

## 2025 学年第一学期期末素质调研七年级数学试卷

### 一、选择题：(本大题共 6 题，每题 2 分，满分 12 分)

1. 下列各组式子中，( ) 不是同类项.

A.  $\frac{1}{2}$  和 5

B.  $-\frac{5}{7}x^4y^2$  和  $\frac{3x^4y^2}{8}$

C.  $2x$  和  $2\pi$

D.  $yx^3$  和  $-\frac{x^3y}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查的是同类项的定义，准确理解“所含字母相同，并且相同字母的指数也相同的项叫做同类项”是解题的关键. 根据同类项的定义，对每个选项逐一判断，从而找出不是同类项的式子.

【详解】同类项要求字母部分完全相同，

选项 A:  $\frac{1}{2}$  和 5 均为常数项，无字母，是同类项；

选项 B:  $-\frac{5}{7}x^4y^2$  和  $\frac{3x^4y^2}{8}$  的字母部分均为  $x^4y^2$ ，指数相同，是同类项；

选项 C:  $2x$  含有字母  $x$ ， $2\pi$  为常数项，无字母，字母部分不同，不是同类项；

选项 D:  $yx^3$  即  $x^3y$ ，与  $-\frac{x^3y}{2}$  的字母部分均为  $x^3y$ ，指数相同，是同类项；

故选：C.

2. 下列式子从左到右变形，正确的是 ( )

A.  $\frac{a-2}{b-2} = \frac{a}{b}$

B.  $\frac{4a^2}{16a^3} = \frac{1}{4a}$

C.  $\frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$

D.  $\frac{a+2}{b-1} = \frac{2a+2}{2b-2}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了分式的基本性质，即分子分母同时乘或除以同一个不为零的数或整式，分式的值不变. 选项 B 通过约分正确变形，其他选项均不符合性质.

【详解】解：A、 $\because \frac{a-2}{b-2}$  与  $\frac{a}{b}$  分子分母不是同时乘除同一式子， $\therefore$  不一定相等，故该选项不符合题意；

B、 $\frac{4a^2}{16a^3} = \frac{4a^2 \div 4a^2}{16a^3 \div 4a^2} = \frac{1}{4a}$ ，故该选项符合题意；

C、 $\because \frac{a}{b}$  与  $\frac{a^2}{b^2}$  分子分母乘的数不同， $\therefore$  不一定相等，故该选项不符合题意；

D、 $\frac{a+2}{b-1} = \frac{2(a+2)}{2(b-1)} = \frac{2a+4}{2b-2} \neq \frac{2a+2}{2b-2}$ ，故该选项不符合题意；

故选：B.

3. 下列算式中，适合用平方差公式计算的是 ( ).

A.  $(x-2y)(2y-x)$     B.  $(x-2y)(-x-2y)$     C.  $(x-2y)(2x+y)$     D.  $(x-2y)(y+2x)$

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了平方差公式，熟练掌握以上知识是解题的关键.

平方差公式适用于形式为  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$  的算式，即两个二项式中一项相同，另一项互为相反数，需逐一检查各选项是否符合此形式.

【详解】解： $\because$  平方差公式要求两式分别为  $a+b$  和  $a-b$  的形式，

选项 A:  $(x-2y)(2y-x) = -(x-2y)^2$ ，不符合公式；

选项 B:  $(x-2y)(-x-2y) = (-2y+x)(-2y-x) = (-2y)^2 - x^2$ ，符合  $(a+b)(a-b)$  的形式 (其中  $a = -2y, b = x$ )；

选项 C:  $(x-2y)(2x+y)$ ，无相同或相反项，不符合；

选项 D:  $(x-2y)(y+2x)$ ，无相同或相反项，不符合；

故选：B.

4. 如果  $A$  和  $B$  都是三次整式，那么  $A+B$  是 ( ).

A. 三次整式    B. 六次整式    C. 次数不高于三的整式    D. 以上答案都不对

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了整式的加法，两个三次整式相加，最高次项可能抵消，因此和式的次数不高于三，据此进行分析，即可作答.

【详解】解： $\because A$  和  $B$  都是三次整式，

$\therefore A+B$  中，三次项系数可能相互抵消，例如  $3x^3 + 2x + (-3x^3 + x) = 3x$ ，

则此时  $A+B$  的结果次数低于三;

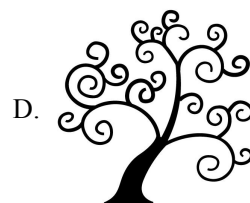
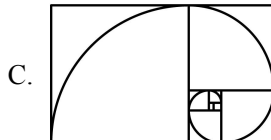
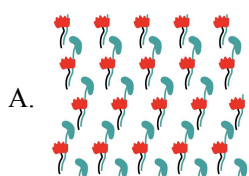
若未抵消, 例如  $3x^3 + 2x + (-2x^3 + x) = x^3 + 3x$

则此时  $A+B$  的结果次数为三,

那么  $A+B$  是次数不高于三的整式,

故选: C.

5. 下列图形中, 属于四方连续纹样的是 ( ).



【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了四方连续纹样, 熟练掌握四方连续纹样是指一个单位纹样向上下左右四个方向反复连续循环排列所产生的纹样, 是解题的关键.

根据四方连续纹样图形的定义, 逐项分析判断即可得出答案.

【详解】解: A、属于四方连续纹样, 符合题意;

B、不属于四方连续纹样, 不符合题意;

C、不属于四方连续纹样, 不符合题意;

D、不属于四方连续纹样, 不符合题意;

故选: A.

6. 下列说法正确的是 ( )

A. 平移和旋转都不改变图形的形状, 但平移改变了图形的位置, 旋转没有改变图形的位置.

B. 圆是轴对称图形, 对称轴是其直径, 也是中心对称图形, 对称中心是圆心.

C. 成轴对称的两个图形形状相同, 大小相等, 经平移后必能重合.

D. 成中心对称的两个图形中, 连接每组对称点的线段都能被对称中心平分.

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了几何变换的性质和圆的基本概念, 据此相关性质内容进行逐项分析, 即可作答.

