

2025 学年度第一学期期末考试七年级数学学科试卷

(时间: 90 分钟, 满分: 100 分) 2026.1

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分)

1. 下列单项式中, $3a^2b$ 的同类项是 ()

- A. -5 B. $2a^2b$ C. $-ab^2$ D. $4a^3b$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题主要考查同类项, 熟练掌握同类项的定义是解题的关键; 根据同类项的定义, 所含字母相同且相同字母的指数也相同的项是同类项, 据此问题可求解.

【详解】 解: 选项 A: -5 与 $3a^2b$ 不是同类项, 故不符合题意;

选项 B: $2a^2b$ 与 $3a^2b$ 是同类项, 故符合题意;

选项 C: $-ab^2$ 与 $3a^2b$ 不是同类项, 故不符合题意;

选项 D: $4a^3b$ 与 $3a^2b$ 不是同类项, 故不符合题意;

故选 B.

2. 下列说法正确的是 ()

- A. $2x^2y$ 的次数是 2 B. $3x^2 - x - 4$ 是二次三项式
C. $\frac{x-3}{2}$ 的常数项是 3 D. $x^2 - 2x - 3$ 的一次项是 $2x$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查单项式和多项式的相关概念, 根据单项式的次数、多项式的次数和项数、常数项和一次项的概念依次进行判断即可.

【详解】 解: $\because$ 选项 A: $2x^2y$ 的次数为 $2+1=3 \neq 2$, 故错误;

$\because$ 选项 B: $3x^2 - x - 4$ 的最高次项为 2 次, 且有三项, 是二次三项式, 故正确;

$\because$ 选项 C: $\frac{x-3}{2} = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$, 常数项为 $-\frac{3}{2} \neq 3$, 故错误;

$\because$ 选项 D: $x^2 - 2x - 3$ 的一次项为 $-2x \neq 2x$, 故错误.

故选: B.

3. 下列从左到右的变形中, 属于因式分解的是 ()

A. $8x^2y = 2x \cdot 4xy$

B. $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$

C. $2x^2y - 4xy = 2xy(x-2)$

D. $x^2 - y^2 + 1 = (x+y)(x-y) + 1$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了因式分解的定义, 掌握因式分解的定义是解题的关键, 因式分解是将多项式转化为几个整式的乘积形式, 需满足左边为多项式, 右边为乘积形式. 根据因式分解的定义逐项判断即可.

【详解】解: $\because$ 因式分解要求左边是多项式, 右边是整式的乘积;

A、 $8x^2y = 2x \cdot 4xy$, 左边 $8x^2y$ 是单项式, 不是多项式, 不是因式分解, 不符合题意;

B、 $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$, 左边 $(x-2)^2$ 是乘积形式, 右边 $x^2 - 4x + 4$ 是多项式, 属于整式乘法, 不是因式分解, 不符合题意;

C、 $2x^2y - 4xy = 2xy(x-2)$, 左边 $2x^2y - 4xy$ 是多项式, 右边 $2xy(x-2)$ 是乘积形式, 符合因式分解;

D、 $x^2 - y^2 + 1 = (x+y)(x-y) + 1$, 右边 $(x+y)(x-y) + 1$ 含有加法运算, 未完全转化为乘积, 不是因式分解, 不符合题意;

故选: C.

4. 如果把分式 $\frac{ab}{a+2b}$ 中 a 和 b 的值都扩大为原来的 2 倍, 那么分式的值 ()

A. 不变

B. 扩大为原来的 2 倍

C. 扩大为原来的 4 倍

D. 不能确定

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了分式的基本性质, 先将 a 和 b 都扩大 2 倍代入分式, 再根据分式的基本性质进行化简, 最后与原分式进行比较即可.

【详解】解: $\because a$ 和 b 都扩大 2 倍,

$$\therefore \frac{(2a)(2b)}{2a+2 \cdot 2b} = \frac{4ab}{2a+4b} = \frac{4ab}{2(a+2b)} = 2 \cdot \frac{ab}{a+2b},$$

$\therefore$ 分式的值扩大为原来的 2 倍,

故选: B.

5. 近年来, 国产人工智能模型发展迅速, 以下四款人工智能模型的图标中, 属于轴对称图形的是 ()



【答案】 A

【解析】

【分析】 此题考查了轴对称图形的概念， 如果一个图形沿一条直线折叠， 直线两旁的部分能够互相重合， 这个图形叫做轴对称图形， 这条直线叫做对称轴， 这时我们也可以说这个图形关于这条直线成轴对称， 据此判断即可求解， 熟练掌握知识点是解题的关键.

