

七年级数学学科

(满分 100 分, 时间 90 分钟)

一、选择题 (共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 下列各代数式中是五次单项式的是 ()

A. $5a^3b$

B. 3^2a^2b

C. $-a^2b^3$

D. $9a^2 + b^3$

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据单项式的次数及定义逐个判断即可得到答案.

【详解】 解: $5a^3b$ 是 4 次单项式, 故 A 不符合题意;

3^2a^2b 是 3 次单项式, 故 B 不符合题意;

$-a^2b^3$ 是 5 次单项式, 故 C 符合题意;

$9a^2 + b^3$ 是多项式, 故 D 不符合题意;

故选: C.

【点睛】 本题考查单项式的定义及次数: 数与字母的积叫单项式, 所有字母指数和为单项式的次数.

2. 下列计算正确的是 ()

A. $2a^2 + 3a^2 = 6a^2$

B. $a^6 \div a^2 = a^3$

C. $(a^2)^3 = a^5$

D. $(3a)^2 = 9a^2$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查同底数幂除法, 合并同类项, 幂的乘方与积的乘方, 利用同底数幂除法, 合并同类项, 幂的乘方与积的乘方法则逐项判断即可. 熟练掌握相关运算法则是解题的关键.

【详解】 解: A、 $2a^2 + 3a^2 = 5a^2$, 故此选项不符合题意,

B、 $a^6 \div a^2 = a^4$, 故此选项不符合题意,

C、 $(a^2)^3 = a^6$, 故此选项不符合题意,

D、 $(3a)^2 = 9a^2$, 故此选项符合题意,

故选: D.

3. 下列等式中, 从左到右的变形是因式分解的是 ()

A. $x(x-3) = x^2 - 3x$

B. $x^2 - 5x + 6 = x(x-5) + 6$

C. $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$

D. $x^2 + x = x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了因式分解的定义，能熟记因式分解的定义的内容是解此题的关键．根据因式分解的概念：将多项式写成几个整式积的形式，依据此对各个选项进行分析即可求出答案．

【详解】解：A. $x(x-3) = x^2 - 3x$ ，是整式的乘法，不是因式分解，故本项不符合题意；

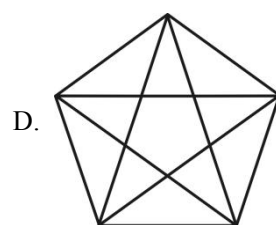
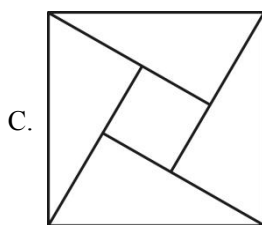
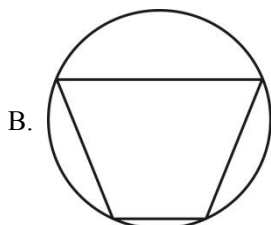
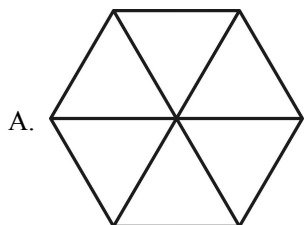
B. $x^2 - 5x + 6 = x(x-5) + 6$ ，该等式右边不是整式积的形式，故本项不符合题意；

C. $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$ ，符合因式分解的定义，故本项符合题意；

D. $x^2 + x = x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ ，该等式右边含有分式，故本项不符合题意；

故选：C．

4. 下列图形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是（ ）



【答案】A

【解析】

【分析】本题考查轴对称图形与中心对称图形的判定，关键是牢记两种图形的定义：轴对称图形是指存在一条直线，沿该直线折叠后直线两旁的部分能够完全重合；中心对称图形是指存在一个点，绕该点旋转 180° 后图形能与自身重合．我们需要对每个选项分别判断是否同时满足这两个条件．

【详解】解：选项 A：该图形是轴对称图形；将其绕中心旋转 180° 后能与自身重合，是中心对称图形，符合题意；

选项 B：该图形是轴对称图形，但绕中心旋转 180° 后，图形中的三角形位置与原图形不重合，不是中心对称图形，不符合题意；

选项 C：该图形绕中心旋转 180° 后能与自身重合，是中心对称图形，但不存在直线能使它沿直线折叠后两旁部分完全重合，不是轴对称图形，不符合题意；

选项 D：该图形是轴对称图形，但绕中心旋转 180° 后，图形的尖角位置与原图形不重合，不是中心对称图形，不符合题意；

故选：A.