【详解】解: A、平移和旋转均不改变图形的形状和大小, 但均改变图形的位置, 故该选项不符合题意;

B、圆是轴对称图形, 对称轴是直径所在的直线 (直径是线段, 非直线), 也是中心对称图形, 对称中心是

圆心，原说法的“对称轴是其直径”表述错误，故该选项不符合题意；

C、成轴对称的两个图形全等，但经平移后不一定重合（可能需反射），故该选项不符合题意；

D、中心对称的性质：连接对称点的线段必被对称中心平分，故该选项符合题意；

故选：D.

## 二、填空题：（本大题共 12 题，每题 2 分，满分 24 分）

7. 计算： $(-xy^4)^3 = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】  $-x^3y^{12}$

【解析】

【分析】 本题考查了积的乘方与幂的乘方，掌握这两个运算法则是关键；先计算积的乘方，再计算幂的乘方即可.

【详解】 解：  $(-xy^4)^3 = (-x)^3 \cdot (y^4)^3 = -x^3y^{12}$ ,

故答案为：  $-x^3y^{12}$ .

8. 将整式  $7x^3y - 4y^3 - 3x^2y^4 + xy^2$  按  $x$  升幂排列为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】  $-4y^3 + xy^2 - 3x^2y^4 + 7x^3y$

【解析】

【分析】 本题考查了多项式的升幂排列，需按字母  $x$  的指数从小到大排列各项，据此分析，即可作答.

【详解】 解： 将整式  $7x^3y - 4y^3 - 3x^2y^4 + xy^2$  按  $x$  升幂排列为  $-4y^3 + xy^2 - 3x^2y^4 + 7x^3y$ .

故答案为：  $-4y^3 + xy^2 - 3x^2y^4 + 7x^3y$ .

9. 计算：  $(9a^3b^4c - 6a^4b^5) \div (-3ab^4) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】  $2a^3b - 3a^2c$

【解析】

【分析】 本题考查的是多项式除以单项式的运算，掌握多项式除以单项式的运算法则是解题的关键. 根据多项式除以单项式的法则，将多项式的每一项分别除以单项式，再把所得的商相加，进而求出式子的结果.

【详解】 原式  $= [9a^3b^4c \div (-3ab^4)] - [6a^4b^5 \div (-3ab^4)]$

$= (-3a^2c) - (-2a^3b)$

$= 2a^3b - 3a^2c$ .

10. 当  $x = \underline{\hspace{2cm}}$  时, 分式  $\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$  的值为 0.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题考查了分式的值为 0. 分式的值为 0 的条件是分子等于 0 且分母不等于 0, 解分子方程得  $x = 1$  或  $x = -1$ , 但  $x = 1$  时分母为 0, 故舍去, 因此  $x = -1$ , 即可作答.

【详解】 解:  $\because$  分式  $\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$  的值为 0

$$\therefore x^2-1=0, \quad x^2+2x-3 \neq 0$$

$\therefore$  解得  $x = 1$  或  $x = -1$ ,

当  $x = 1$  时, 则  $x^2+2x-3 = 1+2-3 = 0$  (舍去),

当  $x = -1$  时, 则  $x^2+2x-3 = 1-2-3 = -4 \neq 0$ ,

因此  $x = -1$ ,

故答案为: -1.

11. 在分式  $\frac{6x}{4y}$ 、 $\frac{x+1}{2x+1}$ 、 $\frac{6x-6}{9-9x}$  中, 最简分式有  $\underline{\hspace{2cm}}$  个.

【答案】 1

【解析】

【分析】 本题考查了最简分式的定义. 根据最简分式的定义: 分子和分母没有公因式的分式为最简分式, 逐一判断各分式即可.

【详解】 解: 对于分式  $\frac{6x}{4y}$ , 分子和分母有公因式 2, 可约分为  $\frac{3x}{2y}$ , 故不是最简分式;

对于分式  $\frac{x+1}{2x+1}$ , 分子和分母无公因式, 故是最简分式;

对于分式  $\frac{6x-6}{9-9x}$ , 分子可因式分解为  $6(x-1)$ , 分母可因式分解为  $-9(x-1)$ ,

故  $\frac{6x-6}{9-9x} = -\frac{2}{3}$ , 故不是最简分式.

因此最简分式有 1 个.

故答案为 1.

12. 将  $\frac{2x}{y^2(x^2+y^2)}$  表示成不含分母的形式为\_\_\_\_\_.

【答案】  $2xy^{-2}(x^2+y^2)^{-1}$

【解析】

【分析】 本题考查了负整数指数幂. 根据负整数指数幂的计算方法, 将分母中的因子用负指数表示即可.

【详解】 解: 依题意,  $\frac{1}{y^2} = y^{-2}$ ,  $\frac{1}{x^2+y^2} = (x^2+y^2)^{-1}$ ,

$$\text{故 } \frac{2x}{y^2(x^2+y^2)} = 2x \cdot y^{-2} \cdot (x^2+y^2)^{-1}.$$

故答案为:  $2xy^{-2}(x^2+y^2)^{-1}$ .

13. 如果关于  $x$  的整式  $x^2+px+12$  可以因式分解为  $(x-a)(x-b)$ , 其中  $a, b$  均为整数, 那么满足条件的  $p$  的值有\_\_\_\_\_个.

【答案】 6

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解与多项式乘以多项式, 解题的关键是熟练掌握知识点的应用.

根据因式分解与多项式乘法的关系, 比较系数得出整数  $a$  和  $b$  满足  $ab=12$ , 且  $p=-(a+b)$ , 列举所有整数对并计算  $p$ , 得到不同的  $p$  值的个数.

