

2025 学年第一学期七年级数学学科第四阶段质量调研试卷

(考试时间 90 分钟, 满分 100 分)

一、选择题 (本大题共 8 题, 每题 3 分, 满分 24 分)

1. 下列说法正确的是 ()

A. $-\frac{x^2y}{2}$ 的系数是 -2

B. $2^2x^2y^3$ 的次数是 7 次

C. $2x^4 + 4x^2 - 3$ 是六次三项式

D. $x^2 + 2x - 5$ 的常数项是 -5

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查单项式的系数和次数、多项式的次数和常数项等概念, 正确理解单项式的系数和次数、多项式的次数和常数项是解题的关键. 需逐项判断是否符合定义.

【详解】解: 对于 A: $\because$ 单项式 $-\frac{x^2y}{2} = -\frac{1}{2}x^2y$, 其系数为 $-\frac{1}{2}$, 不是 -2 , $\therefore$ A 错误.

对于 B: $\because$ 单项式 $2^2x^2y^3 = 4x^2y^3$, 其次数为 $2+3=5$, 不是 7, $\therefore$ B 错误.

对于 C: $\because$ 多项式 $2x^4 + 4x^2 - 3$ 中最高次项 $2x^4$ 的次数为 4, 故为四次三项式, 不是六次三项式, $\therefore$ C 错误.

对于 D: $\because$ 多项式 $x^2 + 2x - 5$ 的常数项为 -5 , $\therefore$ D 正确.

故选: D.

2. 下列计算正确的是 ()

A. $x^3 + x^3 = 2x^6$

B. $(x^3)^2 = x^5$

C. $(-x^5)(-x)^2 = -x^7$

D. $(-x^2)^3 = (-x^3)^2$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查指数运算规则, 包括合并同类项、幂的乘方、积的乘方等. 逐项验证即可.

【详解】解: 对于 A: $\because x^3 + x^3 = 2x^3 \neq 2x^6$, $\therefore$ A 错误.

对于 B: $\because (x^3)^2 = x^{3 \times 2} = x^6 \neq x^5$, $\therefore$ B 错误.

对于 C: $\because (-x)^2 = x^2$, $\therefore (-x^5)(-x)^2 = -x^7$, 与右边相等, $\therefore$ C 正确.

对于 D: $\because (-x^2)^3 = (-1)^3 \cdot (x^2)^3 = -x^6$, $(-x^3)^2 = (-1)^2 \times (x^3)^2 = x^6$, $\therefore -x^6 \neq x^6$, D 错误.

故选 C.

3. 下列等式中, 从左到右的变形是因式分解的 ()

A. $x^2 - 4x + 2 = x(x - 4) + 2$

B. $x^5 - x = x(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$

C. $(x + 2)(x - 3) = x^2 - x - 6$

D. $x + 2 = x\left(1 + \frac{2}{x}\right)$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了因式分解的定义. 根据因式分解的定义 (把一个多项式化成几个最简整式的乘积的形式, 这种多项式的变形叫做因式分解) 逐项判断即可得.

【详解】解: A、 $x^2 - 4x + 2 = x(x - 4) + 2$, 等式的右边不是乘积的形式, 则此项不符合题意;

B、 $x^5 - x = x(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$, 是因式分解, 此项符合题意;

C、 $(x + 2)(x - 3) = x^2 - x - 6$ 是整式的乘法, 不是因式分解, 此项不符合题意;

D、 $x + 2 = x\left(1 + \frac{2}{x}\right)$ 等式右边中的 $\frac{2}{x}$ 不是整式, 则此项不符合题意;

故选: B.

4. 下列方程中, 哪些是分式方程 ()

① $x + \frac{1}{x} = 2$; ② $\frac{1}{x} = 1$; ③ $\frac{3x+2}{4} - \frac{x}{2} = \frac{3}{5}$; ④ $\frac{3}{x-4} = \frac{1}{x+2}$

A. ①②③

B. ①②④

C. ①③④

D. ②③④

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查分式方程的定义. 分母里含有字母的方程叫做分式方程. 根据分式方程的定义判断即可.

【详解】解: ① $x + \frac{1}{x} = 2$, 符合分式方程的定义, 是分式方程;

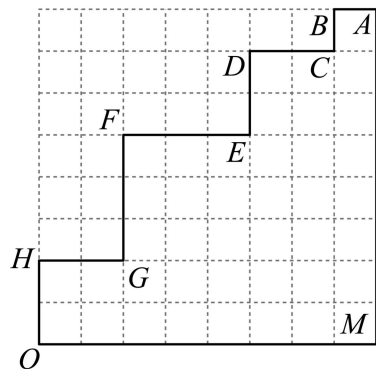
② $\frac{1}{x} = 1$, 符合分式方程的定义, 是分式方程;

③ $\frac{3x+2}{4} - \frac{x}{2} = \frac{3}{5}$, 分母里不含有字母, 不符合分式方程的定义, 不是分式方程;

④ $\frac{3}{x-4} = \frac{1}{x+2}$, 符合分式方程的定义, 是分式方程;

故选：B.