5. 如果将分式 $\frac{a+b}{a^2+b^2}$ 中的 a 和 b 都扩大为原来的 2 倍，那么分式的值 ()

A. 缩小为原来的 $\frac{1}{2}$

B. 扩大为原来的 4 倍

C. 扩大为原来的 2 倍

D. 缩小为原来的 $\frac{1}{4}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查分式的基本性质，分式的分子和分母同时乘以或除以同一个不为 0 的整式，分式的值不变；

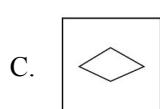
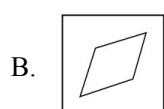
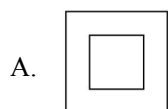
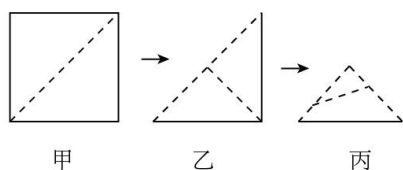
先根据题意对分式进行变形，再依据分式的性质进行化简，将化简后的分式与原分式进行对比即可.

【详解】解：将 a 和 b 都扩大为原来的 2 倍，得 $\frac{2a+2b}{(2a)^2+(2b)^2} = \frac{2a+2b}{4a^2+4b^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a+b}{a^2+b^2}$,

故分式的值缩小为原来的 $\frac{1}{2}$,

故选：A.

6. 如图，小强拿一张正方形的纸，沿图甲中虚线对折一次得图乙，再对折一次得图丙，然后用剪刀沿图丙中的虚线剪去一个角，再打开后的形状是 ()



【答案】B

【解析】

【分析】严格按照图中的方法亲自动手操作一下，即可很直观地呈现出来.

【详解】解：严格按照图中的顺序向右下对折，向左下对折，从上方角剪去一个直角三角形，展开得到结

论.

故选: B.

【点睛】此题主要考查了学生的动手能力及空间想象能力, 解题的关键是学生只要亲自动手操作, 答案就会很直观地呈现.

二、填空题 (共 12 题, 每题 2 分, 满分 24 分)

7. 多项式 $3xy^2 - xy + 1$ 是_____次三项式.

【答案】三

【解析】

【分析】本题考查了多项式. 根据多项式次数定义: 多项式的次数是指多项式中次数最高的项的次数, 算出各项次数, 即可确定结果.

【详解】解: 多项式 $3xy^2 - xy + 1$ 中 $3xy^2$ 的次数 $1+2=3$, $-xy$ 的次数是 $1+1=2$, 常数项 1 的次数是 0,
 $\therefore$ 最高次项的次数是 3,
 $\therefore$ 多项式次数是三.

故答案为: 三.

8. 将多项式 $x^2 - y^2 + xy^3 - 2x^3y$ 按字母 x 降幂排列, 结果是_____.

【答案】 $-2x^3y + x^2 + xy^3 - y^2$

【解析】

【分析】按字母 x 降幂排列即按照字母 x 次数从高到低进行排序, 据此求解即可.

【详解】将多项式 $x^2 - y^2 + xy^3 - 2x^3y$ 按字母 x 降幂排列为 $-2x^3y + x^2 + xy^3 - y^2$,

故答案为: $-2x^3y + x^2 + xy^3 - y^2$

【点睛】本题主要考查了多项式的降幂排序, 解题的关键是熟知降幂排序的定义.

