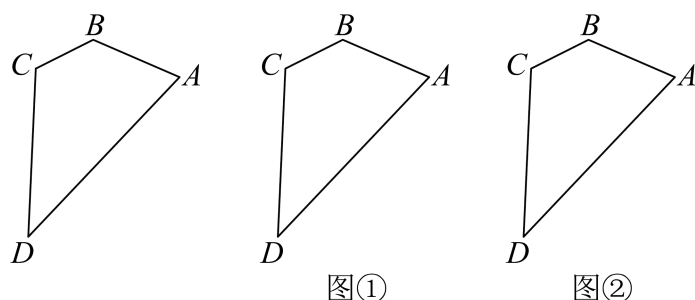
$$\text{解得 } a=2$$

当 $a=2$ 时 $\frac{a^2 - 5a + 6}{a+1}$ 的值为 0, 除数不能为 0,

故原代数式的值不能等于 4.

四、解答题 (本大题共 4 题, 第 25、26 题每题 6 分, 第 27、28 题每题 8 分, 满分 28 分)

25. 如图, 已知四边形 $ABCD$.



图①

图②

(保留作图痕迹, 不写作图步骤, 写出结论)

(1) 如果点 C 、 D 关于直线 MN 对称, 画出直线 MN , 并画出四边形 $ABCD$ 关于直线 MN 成轴对称的图形: (在图①中画出)

(2) 如果 $\triangle ABE$ 和 $\triangle FDC$ 关于点 O 成中心对称 (点 A 、 B 、 E 的对称点分别是点 F 、 D 、 C). 请找出点 O 并补全 $\triangle ABE$ 和 $\triangle FDC$. (在图②中画出)

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

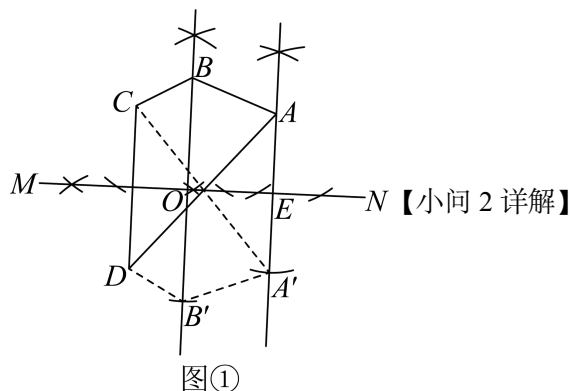
【分析】本题考查了作垂线, 中心对称图形的定义, 平移的性质, 熟练掌握以上知识点并灵活运用是解此题的关键.

(1) 先作线段 CD 的垂直平分线, 再根据轴对称的性质作图即可;

(2) 连接 BD , 作线段 BD 的垂直平分线交 BD 于点 O , 再根据中心对称图形的定义作图即可.

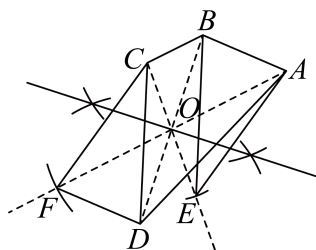
【小问 1 详解】

解: 如图: 根据垂直平分线的作法作出直线 MN , 作直线 $BO \perp MN$ 于点 O , 再以点 O 为圆心, OB 为半径画弧交直线 OB 于 B' , 作直线 $AE \perp MN$ 于点 E , 再以点 E 为圆心, AE 为半径画弧交直线 AE 于 A' , 连接 $A'B'$ 、 $A'C$ 、 $B'D$, 则直线 MN , 四边形 $A'B'DC$ 即为所作,



图①

解：如图，连接 BD ，作线段 BD 的垂直平分线交 BD 于点 O ，则点 O 即为所求，作射线 AO ，以点 O 为圆心，线段 AO 的长度为半径画弧，交射线 AO 于点 F ，作射线 CO ，以点 O 为圆心，线段 CO 的长度为半径画弧，交射线 CO 于点 E ，连接 CF 、 DF 、 AE 、 BE ，则 $\triangle ABE$ 和 $\triangle FDC$ 即为所作，