5. 如图所示，甲、乙两只蚂蚁觅食后，都想早点回去向蚁王汇报成绩，它们同时经过 A 处向洞口 O 处走，甲走的路线为过点 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 、 G 、 H 、 O 的折线，乙走的路线为折线 AMO ，图中线段分别平行，如果它们爬行的速度相等，先回到洞中的是（ ）



- A. 甲 B. 乙 C. 同时 D. 无法判断

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了平移，根据平移的性质可知两只蚂蚁行走的路程相等，又因为它们爬行的速度相等，所以两只蚂蚁同时回到洞中.

【详解】解： $\because AM = BC + DE + FG + HO$ ， $OM = AB + CD + EF + HG$ ，

$\therefore AM + OM = BC + DE + FG + HO + AB + CD + EF + HG$ ，

$\therefore$ 两只蚂蚁行走的路程相等，

又 $\because$ 它们爬行的速度相等，

$\therefore$ 两只蚂蚁同时回到洞中.

故选：C.

6. 如果使分式 $\frac{A}{3a-b}$ 有意义的 a 和 b 的值都扩大为原来的 3 倍，则分式的值也扩大为原来的 3 倍，那么整式 A 可以是（ ）

- A. $3a+3b$ B. $3a-3b$ C. a^2b^2 D. ab

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了分式的基本性质，熟练掌握分式的基本性质是解题的关键. 利用分式的基本性质逐项判断即可.

【详解】解：当 A 表示 $3a+3b$ 时， $\frac{3 \times 3a + 3 \times 3b}{3 \times 3a - 3b} = \frac{3a + 3b}{3a - b}$ ，它的值与原分式的值相等，故 A 不符合题

意;

当 A 表示 $3a-3b$ 时, $\frac{3 \times 3a - 3 \times 3b}{3 \times 3a - 3b} = \frac{3a-3b}{3a-b}$, 它的值与原分式的值的相等, 故 B 不符合题意;

当 A 表示 a^2b^2 时, $\frac{(3a)^2(3b)^2}{3 \times 3a - 3b} = \frac{27a^2b^2}{3a-b}$, 它的值是原分式的值的 27 倍, 故 C 不符合题意;

当 A 表示 ab 时, $\frac{(3a) \cdot (3b)}{3 \times 3a - 3b} = \frac{3ab}{3a-b}$, 它的值是原分式的值的 3 倍, 故 D 符合题意;

故选: D.

7. 中国的历史文化源远流长, 我们的祖先创造了很多造型别致且实用美观的纹样. 下面四个纹样中, 属于四方连续纹样的是 ()



【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了四方连续纹样, 四方连续纹样是一种图案设计形式, 由一个单位纹样向上下左右四个方向反复连续循环排列而成. 据此分析即可.

【详解】解: 属于四方连续纹样的是选项 D,

故选: D.

8. 甲、乙两班学生植树造林, 已知甲班每天比乙班多植 5 棵树, 甲班植 80 棵树所用的天数与乙班植 70 棵树所用的天数相等, 若设乙班每天植树 x 棵, 则根据题意列出方程是 ()

A. $\frac{80}{x-5} = \frac{70}{x}$

B. $\frac{80}{x} = \frac{70}{x+5}$

C. $\frac{80}{x+5} = \frac{70}{x}$

D. $\frac{80}{x} = \frac{70}{x-5}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了分式方程的实际应用, 解题的关键是根据甲、乙两班植树的数量和工作效率关系, 找出等量关系列出方程.

先表示出甲班每天植树的棵数, 再分别得出甲班植 80 棵树和乙班植 70 棵树所用的天数, 根据天数相等列出方程

【详解】解:

设乙班每天植树 x 棵, 因为甲班每天比乙班多植 5 棵树, 所以甲班每天植树 $(x+5)$ 棵.

根据题意可列方程 $\frac{80}{x+5} = \frac{70}{x}$.

故选：C.

二、填空题（本大题共 10 题，每题 2 分，共 20 分）

9. 将整式按 y 升幂排列： $-5y^4 - x^4 + 3x^3y + 2x^2y^2 - y^3 =$ _____.

【答案】 $-x^4 + 3x^3y + 2x^2y^2 - y^3 - 5y^4$

【解析】

【分析】 本题考查多项式，在排列多项式各项时，要保持其原有的符号. 正确理解降幂排列或升幂排列的定义是解题的关键. 按 y 的升幂排列，即根据各项中 y 的指数从小到大进行排列.

【详解】 解： 整式 $-5y^4 - x^4 + 3x^3y + 2x^2y^2 - y^3$ 中，

各项 y 的指数分别为： $-x^4$ 的指数为 0， $3x^3y$ 的指数为 1， $2x^2y^2$ 的指数为 2， $-y^3$ 的指数为 3， $-5y^4$ 的指数为 4.

按 y 的指数升序排列，

得到 $-x^4 + 3x^3y + 2x^2y^2 - y^3 - 5y^4$ ，

故答案为： $-x^4 + 3x^3y + 2x^2y^2 - y^3 - 5y^4$.