9. 若 $-2x^{m+2}y^4$ 与 $3x^4y^n$ 是同类项, 则 m^n 的值为_____.

【答案】16

【解析】

【分析】本题考查了同类项的定义, 代数式求值, 根据同类项的定义: 所含字母相同, 相同字母的指数也相同的项叫同类项, 求出 m 、 n 的值, 再代入代数式计算即可, 掌握同类项的定义是解题的关键.

【详解】解: 由同类项的定义可知 $m+2=4$, $n=4$,
解得 $m=2$, $n=4$,

$$\therefore m^n = 2^4 = 16,$$

故答案为：16.

10. 计算 $\left(-\frac{2}{3}xy^2\right)^3$ 的结果是_____.

【答案】 $-\frac{8}{27}x^3y^6$

【解析】

【分析】 本题考查了积的乘方，幂的乘方，掌握整式的乘方运算是关键.

根据积的乘方，幂的乘方运算法则计算即可.

【详解】 解： $\left(-\frac{2}{3}xy^2\right)^3 = -\frac{8}{27}x^3y^6,$

故答案为： $-\frac{8}{27}x^3y^6$.

11. 如果分式 $\frac{x^2-4}{x-2}$ 的值为零，那么 x 的值是_____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题考查分式值为零的条件，关键是牢记分式值为零的核心条件：分子为零且分母不为零(二者必须同时满足，缺一不可).

【详解】 解： 要使分式 $\frac{x^2-4}{x-2}$ 的值为零，需同时满足以下两个条件：

$$\begin{cases} x^2-4=0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases}, \text{ 解得 } x=-2.$$

故答案为：-2.

12. 分解因式： $2m^2n-mn^2$ =_____.

【答案】 $mn(2m-n)$

【解析】

【分析】 根据分解因式的方法求解即可.

【详解】 $2m^2n-mn^2 = mn(2m-n).$

故答案为： $mn(2m-n)$.

【点睛】此题考查了因式分解的方法，解题的关键是熟练掌握因式分解的方法．因式分解的方法有：提公因式法，平方差公式法，完全平方公式法，十字相乘法等．

13. 将 $2x^2y^{-3}$ 表示成只含有正整数指数幂的形式： $2x^2y^{-3} = \underline{\hspace{2cm}}$ ．

【答案】 $\frac{2x^2}{y^3}$

【解析】

【分析】本题考查了负整数指数幂，熟练掌握运算法则是解题的关键．根据负整数指数幂的运算法则求解，即可解题．

【详解】解： $2x^2y^{-3} = \frac{2x^2}{y^3}$ ，

故答案为： $\frac{2x^2}{y^3}$ ．

14. 计算： $(3a^6x^3 - 6ax^5) \div (-3ax^3) = \underline{\hspace{2cm}}$ ．

【答案】 $-a^5 + 2x^2$

【解析】

【分析】本题考查整式的除法运算．用多项式的每一项都除以单项式，并将结果相加，即可得出答案．

【详解】解： $(3a^6x^3 - 6ax^5) \div (-3ax^3)$
 $= 3a^6x^3 \div (-3ax^3) - 6ax^5 \div (-3ax^3)$
 $= -a^5 + 2x^2$ ．

故答案为： $-a^5 + 2x^2$ ．

15. 已知： $a + b = 3$ ， $ab = \frac{2}{3}$ ，化简 $(a-1)(b-1)$ 的结果是 $\underline{\hspace{2cm}}$ ．

【答案】 $-\frac{4}{3}$

【解析】

【分析】本题考查了整式的混合运算和求值的应用．先算乘法，再变形，最后整体代入求出即可．

【详解】解： $\because a + b = 3$ ， $ab = \frac{2}{3}$ ，
 $\therefore (a-1)(b-1)$
 $= ab - a - b + 1$

$$= ab - (a + b) + 1$$

$$= \frac{2}{3} - 3 + 1$$

$$= -\frac{4}{3},$$

故答案为: $-\frac{4}{3}$.