图②

26. 为助力“美丽家园”建设，某社区便民商铺购进 A、B 两种便民商品用于销售．已知购进 A 商品的总费用为 2000 元，购进 B 商品的总费用为 1800 元，A 商品的进货单价比 B 商品的进货单价高 $\frac{1}{4}$ ，且购进 A 商品的数量比 B 商品少 10 件．求 A、B 两种商品的进货单价各是多少元？

【答案】A 商品的进货单价为 25 元，B 商品的进货单价为 20 元

【解析】

【分析】本题考查了分式方程的应用，设 B 商品的进货单价为 x 元．根据“购进 A 商品的数量比 B 商品少 10 件”列出分式方程，解方程即可得出结果，理解题意，找准等量关系，正确列出分式方程是解此题的关键．

【详解】解：设 B 商品的进货单价为 x 元．

$$\frac{1800}{x} - 10 = \frac{2000}{\left(1 + \frac{1}{4}\right)x},$$

解得： $x = 20$

经检验， $x = 20$ 是原方程的解，且符合题意

A 商品的进货单价为 $\left(1 + \frac{1}{4}\right)x = 25$ 元，

答：A 商品的进货单价为 25 元，B 商品的进货单价为 20 元．

27. 阅读：如果两个分式 A 与 B 的和为常数 k ，且 k 为正整数，则称 A 与 B 互为“关联分式”，常数 k 称为“关联值”．如分式 $A = \frac{x}{x-1}$ ， $B = \frac{-1}{x-1}$ ， $A + B = \frac{x-1}{x-1} = 1$ ，则 A 与 B 互为“关联分式”，“关联值” $k = 1$ ．

(1) 若分式 $A = \frac{x-4}{x-3}$ ， $B = \frac{x-2}{x-3}$ ，判断 A 与 B 是否互为“关联分式”，若不是，请说明理由；若是，请求出“关联值” k ；

(2) 已知分式 $C = \frac{2x-1}{x-3}$, $D = \frac{M}{x^2-9}$, C 与 D 互为“关联分式”, 且“关联值” $k = 2$.

① $M =$ _____ (用含 x 的式子表示);

② 若 x 为正整数, 且分式 D 的值为正整数, 则 x 的值等于 _____;

(3) 若分式 $E = \frac{(x-a)(x-b)}{x-4}$, $F = \frac{(x-c)(x-5)}{4-x}$ (a, b 为整数且 $c = a + b$), E 是 F 的“关联分式”,

且“关联值” $k = 5$, 求 c 的值.

【答案】(1) 是, $k = 2$

(2) ① $M = -15 - 5x$; ② $x = 2$

(3) c 的值为 4 或 16 .

【解析】

【分析】 本题考查的是新定义运算的理解, 分式的加减运算, 理解新定义是解本题的关键.

(1) 先计算 $A + B$, 再求出结果即可;

(2) ①先求解 $C + D = \frac{2x^2 + 5x - 3 + M}{(x-3)(x+3)}$, 结合新定义可得 $2x^2 + 5x - 3 + M = 2(x-3)(x+3) = 2x^2 - 18$,

从而可得答案; ②由 $D = -\frac{5}{x-3}$, 且分式 D 的值为正整数. x 为正整数, 可得 $x-3 = -1$ 或 $x-3 = -5$, 从而可得答案;

(3) 计算 $E + F = \frac{-(a+b)x + ab + (5+c)x - 5c}{x-4}$, 整理得: $a(b-5) = 5b - 20$, 确定 $a = 5 + \frac{5}{b-5}$, 根据题意求解即可.

【小问 1 详解】

解: A 与 B 是互为“关联分式”, 理由如下:

$$\because A = \frac{x-4}{x-3}, B = \frac{x-2}{x-3},$$

$$\therefore A + B = \frac{x-4}{x-3} + \frac{x-2}{x-3} = \frac{2x-6}{x-3} = 2.$$

$\therefore A$ 与 B 是互为“关联分式”, “关联值” $k = 2$;