【详解】 解: 整式  $x^2+px+12$  因式分解为  $(x-a)(x-b)$ , 则展开后得  $x^2-(a+b)x+ab$ , 与原式比较系数, 有  $ab=12$  和  $p=-(a+b)$ ,

由于  $a$  和  $b$  均为整数,

$\therefore a=-12, b=-1$  或  $a=-1, b=-12$ , 则  $p=-(a+b)=13$ ;

$a=12, b=1$  或  $a=1, b=12$ , 则  $p=-(a+b)=-13$ ;

$a=-6, b=-2$  或  $a=-2, b=-6$ , 则  $p=-(a+b)=8$ ;

$a=6, b=2$  或  $a=2, b=6$ , 则  $p=-(a+b)=-8$ ;

$a=4, b=3$  或  $a=3, b=4$ , 则  $p=-(a+b)=-7$ ;

$a=-4, b=-3$  或  $a=-3, b=-4$ , 则  $p=-(a+b)=7$ ;

因此不同的  $P$  值有  $-13, -8, -7, 7, 8, 13$ ，共 6 个，

故答案为：6.

14. 已知  $(x+y)^2 = 18$ ， $(x-y)^2 = 12$ ，那么  $xy$  的值为\_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】本题考查了完全平方公式，利用完全平方公式的变形，通过计算  $(x+y)^2$  与  $(x-y)^2$  的差得到  $4xy$ ，进而求出  $xy$  的值，即可作答.

【详解】解：  $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 18$ ， $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = 12$ .

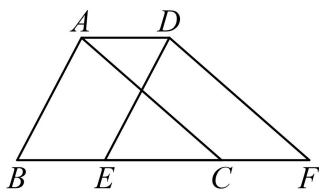
将两式相减，得  $(x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 - 2xy + y^2) = 18 - 12$ ，

即  $4xy = 6$ ，

$\therefore xy = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ .

故答案为：  $\frac{3}{2}$ .

15. 如图，将  $\triangle ABC$  沿  $BC$  方向平移 3 厘米后得到  $\triangle DEF$ ，若  $EC$  的长为 4 厘米，则  $EF =$ \_\_\_\_\_厘米.



【答案】 7

【解析】

【分析】本题考查平移的性质，解题的关键是根据平移的性质求出  $CF = 3$  .

根据  $\triangle ABC$  沿  $BC$  方向平移 3 厘米得到  $\triangle DEF$  求出  $CF = 3$ ，从而可求出  $EF = EC + CF = 7$  .

【详解】解：  $\because$  将  $\triangle ABC$  沿  $BC$  方向平移 3 厘米后得到  $\triangle DEF$ ，

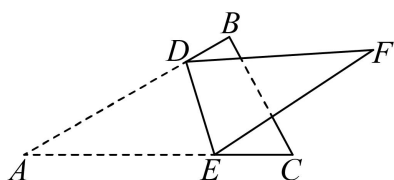
$\therefore CF = 3$  厘米，

$\because EC = 4$  厘米，

$\therefore EF = EC + CF = 7$  厘米，

故答案为： 7.

16. 如图，直线  $DE$  分别交  $\triangle ABC$  的边  $AB$ 、 $AC$  于点  $D$ 、 $E$ ，将  $\triangle ADE$  沿直线  $DE$  翻折后得到  $\triangle FDE$ ，若  $\angle CEF = 28^\circ$ ，则  $\angle DEF =$ \_\_\_\_\_.



【答案】  $76^\circ$

【解析】

【分析】 本题考查翻折变换（折叠问题），邻补角的定义，熟练掌握折叠的性质是解答的关键.

先通过翻折求出  $\angle DEA = \angle DEF$ ，再通过邻补角的定义结合  $\angle CEF = 28^\circ$  求解即可.

【详解】 解：  $\because ADE$  沿直线  $DE$  翻折后得到  $FDE$ ，

$$\therefore \angle DEA = \angle DEF.$$

$$\because \angle DEA + \angle DEF + \angle CEF = 180^\circ, \quad \angle CEF = 28^\circ,$$

$$\therefore 2\angle DEF + 28^\circ = 180^\circ,$$

$$2\angle DEF = 152^\circ,$$

$$\angle DEF = 76^\circ.$$

故答案为：  $76^\circ$ .

17. 小王和小张一起进行速算练习，小王每分钟比小张多做 2 道速算题，结果在相同的时间内，小王做了 60 道速算题，小张做了 40 道速算题. 设小王每分钟做  $x$  道速算题，根据题意列出方程\_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{60}{x} = \frac{40}{x-2}$

【解析】

【分析】 本题考查了列分式方程. 设小王每分钟做  $x$  道题，则小张每分钟做  $(x-2)$  道题；根据相同时间内做题量，利用时间相等列出方程.

【详解】 解：设小王每分钟做  $x$  道题，则小张每分钟做  $(x-2)$  道题.

依题意，小王做 60 道题所需时间为  $\frac{60}{x}$  分钟，小张做 40 道题所需时间为  $\frac{40}{x-2}$  分钟.

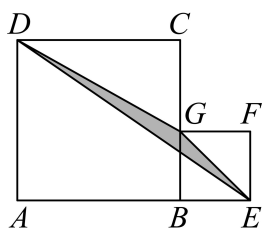
$\therefore$  时间相同，

$$\therefore \frac{60}{x} = \frac{40}{x-2},$$

故答案为：  $\frac{60}{x} = \frac{40}{x-2}$ .

18. 如图，已知并排放置的正方形  $ABCD$  和正方形  $BEFG$ ，其中点  $E$  在直线  $AB$  上，如果  $a$  表示正方形  $ABCD$  的边长， $b$  表示正方形  $BEFG$  的边长， $S_1$  表示  $\triangle DEG$  的面积， $S_2$  表示正方形  $BEFG$  的面积，那么

$S_1:S_2$  的值为\_\_\_\_\_.



【答案】  $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 根据  $AE = AB + BE = a + b$ ,  $S_1 = S_{\text{梯形}ABGD} + S_{\triangle BEG} - S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2}b^2$ ,  $S_2 = BE \cdot BG = b^2$ , 即可求得答案.