10. 如果单项式 $3x^{m+2}y^4$ 与 $-\frac{1}{2}xy^{n-2}$ 是同类项，则 $m^n =$ _____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 本题主要考查了同类项，根据同类项的定义，相同字母的指数必须相等，列出关于 m 和 n 的方程并求解，再计算 m^n 的值.

【详解】 解： 因为单项式 $3x^{m+2}y^4$ 与 $-\frac{1}{2}xy^{n-2}$ 是同类项，

所以 x 的指数相等，即 $m+2=1$ ，

解得 $m=-1$ ；

y 的指数相等，

即 $4=n-2$ ，

解得 $n=6$ ，

则 $m^n = (-1)^6 = 1$ ，

故答案为：1.

11. 当 $x \neq -2$ 时，请写出一个在此范围内有意义的最简分式：_____.

【答案】 $\frac{1}{x+2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查最简分式和分母有意义的条件，根据题意，分式在 $x \neq -2$ 时有意义，因此分母应包含因式 $x+2$ ；同时要求分式为最简形式，即分子与分母无公因式，即可求得答案.

【详解】 解： $\because$ 当 $x \neq -2$ 时，分母不为零，分式有意义，

$\therefore$ 构造分母为 $x+2$ 的分式 $\frac{1}{x+2}$ ，

$\because$ 分子 1 与分母 $x+2$ 互质，无公因式，

$\therefore$ 因此 $\frac{1}{x+2}$ 分式为最简分式.

故答案为： $\frac{1}{x+2}$.

12. 将分式 $\frac{3x}{y(x-y)^3}$ 表示成不含分母的形式为_____.

【答案】 $3xy^{-1}(x-y)^{-3}$

【解析】

【分析】 本题考查负整数指数幂. 利用负整数指数幂的定义，将分母中的因子转化为负指数形式，从而消除分母.

【详解】 解： $\frac{3x}{y(x-y)^3}$

$= 3xy^{-1}(x-y)^{-3}$

故答案为： $3xy^{-1}(x-y)^{-3}$.

13. 计算： $(30x^2y - 25xy^2 + 5x) \div 5x =$ _____.

【答案】 $6xy - 5y^2 + 1$

【解析】

【分析】 本题主要考查了多项式除以单项式，根据多项式除以单项式的法则，将多项式的每一项分别除以单项式，再把所得的商相加.

【详解】 解：原式 $= 30x^2y \div 5x - 25xy^2 \div 5x + 5x \div 5x = 6xy - 5y^2 + 1$

故答案为： $6xy - 5y^2 + 1$.

14. 因式分解： $x^3 - x =$ _____.

【答案】 $x(x+1)(x-1)$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解. 提取 x 后，再根据平方差公式继续分解即可.

【详解】 解： $x^3 - x$

$$= x(x^2 - 1)$$

$$= x(x+1)(x-1)$$

故答案为： $x(x+1)(x-1)$.

15. 请写出一个图形，既是轴对称图形又是中心对称图形： _____.

【答案】 线段(答案不唯一)

【解析】

【分析】 写出一个轴对称图形又是中心对称的图形即可.

【详解】 解： 线段既是中心对称图形又是轴对称图形.

故答案为： 线段(答案不唯一)

【点睛】 本题考查轴对称图形主中心对称图形，熟练掌握如果一个图形沿着一条直线对折后两部分完全重合，这样的图形叫做轴对称图形，这条直线叫做对称轴. 如果一个图形绕某一点旋转 180° 后能够与自身重合，那么这个图形就叫做中心对称图形，这个点叫做对称中心是解题的关键.

16. 如果关于 x 的方程 $\frac{mx+2}{x-3} + 1 = \frac{2}{x-3}$ 无解，则 $m =$ _____.

【答案】 -1 或 0 或 -1

【解析】

【分析】 此题考查分式方程的解，解题关键在于利用方程无解进行解答，分式方程去分母转化为整式方程，由整式方程无解或解为增根时原方程无解，确定 m 的值.

【详解】 解： 原方程为 $\frac{mx+2}{x-3} + 1 = \frac{2}{x-3}$,

两边同乘 $x-3$ ($x \neq 3$), 得 $mx+2+(x-3)=2$,

即 $(m+1)x-1=2$,

整理得 $(m+1)x=3$,

当 $m+1=0$ 即 $m=-1$ 时, 方程变为 $0 \cdot x=3$, 无解;

当 $m+1 \neq 0$ 时, 解为 $x=\frac{3}{m+1}$,

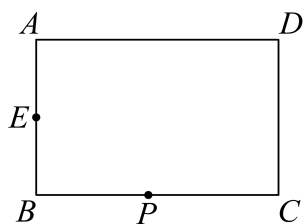
若此解为增根 (即分母为零), 则 $\frac{3}{m+1}=3$, 解得 $m=0$, 此时原方程无解;

综上, $m=-1$ 或 $m=0$

故答案为: -1 或 0

17. 有一长方形纸片 $ABCD$, 如图, 点 P 在线段 BC 上, 点 E 在线段 AB 上, 将长方形纸片沿着 EP 翻折, 使点 B 落在点 B' 处, 如果 $\angle BPE$ 与 $\angle B'PC$ 之差的绝对值等于 60° , 即 $|\angle BPE - \angle B'PC| = 60^\circ$, 那么

$\angle BPE =$ _____.