【详解】 A、 是轴对称图形， 故本选项符合题意；

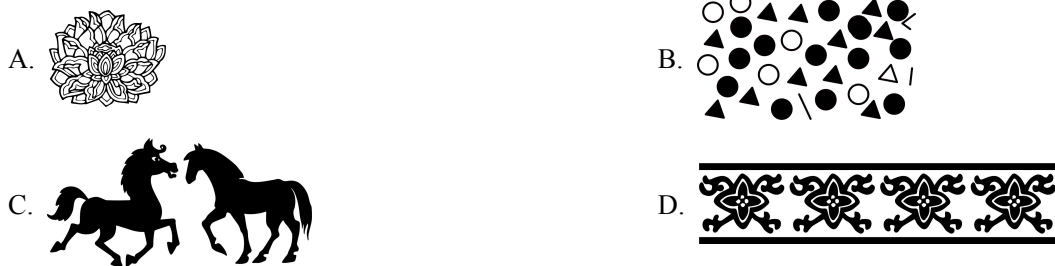
B、 不是轴对称图形， 故本选项不符合题意；

C、 不是轴对称图形， 故本选项不符合题意；

D、 不是轴对称图形， 故本选项不符合题意；

故选： A .

6. 二方连续纹样是指一个单位图案沿上下或左右方向连续排列所形成的横式或纵式带状纹样. 以下四个纹样中， 属于二方连续纹样的是 ()



【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查了生活中的平移现象， 熟练掌握平移的性质是解题的关键. 根据平移的性质判断即可.

【详解】 解： 属于二方连续纹样的是 D，

故选： D.

二、 填空题 (本大题共 12 题， 每题 2 分， 满分 24 分)

7. 计算： $a^3 \cdot a^2 =$ _____.

【答案】 a^5

【解析】

【分析】 本题考查了同底数幂的乘法计算， 根据同底数幂的乘法法则， 底数不变， 指数相加求解即可.

【详解】解： $a^3 \cdot a^2 = a^{3+2} = a^5$,

故答案为： a^5 .

8. 计算： $(-3xy^2)^2 =$ _____.

【答案】 $9x^2y^4$

【解析】

【分析】 本题主要考查了积的乘方计算， 直接根据积的乘方计算法则求解即可.

【详解】 解： $(-3xy^2)^2 = 9x^2y^4$,

故答案为： $9x^2y^4$.

9. 将 $2r - r^2 + \frac{4}{3}r^3 - 4$ 按 r 的升幂排列_____.

【答案】 $-4 + 2r - r^2 + \frac{4}{3}r^3$

【解析】

【分析】 本题考查了多项式， 按照 r 的指数从低到高的顺序排列即可， 掌握定义是解题的关键.

【详解】 解： 将 $2r - r^2 + \frac{4}{3}r^3 - 4$ 按 r 的升幂排列为 $-4 + 2r - r^2 + \frac{4}{3}r^3$,

故答案为： $-4 + 2r - r^2 + \frac{4}{3}r^3$.

10. 计算： $(2a - b)(a + 3b) =$ _____.

【答案】 $2a^2 + 5ab - 3b^2$

【解析】

【详解】 由多项式与多项相乘的法则得， $(2a - b)(a + 3b) = 2a^2 + 6ab - ab - 3b^2 = 2a^2 + 5ab - 3b^2$. 故答案为 $2a^2 + 5ab - 3b^2$.

11. 计算： $(-18x^3y^2 + 12x^2y^3) \div (-3x^2y^2) =$ _____.

【答案】 $6x - 4y$

【解析】

【分析】 本题考查多项式除以单项式的运算， 运用分配律将多项式的每一项分别除以单项式， 再根据有理数除法和同底数幂的除法法则计算.

【详解】解：原式 $= -18x^3y^2 \div (-3x^2y^2) + 12x^2y^3 \div (-3x^2y^2)$
 $= 6x - 4y,$

故答案为： $6x - 4y$.

12. 因式分解： $8x^2y + 4xy^2 - 12xy = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】

$4xy(2x + y - 3)$

【解析】

【分析】 本题考查了提公因式法因式分解，先提取公因式 $4xy$ 即可.

【详解】解： $8x^2y + 4xy^2 - 12xy = 4xy(2x + y - 3),$

故答案为： $4xy(2x + y - 3)$.

13. 如果 $x^2 + kxy + 25y^2$ 能用完全平方公式因式分解，那么 k 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 ± 10

【解析】

【分析】 本题考查完全平方公式，掌握完全平方公式是解题的关键.