16. 已知关于 x 的分式方程 $\frac{x-3}{x-2} = \frac{m}{2-x}$ 有增根, 则 m 的值为_____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 本题主要考查了根据分式方程根的情况求参数, 先把原方程化为整式方程后求出 $x = 3 - m$, 再根据分式方程有增根的情况是分母为 0 得到 $x - 2 = 0$, 即 $x = 2$, 则 $3 - m = 2$, 解方程即可得到答案.

【详解】 解: $\frac{x-3}{x-2} = \frac{m}{2-x}$

去分母得: $x - 3 = -m$,

解得 $x = 3 - m$,

$\therefore$ 关于 x 的分式方程 $\frac{x-3}{x-2} = \frac{m}{2-x}$ 有增根,

$\therefore x - 2 = 0$, 即 $x = 2$,

$\therefore 3 - m = 2$,

$\therefore m = 1$,

故答案为: 1.

17. 已知 $m^2 - 6m - 1 = 0$, 那么 $3m^2 - 12m + \frac{1}{m^2}$ 的值是_____.

【答案】 40

【解析】

【分析】 本题考查了代数式求值, 熟练掌握等式性质及完全平方公式是解题的关键.

先根据题意得出 $m^2 - 6m = 1$, $m^2 + \frac{1}{m^2} = 38$, 再代入代数式计算即可.

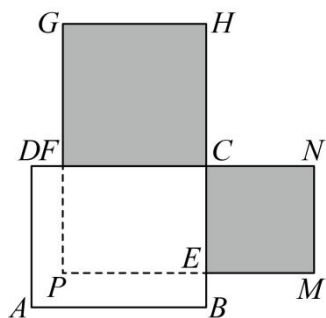
【详解】 解: $\because m^2 - 6m - 1 = 0$,

$\therefore m^2 - 6m = 1$, $m - 6 - \frac{1}{m} = 0$,

$$\begin{aligned}
&\therefore m - \frac{1}{m} = 6, \\
&\therefore \left(m - \frac{1}{m}\right)^2 = m^2 + \frac{1}{m^2} - 2 = 36, \\
&\therefore m^2 + \frac{1}{m^2} = 38, \\
&\therefore 3m^2 - 12m + \frac{1}{m^2} \\
&= m^2 + \frac{1}{m^2} + 2(m^2 - 6m) \\
&= 38 + 2 \times 1 \\
&= 40,
\end{aligned}$$

故答案为：40.

18. 如图，在长方形 $ABCD$ 中， $AB = 16, BC = 14$ ，点 E, F 是 BC, CD 上的点，且 $BE = DF$ ，分别以 FC, CE 为边在长方形 $ABCD$ 外侧作正方形 $CFGH$ 和正方形 $CEMN$ ，在长方形 $ABCD$ 内侧作长方形 $CEPF$ ，若长方形 $CEPF$ 的面积为 m ，则图中阴影部分的面积和为_____。(用含 m 的代数式表示)



【答案】 $2m + 4$

【解析】

【分析】 本题考查完全平方公式的应用，关键是通过设未知数表示出相关线段长度，利用完全平方公式将两个正方形的面积和转化为含 m 的代数式。设 $BE = DF = x$ ，先根据长方形的边长性质和已知条件表示出 CE 和 CF 的长度，结合长方形 $CEPF$ 的面积得到 $CE \cdot CF = m$ ，再利用完全平方公式 $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$ ，将两个正方形的面积和转化为含 m 的式子，代入计算即可得出结果。

【详解】 解：设 $BE = DF = x$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是长方形， $AB = 16, BC = 14$ ，

$\therefore CD = AB = 16, CE = BC - BE = 14 - x, CF = CD - DF = 16 - x$ 。

$\therefore$ 长方形 $CEPF$ 的面积为 m ，

$\therefore m = CE \cdot CF = (14 - x)(16 - x)$ 。

$$S_{\text{阴影}} = CE^2 + CF^2,$$

根据完全平方公式: $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$,

令 $a = CE$, $b = CF$, 则 $CE - CF = (14-x) - (16-x) = -2$,

$$\therefore CE^2 + CF^2 = (CE - CF)^2 + 2 \cdot CE \cdot CF = (-2)^2 + 2m = 4 + 2m.$$

故答案为: $2m + 4$.