【答案】 40° 或 80°

【解析】

【分析】 本题考查了角的计算等知识, 绝对值的化简, 一元一次方程的应用等知识, 根据题意画出图形, 进行分类讨论是解题关键. 当 $\angle BPE < \angle B'PC$ 时, 根据 $|\angle BPE - \angle B'PC| = 60^\circ$, 得到

$\angle B'PC = \angle BPE + 60^\circ$, 根据折叠得到 $\angle BPE = \angle B'PE$, 根据 $\angle BPE + \angle B'PE + \angle B'PC = 180^\circ$, 即可求出 $\angle BPE = 40^\circ$; 当 $\angle BPE > \angle B'PC$, 同理可以求出 $\angle BPE = 80^\circ$, 问题得解.

【详解】 解: 如图 1, 当 $\angle BPE < \angle B'PC$ 时,

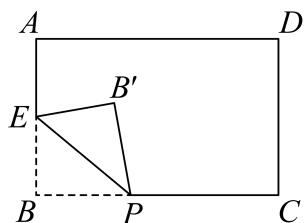


图1

$\therefore |\angle BPE - \angle B'PC| = 60^\circ$,

$$\therefore \angle B'PC - \angle BPE = 60^\circ,$$

$$\text{即 } \angle B'PC = \angle BPE + 60^\circ,$$

$\because$ 三角形 BPE 翻折得到三角形 $B'PE$,

$$\text{所以 } \angle BPE = \angle B'PE,$$

$$\text{因为 } \angle BPE + \angle B'PE + \angle B'PC = 180^\circ,$$

$$\text{所以 } \angle BPE + \angle BPE + (\angle BPE + 60^\circ) = 180^\circ,$$

$$\text{所以 } \angle BPE = 40^\circ;$$

如图 2, 当 $\angle BPE > \angle B'PC$ 时,

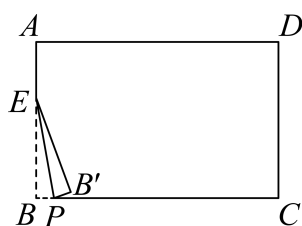


图2

$$\therefore |\angle BPE - \angle B'PC| = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BPE - \angle B'PC = 60^\circ,$$

$$\text{即 } \angle B'PC = \angle BPE - 60^\circ,$$

$\because$ 三角形 BPE 翻折得到三角形 $B'PE$,

$$\text{所以 } \angle BPE = \angle B'PE,$$

$$\text{因为 } \angle BPE + \angle B'PE + \angle B'PC = 180^\circ,$$

$$\text{所以 } \angle BPE + \angle BPE + (\angle BPE - 60^\circ) = 180^\circ,$$

$$\text{所以 } \angle BPE = 80^\circ;$$

故答案为: 40° 或 80°

18. 如果两个分式 P 与 Q 的和为常数 k , 且 k 是整数, 则称 P 是 Q 的“和整分式”, k 称为“和整值”. 例

如: 分式 $P = \frac{x}{x+1}$, $Q = \frac{1}{x+1}$, 所以 $P + Q = \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1} = 1$, P 是 Q 的“和整分式”, “和整值” $k = 1$. 已

知分式 $C = \frac{2}{x-3}$, $D = \frac{M}{x^2-9}$, C 是 D 的“和整分式”, 且“和整值” $k = 1$. 当 x 为正整数时, 分式 D 的值为正整数, 则 x 的值_____.

【答案】1 或 2

【解析】

【分析】本题考查了分式的加法、解一元一次方程、解分式方程，熟练掌握运算法则并理解题意是解此题的关键.

根据题意可得 $\frac{2}{x-3} + \frac{M}{x^2-9} = 1$ ，再去分母，整理即可解得 $M = x^2 - 2x - 15$ ；并化简 D ，再根据 D 的值为正整数，列出方程求解 x ，检验即可.

【详解】解：∵ C 是 D 的和整分式，且和整值 $k = 1$ ，

$$\therefore C + D = 1.$$

$$\text{即 } \frac{2}{x-3} + \frac{M}{x^2-9} = 1.$$

$$\text{通分得 } \frac{2(x+3)+M}{(x-3)(x+3)} = 1.$$

$$\text{则 } 2(x+3)+M = x^2-9.$$

$$\text{解得 } M = x^2 - 2x - 15.$$

$$\text{于是 } D = \frac{M}{x^2-9} = \frac{x^2-2x-15}{x^2-9} = \frac{(x-5)(x+3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x-5}{x-3} = 1 + \frac{2}{3-x} \quad (\text{其中 } x \neq \pm 3).$$

∵ D 的值为正整数， x 为正整数，

$$\therefore 3-x=1 \text{ 或 } 3-x=2.$$

$$\text{解得: } x=2 \text{ 或 } x=1.$$

故答案为：1或2.