【小问 2 详解】

$$\text{解: ①} \because C = \frac{2x-1}{x-3}, D = \frac{M}{x^2-9},$$

$$\therefore C + D = \frac{(2x-1)(x+3)}{(x-3)(x+3)} + \frac{M}{(x-3)(x+3)}$$

$$= \frac{2x^2 + 5x - 3 + M}{(x-3)(x+3)}$$

$\because C$ 与 D 互为“关联分式”，且“关联值” $k=2$,

$$\therefore 2x^2 + 5x - 3 + M = 2(x-3)(x+3) = 2x^2 - 18,$$

$$\therefore M = 2x^2 - 18 - (2x^2 + 5x - 3) = -15 - 5x;$$

$$\textcircled{2} \because D = \frac{M}{x^2 - 9} = \frac{-5(x+3)}{(x+3)(x-3)} = -\frac{5}{x-3}, \text{ 且分式 } D \text{ 的值为正整数. } x \text{ 为正整数,}$$

$$\therefore x-3 = -1 \text{ 或 } x-3 = -5,$$

$$\therefore x = 2 \quad (x = -2 \text{ 舍去});$$

【小问 3 详解】

$$E + F = \frac{(x-a)(x-b)}{x-4} + \frac{(x-c)(x-5)}{4-x}$$

$$= \frac{(x-a)(x-b)}{x-4} - \frac{(x-c)(x-5)}{x-4}$$

$$= \frac{(x-a)(x-b) - (x-c)(x-5)}{x-4}$$

$$= \frac{-(a+b)x + ab + (5+c)x - 5c}{x-4},$$

$$\because c = a + b, \quad k = 5$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{-cx + ab + (5+c)x - 5c}{x-4} = \frac{5x + ab - 5c}{x-4} = 5,$$

$$\therefore ab - 5c = -20, \text{ 即 } ab - 5(a+b) = -20,$$

$$\therefore a(b-5) = 5b - 20,$$

$$\therefore a = \frac{5b - 25 + 5}{b-5} = 5 + \frac{5}{b-5},$$

$\because a, b$ 为整数,

$\therefore b-5$ 一定为 5 的约数,

$$\therefore b-5 = -1 \text{ 或 } -5 \text{ 或 } 1 \text{ 或 } 5,$$

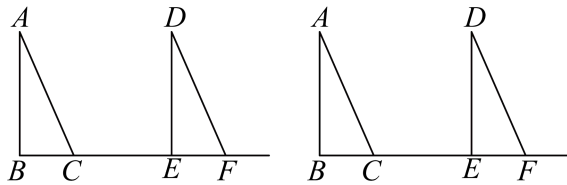
解得: $b = 4$ 或 0 或 6 或 10 ,

$$\therefore a = 0 \text{ 或 } 4 \text{ 或 } 10 \text{ 或 } 6,$$

$$\therefore c = a + b = 4 + 0 = 4 \text{ 或 } 10 + 6 = 16,$$

$\therefore c$ 的值为 4 或 16 .

28. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, $AB = a$, $BC = b$ ($a > b > 0$), 将 $\triangle ABC$ 沿着射线 BC 方向平移得到 $\triangle DEF$, 其中点 A 、点 B 、点 C 的对应点分别是点 D 、点 E 、点 F , 且 $CE = DE$. 将 $\triangle DEF$ 绕着点 E 逆时针旋转一定的角度 β ($0^\circ < \beta < 360^\circ$), 使得点 F 恰好落在直线 DE 上的点 G 处.



备用图

- (1) 旋转角 β 的度数是_____；(请直接写出答案)
- (2) 连接 CG 、 AG , $\triangle ACG$ 的面积等于_____. (用含 a 、 b 的代数式表示, 请直接写出答案)
- (3) 如果平移的距离等于 8, $\triangle ABC$ 的面积等于 6, 那么 $\triangle ACG$ 的面积等于_____ (请直接写出答案); 如果平移的距离等于 m , $\triangle ACG$ 的面积等于 n , 那么 $\triangle ABC$ 的面积等于_____. (用含 m 、 n 的代数式表示, 请直接写出答案)

【答案】 (1) 90° 或 270°

(2) $\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$ 或 $\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2$

(3) 20 或 16; $\frac{m^2 - 2n}{4}$ 或 $\frac{m^4 - 4n^2}{8m^2}$

【解析】

【分析】 (1) 由平移的性质可得 $\angle DEF = \angle B = 90^\circ$, 分当 $\triangle DEF$ 绕点 E 逆时针旋转 90° 时, 点 F 落在线段 DE 上的 G 点处; 当 $\triangle DEF$ 绕点 E 逆时针旋转 270° 时, 点 F 落在 DE 的延长线上的 G 点处即可;