三、简答题 (共 6 题, 每题 5 分, 满分 30 分)

19. 计算: $2^4 - 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} + 2 \times \left(\pi - \frac{1}{2}\right)^0$

【答案】 $\frac{27}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查实数的混合运算, 涉及正整数指数幂、负整数指数幂、零指数幂的运算规则. 关键是掌握相关运算法则, 先分别计算各项的乘方、负指数幂、零指数幂, 再进行乘法运算, 最后按照从左到右的顺序进行加减运算.

【详解】 解: $2^4 - 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} + 2 \times \left(\pi - \frac{1}{2}\right)^0$

$$= 16 - 3 \times \frac{3}{2} + 2 \times 1$$

$$= 16 - \frac{9}{2} + 2$$

$$= 18 - \frac{9}{2}$$

$$= \frac{36}{2} - \frac{9}{2}$$

$$= \frac{27}{2}.$$

20. 计算: $(-2x^2)^3 - x \cdot x^5 + (-3x^3)^2$.

【答案】 0

【解析】

【分析】 此题考查了整式的混合运算能力, 关键是能准确进行积的乘方、同底数幂相乘、幂的乘方和合并同

类项的计算. 先计算积的乘方、同底数幂相乘和幂的乘方, 再合并同类项.

【详解】解: $(-2x^2)^3 - x \cdot x^5 + (-3x^3)^2$

$$= -8x^6 - x^6 + 9x^6$$

$$= 0$$

21. 计算: $(x+2y)(-x-2y) - (2x+y)(-2x+y)$

【答案】 $3x^2 - 4xy - 5y^2$

【解析】

【分析】 本题考查了平方差公式、完全平方公式、熟练掌握公式是解题的关键. 先根据完全平方公式、平方差公式进行计算, 再合并即可.

【详解】解: $(x+2y)(-x-2y) - (2x+y)(-2x+y)$

$$= -(x+2y)(x+2y) - (2x+y)(-2x+y)$$

$$= -(x+2y)^2 - (y+2x)(y-2x)$$

$$= -(x^2 + 4xy + 4y^2) - (y^2 - 4x^2)$$

$$= -x^2 - 4xy - 4y^2 - y^2 + 4x^2$$

$$= 3x^2 - 4xy - 5y^2.$$

22. 因式分解: $a^2 - 4b^2 - 2a + 1$

【答案】 $(a-1-2b)(a-1+2b)$

【解析】

【分析】 本题考查因式分解的分组分解法, 以及完全平方公式、平方差公式的应用. 关键是通过合理分组, 将原式转化为可利用公式分解的形式: 先把原式中能构成完全平方的项结合, 得到完全平方后, 再与剩余项结合形成平方差的形式, 最后用平方差公式完成分解.

【详解】解: 原式 $= (a^2 - 2a + 1) - 4b^2$

$$= (a-1)^2 - (2b)^2$$

$$= (a-1-2b)(a-1+2b).$$

23. 因式分解: $(a^2 + 3a)^2 - 9(a^2 + 3a) + 20$

【答案】 $(a+4)(a-1)(a^2 + 3a - 5)$

【解析】

【分析】 本题考查因式分解的综合运用, 涉及十字相乘法分解因式. 先将 $a^2 + 3a$ 看作一个整体, 把原式转化为关于该整体的二次三项式, 用十字相乘法分解; 再对分解后得到的因式中可继续分解的部分, 再次用十字相乘法分解, 直至所有因式在有理数范围内均不能再分解.