三、填空题（本大题共 8 题，第 19、20 题各 8 分，第 21 题 5 分，第 22、23 题各 6 分，第 24 题 9 分、第 25 题 6 分、第 26 题 8 分，共 56 分）

19. 计算：

$$(1) \left(x^2\right)^3 \cdot (-x) - \left(-x^3\right)^2 \div \left(-x^2\right)$$

$$(2) (a+2)^2 - (a-2)(a+1)$$

$$\text{【答案】} (1) -x^7 + x^4$$

$$(2) 5a + 6$$

【解析】

【分析】本题考查整式的混合运算，包括幂的乘方、积的乘方、同底数幂的乘除法，以及完全平方公式和多项式乘法。根据相关运算法则和公式计算即可。

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned}
&\text{解: } (x^2)^3 \cdot (-x) - (-x^3)^2 \div (-x^2) \\
&= x^6 \cdot (-x) - x^6 \div (-x^2) \\
&= -x^7 - (-x^4) \\
&= -x^7 + x^4
\end{aligned}$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned}
&\text{解: } (a+2)^2 - (a-2)(a+1) \\
&= a^2 + 4a + 4 - (a^2 - a - 2) \\
&= a^2 + 4a + 4 - a^2 + a + 2 \\
&= 5a + 6
\end{aligned}$$

20. 因式分解:

$$(1) (x^2 - 3x)^2 - 6(x^2 - 3x) + 8$$

$$(2) x^2 - x - 3y - 9y^2$$

【答案】 (1) $(x-4)(x+1)(x^2-3x-2)$

(2) $(x+3y)(x-3y-1)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了因式分解.

(1) 先用换元法, 再利用十字相乘法分解因式即可.

(2) 先用分组分解法, 再利用公式法分解因式即可.

【小问 1 详解】

解: 令 $t = x^2 - 3x$,

则原式变成: $t^2 - 6t + 8$,

$$t^2 - 6t + 8 = (t-4)(t-2),$$

再把 $t = x^2 - 3x$ 代入得 $(x^2 - 3x - 4)(x^2 - 3x - 2) = (x-4)(x+1)(x^2 - 3x - 2)$,

故 $(x^2 - 3x)^2 - 6(x^2 - 3x) + 8 = (x-4)(x+1)(x^2 - 3x - 2)$

【小问 2 详解】

解: $x^2 - x - 3y - 9y^2$

$$= (x^2 - 9y^2) - (x + 3y)$$

$$= (x + 3y)(x - 3y) - (x + 3y)$$

$$= (x + 3y)(x - 3y - 1)$$

21. 解方程: $\frac{2-x}{2x-1} + \frac{7}{1-2x} = 1$

【答案】 $x = -\frac{4}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程的解法，其基本思路是把方程的两边都乘以各分母的最简公分母，化为整式方程求解，求出未知数的值后不要忘记检验.

【详解】 解: 原方程可化成 $\frac{2-x}{2x-1} - \frac{7}{2x-1} = 1$,

$$2 - x - 7 = 2x - 1,$$

$$-x - 2x = -2 + 7 - 1,$$

$$-3x = 4,$$

$$x = -\frac{4}{3},$$

当 $x = -\frac{4}{3}$ 时, $2x - 1 \neq 0$,

则 $x = -\frac{4}{3}$ 是分式方程的解.

22. 先化简代数式 $\left(x - 1 - \frac{x-1}{x+2}\right) \div \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4} + 1$, 然后在 -2 、 -1 、 0 、 1 、 2 中选取一个适合的数, 代入求值.

【答案】 x , 当 $x = 0$ 时, 原式 $= 0$

【解析】

【分析】 本题主要考查分式的化简求值. 先根据分式的混合运算顺序和法则化简原式, 由分式有意义得出符合条件的 x 的值, 代入求解即可.

【详解】 解: 原式 $= \frac{(x-1)(x+2) - (x-1)}{x+2} \div \frac{(x+1)(x-2)}{(x+2)(x-2)} + 1$

$$= \frac{(x-1)(x+1)}{x+2} \times \frac{x+2}{x+1} + 1$$

$$= x - 1 + 1$$

$$= x,$$

因为分式有意义时 $x \neq -2, -1, 2$.

当 $x = 0$ 时, 原式 $= 0$.

23. 某学校组织学生参观博物馆, 按照预定人数需要门票费用 3000 元, 实际参观人数是预定人数的 2 倍, 可以享受优惠, 实际门票费用为 4800 元, 已知每张门票优惠了 3 元, 求参加这项活动的预定人数.

【答案】 参加这项活动的预定人数为 200 人.

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程的应用. 设参加这项活动的预定人数为 x 人, 根据预定费用和实际费用及每张门票优惠 3 元的条件列出方程求解.