【详解】 解:  $\because$  正方形  $ABCD$  和正方形  $BEFG$  的边长分别为  $a$ 、 $b$ ,

$$\therefore AE = AB + BE = a + b,$$

$$\therefore S_1 = S_{\text{梯形}ABGD} + S_{\triangle BEG} - S_{\triangle ADE}$$

$$= \frac{1}{2}(AD + BG)AB + \frac{1}{2}BE \cdot BG - \frac{1}{2}AD \cdot AE$$

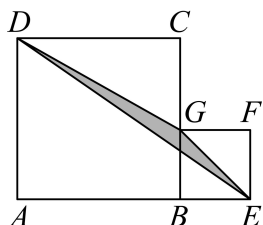
$$= \frac{1}{2}(a + b)a + \frac{1}{2}b \cdot b - \frac{1}{2}a(a + b)$$

$$= \frac{1}{2}b^2,$$

$$\therefore S_2 = BE \cdot BG = b^2.$$

$$\therefore S_1:S_2 = \left(\frac{1}{2}b^2\right):b^2 = 1:2 = \frac{1}{2},$$

故答案为:  $\frac{1}{2}$ .



【点睛】 本题主要考查整式的混合运算, 解题的关键是熟练掌握正方形边角性质, 正方形面积公式, 梯形面积公式, 三角形面积公式.

三、简答题: (本大题共 5 题, 每题 6 分, 满分 30 分)

19. 计算:  $(-2x^2)^3 + (-3x^3)^2 - (-x)^3 \cdot x \div (-x^4)$ .

【答案】  $x^6 - 1$

【解析】

【分析】 本题考查了积的乘方，同底数幂相乘，同底数幂相除，合并同类项，先运算积的乘方，然后运算同底数幂相乘，再运算同底数幂相除，最后合并同类项，即可作答.

【详解】 解:  $(-2x^2)^3 + (-3x^3)^2 - (-x)^3 \cdot x \div (-x^4)$   
 $= -8x^6 + 9x^6 - (-x^3) \cdot x \div (-x^4)$   
 $= -8x^6 + 9x^6 - (-x^4) \div (-x^4)$   
 $= -8x^6 + 9x^6 - 1$   
 $= x^6 - 1.$

20. 因式分解:  $x^2 - 4 - 4xy + 4y^2$ .

【答案】  $(x - 2y + 2)(x - 2y - 2)$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解，先进行分组，再运用完全平方公式进行因式分解，最后运用平方差公式进行因式分解，即可作答.

【详解】 解:  $x^2 - 4 - 4xy + 4y^2$   
 $= (x^2 - 4xy + 4y^2) - 2^2$   
 $= (x - 2y)^2 - 2^2$   
 $= (x - 2y + 2)(x - 2y - 2).$

21. 解方程:  $\frac{3}{x^2 + x} - 2 = \frac{1 - 2x}{1 + x}.$

【答案】  $x = 1$

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程，先把分式方程化为整式方程，再解得  $x = 1$ ，然后验根，即可作答.

【详解】 解:  $\because \frac{3}{x^2 + x} - 2 = \frac{1 - 2x}{1 + x},$

$$\therefore \frac{3}{x(1+x)} - 2 = \frac{1-2x}{1+x},$$

$$\text{则 } 3 - 2x(1+x) = x(1-2x),$$

$$\therefore 3 - 2x - 2x^2 = x - 2x^2,$$

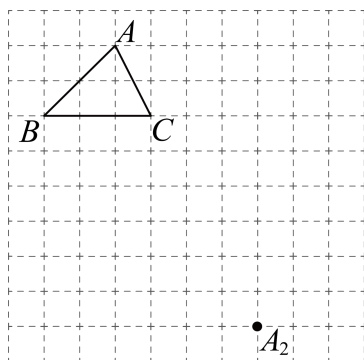
$$3 - 2x = x$$

$$\text{则 } x = 1,$$

经检验：当  $x = 1$  时， $x(1+x) = 1 \times 2 = 2 \neq 0$ ，

即  $x = 1$  是原方程的解.

22. 如图，在边长为 1 的正方形网格中， $ABC$  的顶点都在格点上.



(1) 画出  $ABC$  向右平移 5 个单位之后的  $\triangle A_1B_1C_1$ ；

(2) 将  $ABC$  绕一点旋转  $180^\circ$ ，得到  $\triangle A_2B_2C_2$ ，已知点  $A$  与点  $A_2$  是对应点 (如图所示)，请画出  $\triangle A_2B_2C_2$ ，并将旋转中心用点  $O$  表示；

(3)  $\triangle A_1B_1C_1$  与  $\triangle A_2B_2C_2$  的位置关系是\_\_\_\_\_对称.

**【答案】** (1) 见解析 (2) 见解析

(3) 中心

**【解析】**

**【分析】** 本题考查了画图形的平移，画图形的旋转，关键是确定变换后的对应点.

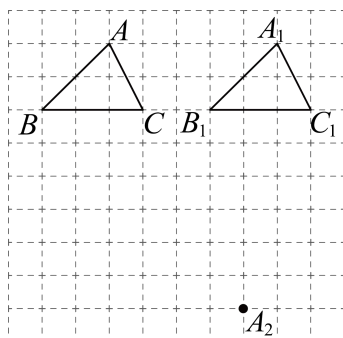
(1) 把  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三点分别向右平移 5 个单位之后的对应点  $A_1$ 、 $B_1$ 、 $C_1$  描出，再依次连接  $A_1$ 、 $B_1$ 、 $C_1$  即可；

(2) 连接  $AA_2$  所在矩形的对角线，交于一点，利用矩形的性质可得其交点即旋转中心为  $O$ ，分别连接  $BO$ 、 $CO$ ，并延长，使得  $OB_2 = OB$ ， $OC_2 = OC$ ，再分别连接  $A_2$ 、 $B_2$ 、 $C_2$  即可；

(3) 分别连接  $A_1A_2$ 、 $B_1B_2$ 、 $C_1C_2$ ，则可知这两个三角形形成中心对称.