【详解】 解: 原式 $= (a^2 + 3a - 4)(a^2 + 3a - 5)$,
 $= (a+4)(a-1)(a^2 + 3a - 5)$.

24. 解方程: $\frac{4}{x^2 - 1} = \frac{x+2}{x-1} - 1$

【答案】 $x = \frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查分式方程的求解, 解题关键是通过去分母将分式方程转化为整式方程, 求解整式方程后必须进行检验, 排除增根的情况. 解题步骤为: 先对分母因式分解确定最简公分母, 两边同乘最简公分母去掉分母, 解所得的整式方程, 最后将解代入最简公分母检验, 若不为 0 则是原方程的解, 否则为增根.

【详解】 解: 方程两边同乘 $(x+1)(x-1)$, 得: $4 = (x+2)(x+1) - (x+1)(x-1)$,

展开并化简得 $3x = 1$,

解得 $x = \frac{1}{3}$;

检验: 当 $x = \frac{1}{3}$ 时, $(x+1)(x-1) \neq 0$,

$\therefore x = \frac{1}{3}$ 是原分式方程的解.

四、解答题 (共 4 题, 第 25、26 题每题 6 分, 第 27、28 题每题 8 分, 共 28 分)

25. 先化简, 再求值: $\left(x - \frac{x^2}{x-1}\right) \div \left(2x - \frac{2}{1-x} + 2\right)$, 其中 $x = -3^{-1}$

【答案】 化简结果为 $-\frac{1}{2x}$, 值为 $\frac{3}{2}$

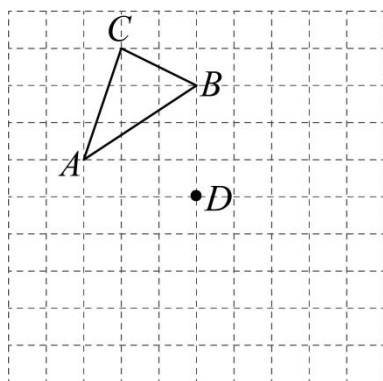
【解析】

【分析】 本题考查分式的化简求值及负整数指数幂的运算，先分别化简两个括号内的式子，再将除法运算转化为乘法运算，约分化简得到最简分式；接着计算出 x 的值，最后代入最简分式计算结果.

$$\begin{aligned}
 \text{【详解】 解: } & \left(x - \frac{x^2}{x-1}\right) \div \left(2x - \frac{2}{1-x} + 2\right) \\
 &= \left[\frac{x(x-1)}{x-1} - \frac{x^2}{x-1}\right] \div \left(2x + 2 + \frac{2}{x-1}\right) \\
 &= \frac{x^2 - x - x^2}{x-1} \div \frac{2(x+1)(x-1) + 2}{x-1} \\
 &= \frac{-x}{x-1} \div \frac{2x^2 - 2 + 2}{x-1} \\
 &= \frac{-x}{x-1} \cdot \frac{x-1}{2x^2} \\
 &= -\frac{1}{2x}.
 \end{aligned}$$

$$\text{将 } x = -3^{-1} = -\frac{1}{3} \text{ 代入, 原式} = -\frac{1}{2 \times \left(-\frac{1}{3}\right)} = -\frac{1}{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}.$$

26. 在图中网格上按要求画出图形，并回答问题:



(1) 如果将三角形 ABC 平移，使得点 A 平移到图中点 D 位置，点 B 、点 C 的对应点分别为点 E 、点 F ，请画出三角形 DEF ；

(2) 画出三角形 ABC 关于点 D 成中心对称的三角形 $A_1B_1C_1$ ；

(3) 三角形 DEF 与三角形 $A_1B_1C_1$ _____ (填“是”或“否”) 关于某个点成中心对称？如果是，请在图

中画出这个对称中心，并记作点 O 。

【答案】(1) 见详解 (2) 见详解

(3) 是，画图见详解

【解析】

【分析】本题主要考查作图-旋转变换和平移变换，解题的关键是熟练掌握旋转变换和平移变换的定义和性质，并据此得出变换后的对应点。

(1) 由题意得出，需将点 B 与点 C 先向右平移 3 个单位，再向下平移 1 个单位，据此可得；

(2) 分别作出三顶点分别关于点 D 的对称点，再首尾顺次连接可得；

(3) 连接两组对应点即可得。

【小问 1 详解】

如图所示， $\triangle DEF$ 即为所求。

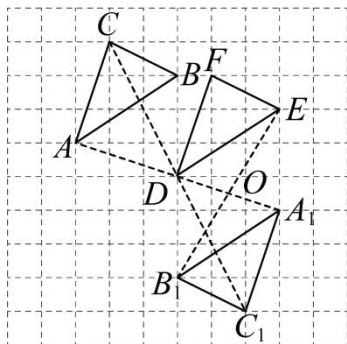
【小问 2 详解】

如图所示， $\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求；

【小问 3 详解】

如图所示， $\triangle DEF$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 是关于点 O 成中心对称，

故答案为：是。



27. 某单位需要完成一项工程，单位派遣甲施工队进场施工，计划用 45 天时间完成整个工程。当甲施工队工作 24 天后，单位又派遣乙工程队协助进行施工，最终比计划提前 7 天完成施工。

(1) 若乙施工队单独施工，完成整个工程需要多少天？

(2) 若单位一开始派遣甲、乙两支队伍合作施工，能否在 25 天内完成工程，并说明理由。

【答案】(1) 乙施工队单独施工，完成整个工程需要 90 天；

(2) 不能，理由见解析。

【解析】

【分析】本题考查分式方程在工程问题的实际应用，核心是将总工作量看作单位“1”，利用“工作效率 $\times$

工作时间=工作量”的数量关系建立方程或进行计算.

(1) 先根据计划工期和提前天数确定实际总工期, 进而得到甲、乙的工作时间, 设乙单独完成的天数为未知数, 根据总工作量为 1 列方程求解;

(2) 先计算甲、乙合作的工作效率, 再求出合作完成工程的总时间, 与 25 天比较大小即可判断.

【小问 1 详解】

解: 设乙施工队单独施工完成整个工程需要 x 天, 将整个工程的工作量看作单位 “1”,

则甲施工队的工作效率为 $\frac{1}{45}$, 乙施工队的工作效率为 $\frac{1}{x}$.

根据题意, 工程实际完成时间为 $45 - 7 = 38$ (天), 所以甲队总共工作了 38 天, 乙队工作了 $38 - 24 = 14$ (天).

根据总工作量为 1, 可列方程: $\frac{38}{45} + \frac{14}{x} = 1$,

解得: $x = 90$.

经检验, $x = 90$ 是原方程的解, 且符合实际意义;

答: 乙施工队单独施工, 完成整个工程需要 90 天;

【小问 2 详解】

解: 若甲、乙两支队伍一开始合作施工,

则两队合作的工作效率为 $\frac{1}{45} + \frac{1}{90} = \frac{2}{90} + \frac{1}{90} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$,

完成整个工程所需的时间为 $1 \div \frac{1}{30} = 30$ (天).

$\therefore 30 > 25$,

$\therefore$ 不能在 25 天内完成工程;

答: 不能在 25 天内完成工程.

28. 若一个数是一个整数的平方, 则称这个数是完全平方数, 类似地, 多项式 $a^2 + 2ab + b^2$ 及 $a^2 - 2ab + b^2$ 称作完全平方式. 如果一个多项式不是完全平方式, 我们常做如下变形: 先添加一个适当的项, 使式子中出现完全平方式, 再减去这个项, 使整个式子的值不变, 这种方法叫做配方法. 配方法是一种重要的解决问题的数学方法, 不仅可以将一个看似不能分解的多项式分解因式, 还能解决一些与非负数有关的问题或求代数式的最大值、最小值等.

例如: 分解因式 $x^2 + 2x - 3$.