【详解】 解: 设参加这项活动的预定人数为 x 人, 则预定每张门票价格为 $\frac{3000}{x}$ 元, 实际参观人数为 $2x$ 人,

实际每张门票价格为 $\frac{4800}{2x} = \frac{2400}{x}$ 元,

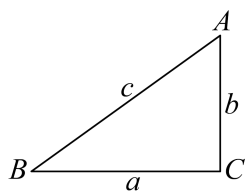
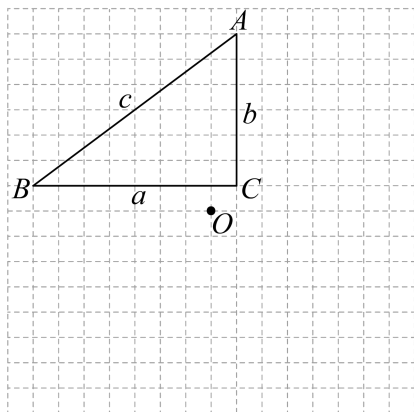
根据题意得 $\frac{3000}{x} - \frac{2400}{x} = 3$,

解得 $x = 200$,

经检验, $x = 200$ 是原方程的解,

答: 参加这项活动的预定人数为 200 人.

24. 小明在学习乘法公式时, 通过计算图形的面积发现了平方差公式及完全平方公式, 他课后遇到了这样一个问题, 请帮他一起解决:



(1) 如图, 已知 ABC 是直角三角形, $\angle C = 90^\circ$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, 请分别画出 ABC 绕点 O 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle A_1B_1C_1$, 关于点 O 成中心对称的 $\triangle A_2B_2C_2$, 绕点 O 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle A_3B_3C_3$.

(2) 第 (1) 问画出的四边形 $AA_1A_2A_3$ 是一个什么图形? _____.

一方面, 四边形 $AA_1A_2A_3$ 的面积可以直接用公式计算为_____; 另一方面, 它的面积等于四个三角形和四

边形 $CC_1C_2C_3$ 的面积之和，为_____。于是，我们得到_____。（用含 a 、 b 、 c 且化简后的整式表示）

(3) 请你借助 ABC ，再画出一种示意图推出第 (2) 题得到的等式，并简要说明推导过程。

【答案】(1) 见详解 (2) 正方形， c^2 ， $a^2 + b^2$ ， $a^2 + b^2 = c^2$

(3) 见详解

【解析】

【分析】本题为开放性问题，考查了通过数形结合思想，理解利用图形证明平方差公式，完全平方公式的过程是解题关键。

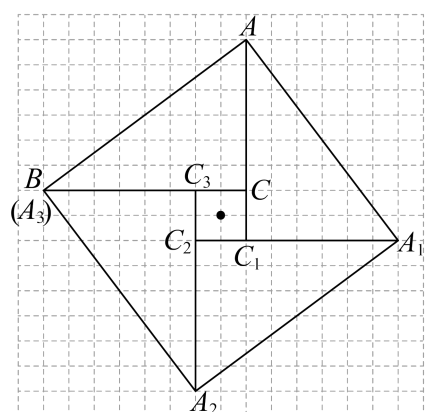
(1) 根据题意进行作图即可求解；

(2) 根据题意分别计算图形面积，再进行整理即可求解；

(3) 类比 (1) (2) 进行拼图，计算面积即可求解。

【小问 1 详解】

解：如图，四边形 $AA_1A_2A_3$ 即为所求；



【小问 2 详解】

解：四边形 $AA_1A_2A_3$ 是一个正方形，一方面，四边形 $AA_1A_2A_3$ 的面积可以直接用公式计算为 c^2 ，另一方面，它的面积等于四个三角形和四边形 $CC_1C_2C_3$ 的面积之和，为

$$4 \times \frac{1}{2}ab + (a-b)^2 = 2ab + a^2 + b^2 - 2ab = a^2 + b^2, \text{ 于是，我们得到 } a^2 + b^2 = c^2.$$

故答案为：正方形， c^2 ， $a^2 + b^2$ ， $a^2 + b^2 = c^2$ ；

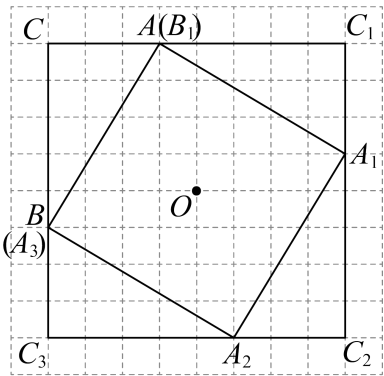
【小问 3 详解】

解：如图，已知 ABC 是直角三角形， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = a$ ， $AC = b$ ， $AB = c$ ，分别画出 ABC 绕点 O 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle A_1B_1C_1$ ，关于点 O 成中心对称的 $\triangle A_2B_2C_2$ ，绕点 O 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle A_3B_3C_3$ 。

则四边形 $AA_1A_2A_3$ 是一个正方形，一方面，四边形 $AA_1A_2A_3$ 的面积可以直接用公式计算为 c^2 ，另一方面，

它的面积等于四边形 $CC_1C_2C_3$ 的面积减去四个三角形，为

$$(a+b)^2 - 4 \times \frac{1}{2}ab = a^2 + b^2 + 2ab - 2ab = a^2 + b^2, \text{ 于是, 我们得到 } a^2 + b^2 = c^2.$$