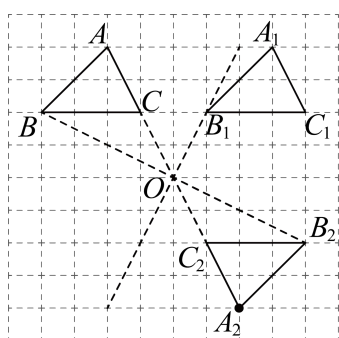
【小问 1 详解】

解：如图所示， $\triangle A_1B_1C_1$  即为所求作；



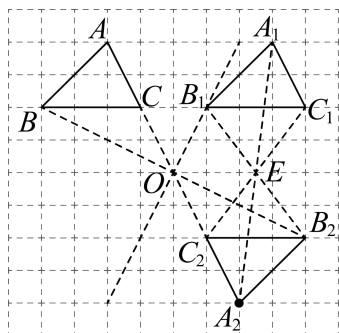
【小问 2 详解】

解：如图， $\triangle A_2B_2C_2$  即为所求作；



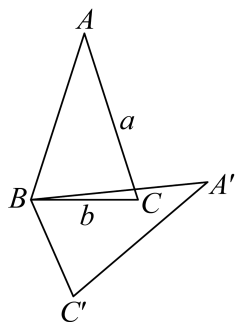
【小问 3 详解】

解：分别连接  $A_1A_2$ 、 $B_1B_2$ 、 $C_1C_2$ ，如图，则可知这两个三角形形成中心对称；



故答案为：中心.

23. 如图， $\triangle ABC$  中， $AB = AC = a$ ， $BC = b$ ，将  $\triangle ABC$  绕点  $B$  顺时针旋转  $72^\circ$  到  $\triangle A'BC'$  的位置.



(1) 求线段  $AC$  在旋转过程中扫过的平面部分的面积  $S$ . (用含有  $a$ 、 $b$  的代数式表示  $S$ ，结果保留  $\pi$ )

(2) 当  $a=9.65$ ,  $b=5.35$ ,  $\pi$  取近似值 3 时, 求  $S$  的值.

【答案】(1)  $S = \frac{1}{5}\pi(a^2 - b^2)$

(2)  $S$  的值为 38.7

【解析】

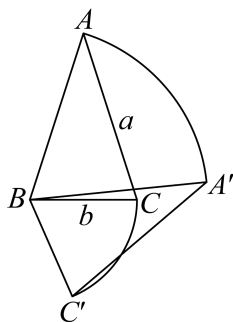
【分析】 本题主要考查了求扇形面积, 旋转的性质, 熟练掌握以上知识是解题的关键.

(1) 根据题意可得  $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A'BC'}$ ,  $\angle ABC = \angle CBC' = 72^\circ$ , 则  $AC$  边扫过的面积是以  $AB$  为半径的扇形面积减去  $BC$  以为半径的扇形面积, 据此即可求解.

(2) 将  $a=9.65$ ,  $b=5.35$ ,  $\pi$  取 3 代入到上式, 求解即可.

【小问 1 详解】

解: 如图:



$\therefore$  将  $\triangle ABC$  绕点  $B$  顺时针旋转  $72^\circ$  到  $\triangle A'BC'$  的位置,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A'BC'}, \quad \angle ABA' = \angle CBC' = 72^\circ,$$

$$\therefore AC \text{ 边扫过的面积是 } S = S_{\text{扇形}ABA'} + S_{\triangle A'BC'} - S_{\triangle ABC} - S_{\text{扇形}CBC'} = S_{\text{扇形}ABA'} - S_{\text{扇形}CBC'}$$

$$= \frac{72}{360}\pi \times AB^2 - \frac{72}{360}\pi \times BC^2$$

$$= \frac{1}{5}\pi a^2 - \frac{1}{5}\pi b^2$$

$$= \frac{1}{5}\pi(a^2 - b^2)$$

$$\therefore \text{线段 } AC \text{ 在旋转过程中扫过的平面部分的面积 } S = \frac{1}{5}\pi(a^2 - b^2).$$

【小问 2 详解】

解:  $\because a=9.65$ ,  $b=5.35$ ,  $\pi$  取近似值 3 时,

$$\therefore S \approx \frac{1}{5} \times 3 \times (9.65^2 - 5.35^2) = 38.7.$$

**四、解答题：（本大题共 4 题，24-26 每题 8 分，27 题 10 分，满分 34 分）**

24. 一辆小车开往距离出发地 200 千米的目的地，按原计划的速度匀速行驶 80 千米后，因有紧急事件，后续的行程提速 50% 行驶，最终比原计划提前 40 分钟到达目的地，求原计划的行驶速度.

**【答案】** 60 千米/小时

**【解析】**

**【分析】** 本题考查了分式方程的应用，先设原计划的行驶速度为  $x$  千米/小时，根据开往距离出发地 200 千米的目的地，按原计划的速度匀速行驶 80 千米，后续的行程提速 50% 行驶，最终比原计划提前 40 分钟到达目的地，进行列方程，解得  $x = 60$ ，最后验根，即可作答.

**【详解】** 解：设原计划的行驶速度为  $x$  千米/小时，

依题意，得 
$$\frac{80}{x} + \frac{200-80}{(1+50\%)x} = \frac{200}{x} - \frac{40}{60}$$

解得  $x = 60$ ,

经检验： $x = 60$  是原分式方程的解，

$\therefore$  原计划的行驶速度为 60 千米/小时.

25. 先化简  $\left(\frac{x^2}{x-2} - x\right) \div \frac{2x^2 - 2x}{x^2 + x - 6}$ ，再回答下列问题

(1) 当  $x^{-1} = 2$  时，求代数式的值.

(2) 原代数式的值能等于  $-3$  吗？如果能，请求出此时  $x$  的值；如果不能，请说明理由.

**【答案】** (1)  $-7$

(2) 不能

**【解析】**

**【分析】** 本题考查分式的化简，因式分解，分式无意义的条件，解分式方程；

(1) 根据分式的基本性质化简后，将  $x^{-1} = 2$  代入计算即可；

(2) 令化简后的式子等于  $-3$ ，求出  $x$  的值，代入原式检验即可.