原式 $= (x^2 + 2x + 1) - 4 = (x + 1)^2 - 2^2 = (x + 1 + 2)(x + 1 - 2) = (x + 3)(x - 1)$;

例如: 求代数式 $2x^2 + 4x - 6$ 的最小值.

原式 $= 2x^2 + 4x - 6 = 2(x^2 + 2x - 3) = 2(x + 1)^2 - 8$. 可知当 $x = -1$ 时, $2x^2 + 4x - 6$ 有最小值, 最小值

是-8.

(1) 用配方法分解因式: $a^2 + 2a - 8$;

(2) 当 x 为何值时, 代数式 $-2x^2 - 8x + 5$ 有最大值, 并求出这个最大值.

(3) 求使得 $m^2 + m - 5$ 是完全平方数的所有整数 m 的积(直接写出答案).

【答案】(1) $(a+4)(a-2)$;

(2) 当 $x = -2$ 时, 代数式 $-2x^2 - 8x + 5$ 有最大值13;

(3) 180

【解析】

【分析】本题考查配方法的综合应用, 涵盖因式分解、代数式最值求解、完全平方数的整数解探究, 核心是通过配方法将代数式转化为完全平方式, 结合平方差公式、非负数性质或整数因数分解求解.

(1) 通过配方法构造平方差形式, 再利用平方差公式完成因式分解;

(2) 先提取二次项系数, 对括号内式子配方后, 结合二次项系数的正负判断最值的存在条件与取值;

(3) 通过设完全平方数为整数平方的形式, 配方后转化为整数因数分解问题, 枚举所有可能的因数对求出整数 m , 再计算乘积.

【小问1详解】

解: $a^2 + 2a - 8 = (a^2 + 2a + 1) - 1 - 8 = (a+1)^2 - 9 = (a+1)^2 - 3^2 = (a+1+3)(a+1-3) = (a+4)(a-2)$;

【小问2详解】

解: $-2x^2 - 8x + 5 = -2(x^2 + 4x) + 5 = -2[(x^2 + 4x + 4) - 4] + 5 = -2[(x+2)^2 - 4] + 5 = -2(x+2)^2 + 8 + 5 = -2(x+2)^2 + 13$,

$\because -2 < 0$,

$\therefore$ 当 $(x+2)^2 = 0$ 即 $x = -2$ 时, 代数式有最大值, 最大值为13;

【小问3详解】

解: 设 $m^2 + m - 5 = k^2$ (k 为非负整数),

配方得: $\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 = k^2 + \frac{21}{4}$,

两边乘4得: $(2m+1)^2 - 4k^2 = 21$, 即 $(2m+1-2k)(2m+1+2k) = 21$,

$\because m, k$ 为整数,

$\therefore 2m+1-2k$ 和 $2m+1+2k$ 均为整数, 且为21的整数因数对, 且 $2m+1-2k \leq 2m+1+2k$,

21的整数因数对为: $(1, 21)$ 、 $(3, 7)$ 、 $(-21, -1)$ 、 $(-7, -3)$, 分情况求解:

①当 $\begin{cases} 2m+1-2k=1 \\ 2m+1+2k=21 \end{cases}$, 两式相加得 $2(2m+1)=22$, 解得 $m=5$;

②当 $\begin{cases} 2m+1-2k=3 \\ 2m+1+2k=7 \end{cases}$, 两式相加得 $2(2m+1)=10$, 解得 $m=2$;

③当 $\begin{cases} 2m+1-2k=-21 \\ 2m+1+2k=-1 \end{cases}$, 两式相加得 $2(2m+1)=-22$, 解得 $m=-6$;

④当 $\begin{cases} 2m+1-2k=-7 \\ 2m+1+2k=-3 \end{cases}$, 两式相加得 $2(2m+1)=-10$, 解得 $m=-3$;

所有整数 m 为 5、2、-6、-3, 它们的积为 $5 \times 2 \times (-6) \times (-3) = 180$.