25. 梅陇中学七年级要举行“阅读之星”评选活动，设计评选方案时考虑如下几个指标因素：①书籍的数量 A ；②书籍的总页数 B ；③书籍的类别 C ；④书籍的平均评分 D 。根据以上指标因素的重要程度赋以不同的系数，建立“阅读之星”的得分公式：

$$m = m_1A + m_2B + m_3C + m_4D, \text{ 其中 } m_1、m_2、m_3、m_4 \text{ 是各项指标因素的系数.}$$

例如，某同学一学期读了 4 本书，总页数 1200 页，涉及 4 个类别，4 本书的平均评分为 5.6 分，那么这位同学的得分计为： $m = 4m_1 + 1200m_2 + 4m_3 + 5.6m_4$ 。如果各项指标因素的系数一旦确定，那么他的“阅读之星”的得分也就确定。

评选小组通过对部分学生及教师对“阅读之星”评选指标因素重要程度的调查，确定了上述四个指标因素的系数，四个指标因素的系数的和必须为 10，系数数值如下表所示：

指标因素	系数
书籍的数量 A	3
书籍的总页数 B	x
书籍的类别 C	3.5
书籍的平均评分 D	1

- 指标因素“书籍的总页数 B ”的系数 x 的值为_____。
- 确定各指标因素的系数后，“阅读之星”的得分公式为 $m =$ _____。
- 下表是七年级甲、乙两位同学“阅读之星”各项指标因素的数值。

	A	B	C	D	得分
甲	5	2000	2	6	
乙	6	1500	3	8	

请计算甲、乙两位同学“阅读之星”的得分.

甲得分：_____, 乙得分：_____

(4) 根据两人的得分情况, 请提出一条优化“阅读之星”评选方案的建议: _____.

【答案】 (1) 2.5 (2) $3A + 2.5B + 3.5C + D$

(3) 5028, 3786.5

(4) 见解析

【解析】

【分析】 本题考查了加权平均数.

(1) 根据四个指标因素的系数之和为 10 即可求解;

(2) 根据 (1) 的结果代入公式计算即可求解;

(3) 将甲、乙的数据代入 (2) 中的公式计算即可;

(4) 根据 (3) 的计算结果, 分析得分构成, 提出合理建议即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 四个指标因素的系数的和必须为 10,

$$\therefore x = 10 - 3 - 3.5 - 1 = 2.5,$$

故答案为: 2.5;

【小问 2 详解】

解: $\because$ 书籍的数量 A 为 3, 书籍的总页数 B 为 2.5, 书籍的类别 C 为 3.5, 书籍的平均评分 D 为 1,

$$\therefore m = 3A + 2.5B + 3.5C + D,$$

故答案为: $3A + 2.5B + 3.5C + D$;

【小问 3 详解】

解: 甲得分为 $= 3 \times 5 + 2.5 \times 2000 + 3.5 \times 2 + 6 = 5028$,

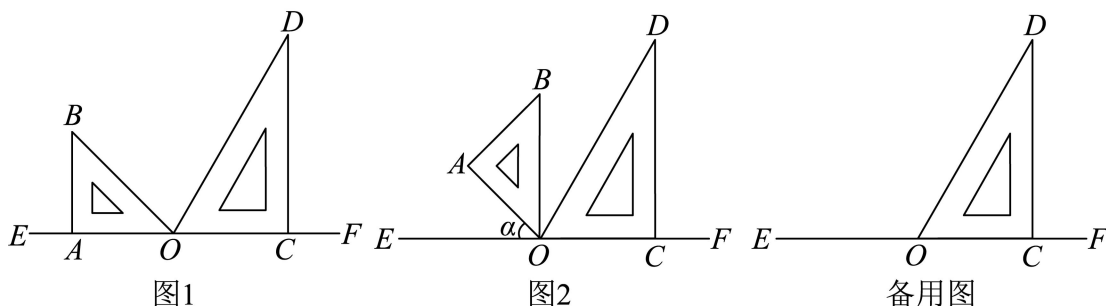
乙得分为 $= 3 \times 6 + 2.5 \times 1500 + 3.5 \times 3 + 8 = 3786.5$;

故答案为: 5028, 3786.5;

【小问 4 详解】

解: 可适当降低指标 B (书籍的总页数) 的系数, 并相应提高其他指标的系数, 以降低 B 项在总分中的权重.

26. 已知一副三角板按如图1的方式拼接在一起, 边 OA 、 OC 与直线 EF 重合, 其中 $\angle AOB = 45^\circ$, $\angle COD = 60^\circ$.



(1) 求图 1 中 $\angle BOD$ 的度数.

(2) 如图 2, 三角板 COD 固定不动, 将三角板 AOB 绕点 O 按顺时针方向旋转一个角度 α , 其中 $0^\circ < \alpha < 180^\circ$.

①当三角板 AOB 的一边平分 $\angle EOD$ 时, 求旋转角 α 的度数.