**【小问 1 详解】**

解： 
$$\begin{aligned} & \left(\frac{x^2}{x-2} - x\right) \div \frac{2x^2 - 2x}{x^2 + x - 6} \\ &= \frac{x^2 - x(x-2)}{x-2} \div \frac{2x(x-1)}{(x+3)(x-2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2x}{x-2} \div \frac{2x(x-1)}{(x+3)(x-2)} \\
&= \frac{2x}{x-2} \times \frac{(x+3)(x-2)}{2x(x-1)} \\
&= \frac{x+3}{x-1}
\end{aligned}$$

当  $x^{-1} = 2$  时, 即  $x = \frac{1}{2}$ ,

$$\frac{x+3}{x-1} = \frac{\frac{1}{2}+3}{\frac{1}{2}-1} = \frac{\frac{7}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{7}{2} \times (-2) = -7;$$

【小问 2 详解】

解: 不能, 理由如下,

当  $\frac{x+3}{x-1} = -3$  时, 即  $x+3 = -3x+3$ ,

解得  $x = 0$ ,

经检验当  $x = 0$  时, 除数  $\frac{2x^2-2x}{x^2+x-6} = 0$ , 导致原表达式除以零无意义;

$\therefore$  原代数式的值不能等于  $-3$ .

26. 材料一: 整式除以整式——长除法

类比于两数相除可以用竖式运算, 整式除以整式也可以用竖式运算. 其步骤是:

- (1) 把被除式和除式按同一字母降幂排列 (若有缺项用零补齐);
- (2) 用竖式进行运算;
- (3) 当余式的次数低于除式的次数时, 运算终止, 得到商式和余式.

例如, 求  $(5x^4 + 3x^3 + 2x - 4) \div (x^2 + 1)$  的商式和余式, 可以计算:

$$\begin{array}{r}
\phantom{x^2+0x+1} \overline{5x^2+3x-5} \\
x^2+0x+1 \overline{) 5x^4+3x^3+0x^2+2x-4} \\
\underline{5x^4+0x^3+5x^2} \phantom{-4} \\
3x^3-5x^2+2x \phantom{-4} \\
\underline{3x^3+0x^2+3x} \phantom{-4} \\
-5x^2-x-4 \phantom{-4} \\
\underline{-5x^2+0x-5} \\
-x+1
\end{array}$$

因此, 商式是  $5x^2 + 3x - 5$ , 余式是  $-x + 1$ .

材料二:

对于关于  $x$  的一元整式  $M$ , 其奇数次项系数之和为  $m$ , 偶数次项系数之和为  $n$ .

若  $m = n$ , 则当  $x = -1$  时,  $M$  的值为 0; 若  $m = -n$ , 则当  $x = 1$  时,  $M$  的值为 0.

例如, 对于一元整式  $x^3 - 5x^2 + 4$ , 由  $m = 1, n = -5 + 4 = -1$  得  $m = -n$ , 所以把  $x = 1$  代入整式  $x^3 - 5x^2 + 4$ , 得其值为 0.

由此可以确定整式  $x^3 - 5x^2 + 4$  有因式  $x - 1$ , 于是可设  $x^3 - 5x^2 + 4 = (x - 1)(x^2 + px + q)$ . 分别确定  $p, q$  的值, 再代入  $x^3 - 5x^2 + 4 = (x - 1)(x^2 + px + q)$ , 就可以因式分解整式  $x^3 - 5x^2 + 4$ , 这种因式分解的方法叫作“试根法”.

阅读上述两则材料, 回答问题:

(1) 整式  $4x^2 + 8x + 3$  除以整式  $2x + 1$ , 商式是\_\_\_\_\_, 余式是\_\_\_\_\_.

(2) 材料二中,  $p =$  \_\_\_\_\_,  $q =$  \_\_\_\_\_.

(3) 对于一元整式  $x^3 + 8x^2 - 11x - 18$ , 必定有当  $x =$  \_\_\_\_\_, 其值为 0.

(4) 根据材料一和材料二, 因式分解  $x^3 + 8x^2 - 11x - 18 =$  \_\_\_\_\_.

**【答案】** (1)  $2x + 3$ ; 0

(2)  $-4$ ;  $-4$

(3)  $-1$

(4)  $(x + 1)(x + 9)(x - 2)$

**【解析】**

**【分析】** 本题考查了整式的除法, 因式分解的应用, 理解题意是解题的关键.

(1) 根据长除法即可求解;

(2) 根据长除法确定整式  $x^3 - 5x^2 + 4$  除以整式  $x - 1$  的商式, 即可确定  $p, q$  的值;

(3) 根据材料二的内容即可求解;

(4) 由 (3) 得, 整式  $x^3 + 8x^2 - 11x - 18$  有因式  $x + 1$ , 再利用长除法确定整式  $x^3 + 8x^2 - 11x - 18$  除以整式  $x + 1$  的商式, 得到  $x^3 + 8x^2 - 11x - 18 = (x + 1)(x^2 + 7x - 18)$ , 再利用十字相乘法因式分解  $x^2 + 7x - 18$ , 即可得出答案.

【小问 1 详解】

解：整式  $4x^2 + 8x + 3$  除以整式  $2x + 1$  的长除法如下：

$$\begin{array}{r} 2x+3 \\ 2x+1 \overline{) 4x^2+8x+3} \\ \underline{4x^2+2x} \phantom{+3} \\ 6x+3 \\ \underline{6x+3} \\ 0 \end{array}$$

因此，商式是  $2x + 3$ ，余式是 0.

故答案为：  $2x + 3$ ； 0；

【小问 2 详解】

解：整式  $x^3 - 5x^2 + 4$  除以整式  $x - 1$  的长除法如下：

$$\begin{array}{r} x^2-4x-4 \\ x-1 \overline{) x^3-5x^2+0x+4} \\ \underline{x^3-x^2} \phantom{+0x+4} \\ -4x^2+0x \phantom{+4} \\ \underline{-4x^2+4x} \phantom{+4} \\ -4x+4 \\ \underline{-4x+4} \\ 0 \end{array}$$

因此，商式是  $x^2 - 4x - 4$ ，余式是 0.

$$\text{则 } x^3 - 5x^2 + 4 = (x - 1)(x^2 - 4x - 4)$$

所以  $p = -4$ ，  $q = -4$  .