(2) 由平移和旋转的性质可得: $\angle BAC = \angle ECG$, $AC = CG = DF$, 当 $\triangle DEF$ 绕点 E 逆时针旋转 90° 时, 点 F 落在线段 DE 上的 G 点处, 则 $\angle ACG = 90^\circ$, $S_{\triangle ACG} = \frac{1}{2}AC \cdot CG = \frac{1}{2}AC^2$, 结合

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + b^2$ 即可; 当 $\triangle DEF$ 绕点 E 逆时针旋转 270° 时, 点 F 落在 DE 的延长线上的 G 点处, 过点 G 作 $GM \perp AB$ 于点 M , 连接 CE , 则 $AC = CG = DF$, $EG = EF = BC$, $AM = AB + BM$, $MG = BC + CE$, 根据 $S_{\triangle ACG} = S_{\triangle AMG} - S_{\text{梯形}BCMG} - S_{\triangle ABC}$ 计算即可;

(3) 根据题意得 $a + b = 8$ 和 $\frac{1}{2}ab = 6$, 结合已知解得 $a = 6$ 和 $b = 2$, 即可求得 $S_{\triangle ACG}$; 结合平移得 $a + b = m$,

当 $\triangle DEF$ 绕点 E 逆时针旋转 90° 时, 点 F 落在线段 DE 上的 G 点处, 得到 $S_{\triangle ACG} = \frac{a^2 + b^2}{2} = n$, 可得

$ab = \frac{m^2 - 2n}{2}$ 即可; 当 $\triangle DEF$ 绕点 E 逆时针旋转 270° 时, 点 F 落在 DE 的延长线上的 G 点处, 过点 G 作

$GM \perp AB$ 于点 M , 连接 CE , 由 $S_{\triangle ACG} = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2 = n$, 化简得 $a - b = \frac{2n}{m}$, 联立解得 $\begin{cases} a = \frac{m}{2} + \frac{n}{m} \\ b = \frac{m}{2} - \frac{n}{m} \end{cases}$,

即可求得 $S_{\triangle ABC} = \frac{m^4 - 4n^2}{8m^2}$.

【小问 1 详解】

解: 由平移的性质可得 $\angle DEF = \angle B = 90^\circ$,

$\therefore$ 当 $\triangle DEF$ 绕点 E 逆时针旋转 90° 时, 点 F 落在线段 DE 上的 G 点处; 当 $\triangle DEF$ 绕点 E 逆时针旋转 270° 时, 点 F 落在 DE 的延长线上的 G 点处;

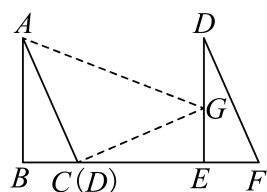
$\therefore$ 旋转角 $\beta = 90^\circ$ 或 270° ;

故答案为: 90° 或 270° ;

【小问 2 详解】

解: 由平移和旋转的性质可得: $\angle BAC = \angle ECG$, $AC = CG = DF$,

当 $\triangle DEF$ 绕点 E 逆时针旋转 90° 时, 点 F 落在线段 DE 上的 G 点处, 如图,



$\therefore \angle B = 90^\circ$,

$\therefore \angle ACB + \angle CAB = 90^\circ$,

$\therefore \angle ACB + \angle ECG = 90^\circ$,

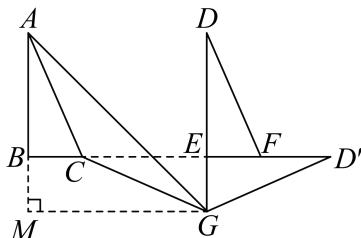
$\therefore \angle ACG = 90^\circ$,

$\therefore S_{\triangle ACG} = \frac{1}{2}AC \cdot CG = \frac{1}{2}AC^2$,

又 $\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + b^2$,

$$\therefore S_{\triangle ACG} = \frac{a^2 + b^2}{2},$$

当 $\triangle DEF$ 绕点 E 逆时针旋转 270° 时, 点 F 落在 DE 的延长线上的 G 点处, 过点 G 作 $GM \perp AB$ 于点 M , 连接 CE , 如图,