②是否存在 $\angle AOD = 2\angle BOC$? 若存在, 请直接写出 α 的度数; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) 75°

(2) ① 15° 或 60°

② 130° 或 150°

【解析】

【分析】本题考查了几何图形中的角度的计算、一元一次方程的几何应用、旋转的性质, 解决本题的关键运用数形结合和分类讨论思想.

(1) 根据平角的定义可知 $\angle AOB + \angle BOD + \angle COD = 180^\circ$, 又因为 $\angle AOB = 45^\circ$, $\angle COD = 60^\circ$, 即可求出 $\angle BOD$ 的度数;

(2) ①分 OB 平分 $\angle EOD$ 和 OA 平分 $\angle EOD$ 两种情况求解;

②分 OA 在 OD 左侧、 OA 在 OD 右侧、 OB 在 OC 下方三种情况求解.

【小问 1 详解】

解: 由图可知 $\angle AOB + \angle BOD + \angle COD = 180^\circ$,

$\because \angle AOB = 45^\circ$, $\angle COD = 60^\circ$,

$$\therefore \angle BOD = 75^\circ;$$

【小问2 详解】

$$\textcircled{1}\text{解: } \because \angle AOB = 45^\circ, \angle BOD = 75^\circ,$$

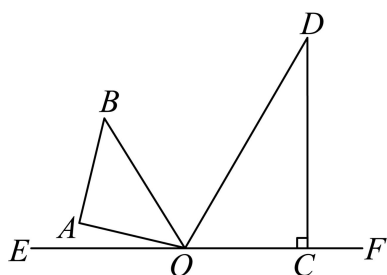
$$\therefore \angle EOD = \angle AOB + \angle BOD = 120^\circ,$$

当 OB 平分 $\angle EOD$ 时, 如下图所示,

$$\text{可得: } \angle EOB = \angle EOA + \angle AOB = \frac{1}{2} \angle EOD = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle EOA = 60^\circ - \angle AOB = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ,$$

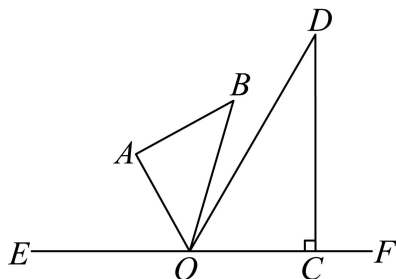
$$\therefore \alpha = 15^\circ;$$



当 OA 平分 $\angle EOD$ 时, 如下图所示,

$$\text{可得: } \angle EOA = \frac{1}{2} \angle EOD = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ,$$

$$\therefore \alpha = 60^\circ;$$



$$\therefore \text{旋转角为 } 15^\circ \text{ 或 } 60^\circ;$$

$$\textcircled{2}\text{解: } \because \angle BOD = 75^\circ, \angle COD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC = \angle BOD + \angle COD = 75^\circ + 60^\circ = 135^\circ,$$

当 OA 在 OD 左侧, 旋转角为 α 时,

$$\text{可得: } \angle BOC = 135^\circ - \alpha, \angle AOD = 120^\circ - \alpha,$$

$$\because \angle AOD = 2\angle BOC,$$

$$\therefore 120^\circ - \alpha = 2(135^\circ - \alpha),$$

$$\therefore \alpha = 150^\circ (\text{不符合题意});$$

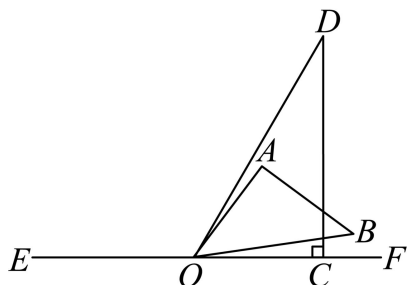
当 OA 在 OD 右侧, 旋转角为 α 时, 如下图所示,

可得: $\angle BOC = 135^\circ - \alpha$, $\angle AOD = \alpha - 120^\circ$,

$$\because \angle AOD = 2\angle BOC,$$

$$\therefore \alpha - 120^\circ = 2(135^\circ - \alpha),$$

$$\therefore \alpha = 130^\circ;$$



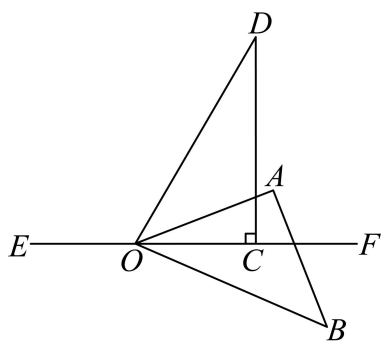
当 OB 在 OC 的下方, 旋转角为 α 时,

可得: $\angle BOC = \alpha - 135^\circ$, $\angle AOD = \alpha - 120^\circ$,

$$\because \angle AOD = 2\angle BOC,$$

$$\therefore \alpha - 120^\circ = 2(\alpha - 135^\circ),$$

$$\therefore \alpha = 150^\circ;$$



综上所述, 旋转角 α 的度数为 130° 或 150° .