故答案为：  $-4$ ；  $-4$ ；

【小问 3 详解】

解：对于一元整式  $x^3 + 8x^2 - 11x - 18$ ，

由  $m = 1 - 11 = -10$ 、  $n = 8 - 18 = -10$  得  $m = n$ ，

所以把  $x = -1$  代入整式  $x^3 + 8x^2 - 11x - 18$ ，得其值为 0.

故答案为：  $-1$ ；

【小问 4 详解】

解：由 (3) 得，整式  $x^3 + 8x^2 - 11x - 18$  有因式  $x + 1$ ，

整式  $x^3 + 8x^2 - 11x - 18$  除以整式  $x + 1$  的长除法如下:

$$\begin{array}{r}
 x^2+7x-18 \\
 x+1 \overline{) x^3+8x^2-11x-18} \\
 \underline{x^3+x^2} \phantom{-11x-18} \\
 7x^2-11x \phantom{-18} \\
 \underline{7x^2+7x} \phantom{-18} \\
 -18x-18 \\
 \underline{-18x-18} \\
 0
 \end{array}$$

因此, 商式是  $x^2 + 7x - 18$ , 余式是 0.

$$\text{则 } x^3 + 8x^2 - 11x - 18 = (x+1)(x^2 + 7x - 18),$$

$$\text{又因为 } x^2 + 7x - 18 = (x+9)(x-2),$$

$$\text{所以 } x^3 + 8x^2 - 11x - 18 = (x+1)(x+9)(x-2)$$

故答案为:  $(x+1)(x+9)(x-2)$ .

27. 定义: 从一个角的顶点出发, 在角的内部引两条射线, 如果这两条射线所成的角等于这个角的一半, 那么这两条射线所成的角叫做这个角的内半角. 如图1, 若  $\angle COD = \frac{1}{2}\angle AOB$ , 则  $\angle COD$  是  $\angle AOB$  的内半角.

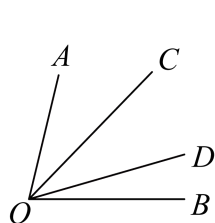


图1

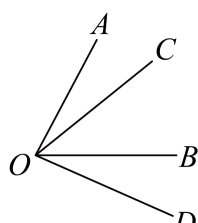


图2

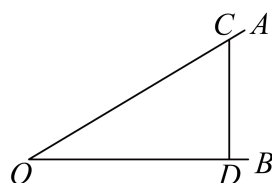


图3

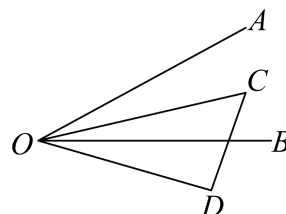


图4

(1) 如图1, 已知  $\angle AOB = 72^\circ$ ,  $\angle AOC = 16^\circ$ ,  $\angle COD$  是  $\angle AOB$  的内半角, 则  $\angle BOD = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ , 此时, 将  $\angle COD$  再顺时针旋转  $\underline{\hspace{2cm}}^\circ$ , 射线  $OA$ 、 $OB$ 、 $OC$ 、 $OD$  组成的图形为轴对称图形.

(2) 如图2, 已知  $\angle AOB = 63^\circ$ , 将  $\angle AOB$  绕点  $O$  按顺时针方向旋转一个角度  $\alpha$  ( $\alpha$  比  $63^\circ$  小) 至  $\angle COD$ , 求  $\alpha$  为何值时,  $\angle COB$  是  $\angle AOD$  的内半角?

(3) 已知  $\angle AOB = 30^\circ$ , 把一块含有  $30^\circ$  角的三角尺  $COD$  如图3所示叠放, 此时三角尺的边  $OC$ 、 $OD$  分别与射线  $OA$ 、 $OB$  叠合, 在此基础上, 将三角尺绕顶点  $O$  以每秒  $4^\circ$  的速度按顺时针方向旋转, 如图4所示. 问: 在旋转一周的过程中, 射线  $OA$ 、 $OB$ 、 $OC$ 、 $OD$  能否构成内半角? 若能, 请直接写出旋转的时间; 若不能, 请说明理由.

**【答案】** (1) 20, 2;

(2)  $\alpha = 21^\circ$ ;

(3) 能, 旋转的时间分别为: 2.5s 或 22.5s 或 67.5s 或 87.5s.

【解析】

【分析】本题属于新定义类问题, 主要考查旋转中角度的表示, 及角度的和差运算, 能够掌握分类讨论思想是解题的关键.

(1) ①据“内半角”的定义, 可求出  $\angle COD$  和  $\angle AOC + \angle BOD$  的数, 再根据  $\angle BOD = \frac{1}{2}\angle AOB - \angle AOC$ , 即可求解; ②根据轴对称图形的性质得到  $\angle AOC = \angle BOD$ , 求解即可;

(2) 先由旋转可分别求出  $\angle AOC = \angle BOD = \alpha$ , 再进行角度运算得出  $\angle COB$ 、 $\angle AOD$  最后根据“内半角”的定义, 可列出等式, 即可求出  $\alpha$  的值;

(3) 由旋转可知, 分四种情况, 分别进行讨论, 根据“内半角”的定义, 可求出对应的时间.

【小问 1 详解】

解:  $\because \angle COD$  是  $\angle AOB$  的内半角,  $\angle AOB = 72^\circ$ ,

$$\therefore \angle COD = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2} \times 72 = 36, \quad \angle AOC + \angle BOD = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2} \times 72^\circ = 36^\circ$$

$$\therefore \angle AOC = 16^\circ,$$

$$\therefore \angle BOD = \frac{1}{2}\angle AOB - \angle AOC = 36^\circ - 16^\circ = 20^\circ;$$

$\because$  若射线  $OA$ 、 $OB$ 、 $OC$ 、 $OD$  组成的图形为轴对称图形,

$$\therefore \angle AOC = \angle BOD,$$

$$\therefore \angle AOC + \angle BOD = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle AOC = \angle BOD = \frac{1}{2} \times 36^\circ = 18^\circ,$$

$$\therefore \text{原来 } \angle AOC = 16^\circ, \text{ 现在 } \angle AOC = 18^\circ, \quad 18^\circ - 16^\circ = 2^\circ,$$