则 $AC = CG = DF$, $EG = EF = BC$,

$\therefore BM = EG$, $MG = BE$,

$\because AB = a$, $BC = b$ ($a > b > 0$), $CE = DE$,

$\therefore AM = AB + BM = AB + BM = a + b$, $MG = BC + CE = a + b$,

则 $S_{\triangle ACG} = S_{\triangle AMG} - S_{\text{梯形}BCMG} - S_{\triangle ABC}$

$$= \frac{1}{2} AM \times MG - \frac{1}{2} (BC + MG) \times BM - \frac{1}{2} AB \times BC$$

$$= \frac{(a+b)^2}{2} - \frac{1}{2} (b + a + b) \times b - \frac{1}{2} ab$$

$$= \frac{(a+b)^2}{2} - \frac{1}{2} (b + a + b) \times b - \frac{1}{2} ab$$

$$= \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{2} b^2,$$

故答案为: $\frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2$ 或 $\frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{2} b^2$;

【小问3详解】

解: $\because$ 平移的距离等于 8,

$\therefore a + b = 8$,

$\because \triangle ABC$ 的面积等于 6,

$$\therefore \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} a \times (8 - a) = 6, \text{ 解得 } a = 2 \text{ 或 } a = 6,$$

则 $b = 2$ 或 $b = 6$,

$\because a > b > 0$,

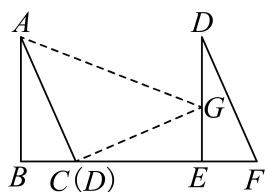
$$\therefore a=6, b=2$$

$$\text{则 } S_{\triangle ACG} = \frac{1}{2}(6^2 + 2^2) = 20, \text{ 或 } \frac{1}{2} \times 6^2 - \frac{1}{2} \times 2^2 = 16,$$

$\therefore$ 平移的距离等于 m ,

$$\therefore a+b=m,$$

当 $\triangle DEF$ 绕点 E 逆时针旋转 90° 时, 点 F 落在线段 DE 上的 G 点处, 如图,



$\therefore \triangle ACG$ 的面积等于 n ,

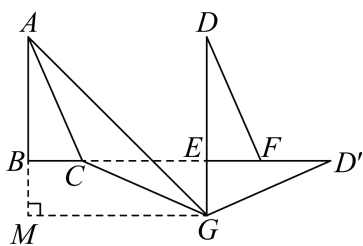
$$\therefore S_{\triangle ACG} = \frac{a^2 + b^2}{2} = n, \text{ 化简得 } a^2 + b^2 = 2n,$$

$$\therefore (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 2n + 2ab = m^2$$

$$\therefore ab = \frac{m^2 - 2n}{2},$$

$$\text{则 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times BC = \frac{1}{2} ab = \frac{m^2 - 2n}{4};$$

当 $\triangle DEF$ 绕点 E 逆时针旋转 270° 时, 点 F 落在 DE 的延长线上的 G 点处, 过点 G 作 $GM \perp AB$ 于点 M , 连接 CE , 如图,



$$\text{则 } S_{\triangle ACG} = \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{2} b^2 = n, \text{ 化简得 } a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = 2n,$$

$$\therefore a+b=m,$$

$$\therefore a-b = \frac{2n}{m},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = \frac{m}{2} + \frac{n}{m} \\ b = \frac{m}{2} - \frac{n}{m} \end{cases}$$

$$\text{则 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times BC = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{2} + \frac{n}{m} \right) \left(\frac{m}{2} - \frac{n}{m} \right) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{m}{2} \right)^2 - \left(\frac{n}{m} \right)^2 \right] = \frac{m^4 - 4n^2}{8m^2},$$

$$\text{则 } \frac{m^2 - 2n}{4} \text{ 或 } \frac{m^4 - 4n^2}{8m^2}.$$

【点睛】 本题主要考查旋转的性质、平移的性质、整式的混合运算和求解代数式等相关知识点，解题的关键是熟悉旋转的性质并能准确的计算，熟练应用分类讨论思想.