根据式子的二次项系数和常数项的值推出一次项系数，使得它能够构成完全平方式.

【详解】解：表达式 $x^2 + kxy + 25y^2$ 需匹配完全平方公式 $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ 的形式，

令 $a = x, \quad b = 5y,$

则 $\pm 2ab = \pm 2 \times x \times 5y = \pm 10xy,$

因此 $kxy = \pm 10xy,$

解得 $k = \pm 10,$

故答案为： ± 10 .

14. 计算： $\frac{y}{2x^2} \cdot \frac{x}{y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{2x}$

【解析】

【分析】 本题考查了分式的乘法运算，将两个分式相乘，再约分即可求解，掌握分式的乘法法则是解题的

关键.

【详解】解: $\frac{y}{2x^2} \cdot \frac{x}{y} = \frac{y \cdot x}{2x^2 \cdot y} = \frac{xy}{2x^2y} = \frac{1}{2x},$

故答案为: $\frac{1}{2x}.$

15. 如果分式 $\frac{x^2-1}{x+1}$ 的值为 0, 那么 x 的值是_____.

【答案】

1

【解析】

【分析】本题考查了分式值为 0 的情况, 分式值为零的条件是分子为零且分母不为零, 据此进行求解即可.

【详解】解: 由分式值为零的条件, 得分子 $x^2-1=0$ 且分母 $x+1 \neq 0,$

解得 $x=1$ 或 $x=-1$, 且 $x \neq -1,$

$\therefore x=1,$

故答案为: 1.

16. A, B 为常数, 如果 $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{2x-6}{(x-1)(x-2)},$ 那么 $A-B = \underline{\hspace{2cm}},$

【答案】6

【解析】

【分析】本题考查分式的通分与恒等式的系数匹配, 解题的关键是通过通分将左边化为同分母分式, 再比较分子系数建立方程组求解.

先对左边分式通分, 将其化为与右边同分母的形式, 再通过分子多项式的系数对应关系, 列方程组求出 A, B 的值, 即可求解代数式的值.

【详解】解: $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{2x-6}{(x-1)(x-2)},$

$\therefore A(x-2) + B(x-1) = 2x-6.$

$\therefore Ax - 2A + Bx - B = (A+B)x + (-2A-B) = 2x-6,$

$$\begin{cases} A+B=2 \\ -2A-B=-6 \end{cases},$$

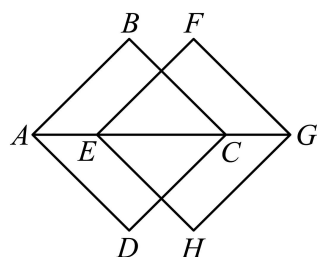
$$\text{解得} \begin{cases} A = 4 \\ B = -2 \end{cases}$$

$$\text{故 } A - B = 4 - (-2) = 6,$$

故答案为: 6.

17. “方胜”是中国古代的一种发饰图案, 象征同心吉祥, 由两个相同的正方形交错叠合而成. 如图, 将正方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 方向平移得到正方形 $EFGH$, 形成“方胜”图. 如果平移距离为 3, 且 $AE = \frac{1}{3}AC$,

那么点 A 到点 G 的距离是_____.



【答案】 12

【解析】

【分析】 本题考查的是平移的性质, 由平移的性质得到 $AE = \frac{1}{3}AC = CG = 3$, 求出 AC , 再由 $AG = AC + CG$ 求解即可.

【详解】 解: 由平移可得 $AE = \frac{1}{3}AC = CG = 3$,

所以 $AC = 9$,

所以 $AG = AC + CG = 9 + 3 = 12$,

故答案为: 12.

18. 1261 年, 我国南宋数学家杨辉在他所著的《详解九章算法》中给出了一个“开方作本源图” (图 1), 并指明: “开方作法本源图出自《释锁算书》, 贾宪用此术, ” 这幅被后人称为“贾宪三角”. 这个“三角形”的两条斜的“边”都是由数字 1 组成, 下其他数等于它“肩上”的两个数的和. 在图 2 的“贾宪三角”中, 第 2 斜列上的数依次为: 1, 2, 3, 4, 5, …… , 我们把第 1 个数记为 a_1 , 第 2 个数记为 a_2 , 第 3 个数记为 a_3 , …… , 第 n 个数记为 a_n . 第 3 斜列上的数依次为: 1, 3, 6, 10, 15, …… , 把第 1 个数记为 b_1 , 第 2 个数记为 b_2 , 第 3 个数记为 b_3 , …… , 第 n 个数记为 b_n , 若 $2b_{n+1} - a_n = 2026$, 则 n 的值为_____.