$\therefore$  将  $\angle COD$  再顺时针旋转  $2^\circ$ , 那么射线  $OA$ 、 $OB$ 、 $OC$ 、 $OD$  组成的图形为轴对称图形;

【小问 2 详解】

解:  $\because$  将  $\angle AOB$  绕点  $O$  按顺时针方向旋转一个角度  $\alpha$  ( $\alpha$  比  $63^\circ$  小) 至  $\angle COD$ ,

$$\therefore \angle AOC = \angle BOD = \alpha.$$

$$\therefore \angle AOB = 63^\circ,$$

$$\therefore \angle AOD = \angle AOB + \angle BOD = 63^\circ + \alpha, \quad \angle COB = \angle AOB - \angle AOC = 63^\circ - \alpha.$$

$\because \angle COB$  是  $\angle AOD$  的内半角,

$$\therefore \angle COD = \frac{1}{2}\angle AOD,$$

$$63^\circ - \alpha = \frac{1}{2}(63^\circ + \alpha),$$

$$126^\circ - 2\alpha = 63^\circ + \alpha,$$

$$3\alpha = 63^\circ,$$

$$\alpha = 21^\circ.$$

$\therefore \alpha$  为  $21^\circ$  时,  $\angle COB$  是  $\angle AOD$  的内半角.

【小问 3 详解】

解: 能, 理由如下:

设旋转时间为  $t$ ,

$\because$  三角尺绕顶点  $O$  以每秒  $4^\circ$  的速度按顺时针方向旋转,  $\angle AOB = 30^\circ$ ,  $\angle COD = 30^\circ$ ,

$$\therefore \angle AOC = \angle BOD = 4^\circ t,$$

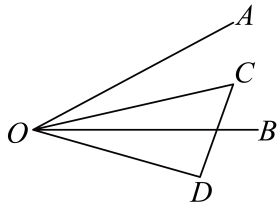
$\because$  旋转一周,

$$\therefore 4^\circ t \leq 360^\circ, \text{ 即 } t \leq 90,$$

$$\therefore 0 \leq t \leq 90.$$

根据题意可分以下四种情况:

①当射线  $OC$  在  $\angle AOB$  内部, 如下图,



$$\text{那么 } \angle BOC = \angle AOB - \angle AOC = 30^\circ - 4^\circ t,$$

$$\angle AOD = \angle AOB + \angle BOD = 30^\circ + 4^\circ t,$$

$\because \angle COB$  是  $\angle AOD$  的内半角,

$$\therefore \angle COB = \frac{1}{2} \angle AOD,$$

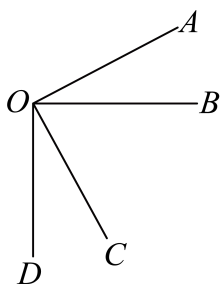
$$30^\circ - 4^\circ t = \frac{1}{2}(30^\circ + 4^\circ t),$$

$$60^\circ - 8^\circ t = 30^\circ + 4^\circ t,$$

$$12^\circ t = 30^\circ,$$

$$t = 2.5\text{s};$$

②当射线  $OC$  在  $\angle AOB$  外部, 如下图,



那么  $\angle BOC = \angle AOC - \angle AOB = 4^\circ t - 30^\circ$ ,  $\angle AOD = \angle AOB + \angle BOD = 30^\circ + 4^\circ t$ ,

$\because \angle COB$  是  $\angle AOD$  的内半角,

$$\therefore \angle COB = \frac{1}{2} \angle AOD,$$

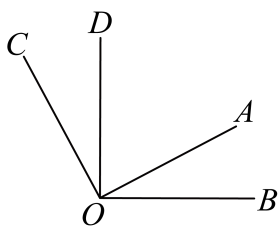
$$4^\circ t - 30^\circ = \frac{1}{2}(30^\circ + 4^\circ t),$$

$$8^\circ t - 60^\circ = 30^\circ + 4^\circ t,$$

$$4^\circ t = 90^\circ,$$

$$t = 22.5s;$$

③当射线  $OC$  在  $\angle AOB$  外部, 如下图,



那么  $\angle BOC = 360^\circ - \angle BOD + \angle COD = 360^\circ - 4^\circ t + 30^\circ$ ,

$$\angle AOD = 360^\circ - \angle AOC - \angle COD = 360^\circ - 4^\circ t - 30^\circ,$$

$\because \angle AOD$  是  $\angle BOC$  的内半角,

$$\therefore \angle AOD = \frac{1}{2} \angle BOC,$$

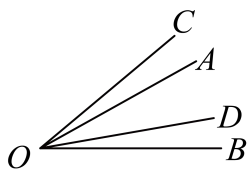
$$360^\circ - 4^\circ t - 30^\circ = \frac{1}{2}(360^\circ - 4^\circ t + 30^\circ),$$

$$720^\circ - 8^\circ t - 60^\circ = 360^\circ - 4^\circ t + 30^\circ,$$

$$4^\circ t = 270^\circ,$$

$$t = 67.5s;$$

④当射线  $OD$  在  $\angle AOB$  内部, 如图,



那么  $\angle BOC = 360^\circ - \angle BOD + \angle COD = 360^\circ - 4^\circ t + 30^\circ$ ,

$$\angle AOD = \angle AOB - (360^\circ - \angle BOD) = 30^\circ - (360^\circ - 4^\circ t) = 4^\circ t - 330^\circ,$$

$\therefore \angle AOD$  是  $\angle BOC$  的内半角,

$$\therefore \angle AOD = \frac{1}{2} \angle BOC,$$

$$4^\circ t - 330^\circ = \frac{1}{2} (360^\circ - 4^\circ t + 30^\circ),$$

$$4^\circ t - 330^\circ = 180^\circ - 2^\circ t + 15^\circ,$$

$$6^\circ t = 525,$$

$$t = 87.5s.$$

综上, 在旋转一周的过程中, 射线  $OA$ 、 $OB$ 、 $OC$ 、 $OD$  构成内半角时, 旋转的时间分别为: 2.5s 或 22.5s 或 67.5s 或 87.5s.