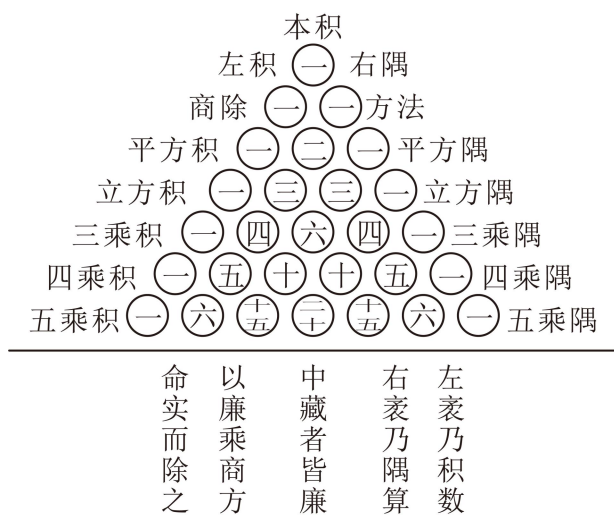


图1

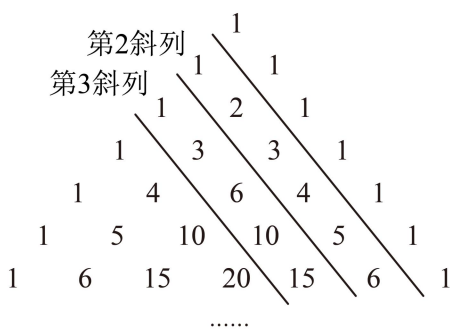


图2

【答案】 44

【解析】

【分析】 本题考查了数字类规律，多项式乘法运算，因式分解的应用，有理数的乘法运算，解题的关键根据题意找出规律求解.

由题意可得 $a_n = n$, $b_{n+1} = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + 1 = \frac{(n+1)(1+n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, 则得到

$2 \times \frac{(n+1)(n+2)}{2} - n = 2026$, 据此求解即可.

【详解】 解：第 2 斜列上第 1 个数记为 a_1 , 第 2 个数记为 a_2 , 第 3 个数记 $a_3, \cdots$, 第 n 个数记为 a_n , 即

$$a_n = n ;$$

第 3 斜列上第 1 个数 $b_1 = 1$, 第 2 个数 $b_2 = 3 = 1 + 2$, 第 3 个数 $b_3 = 6 = 1 + 2 + 3$, 第 4 个数

$b_4 = 10 = 1 + 2 + 3 + 4$, 那么第 $n+1$ 个数为

$$b_{n+1} = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + 1 = \frac{(n+1)(1+n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} ,$$

$\therefore$ 由题意得, $2b_{n+1} - a_n = 2026$,

$$\therefore 2 \times \frac{(n+1)(n+2)}{2} - n = 2026 ,$$

整理得, $n^2 + 2n - 2024 = 0$,

左边因式分解得, $(n+46)(n-44)=0$,

由有理数乘法可得, $n+46=0$ 或 $n-44=0$ 或 $\begin{cases} n+46=0 \\ n-44=0 \end{cases}$,

当 $n+46=0$ 时, 解得 $n=-46$ (不符合题意, 舍);

当 $n-44=0$ 时, 解得 $n=44$;

当 $\begin{cases} n+46=0 \\ n-44=0 \end{cases}$ 时, 方程组无解,

$\therefore n$ 的值为 44,

故答案为: 44.

三、解答题 (本大题共 6 题, 每题 5 分, 满分 30 分)

19. 计算: $(x+1)^2 + (x-5)(x+5)$

【答案】 $2x^2 + 2x - 24$

【解析】

【分析】 本题主要考查了整式的混合运算, 根据乘法公式去括号, 然后合并同类项即可得到答案.

【详解】 解: $(x+1)^2 + (x-5)(x+5)$

$$= x^2 + 2x + 1 + x^2 - 25$$

$$= 2x^2 + 2x - 24.$$

20. 因式分解: $x^2 - 4y(x-y) - 4$

【答案】 $(x-2y+2)(x-2y-2)$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解, 解题的关键是熟练掌握因式分解的几种常用方法.

先分组, 再由平方差公式分解.

【详解】 解: $x^2 - 4y(x-y) - 4$

$$= x^2 - 4xy + 4y^2 - 4$$

$$= (x-2y)^2 - 2^2$$

$$= (x-2y+2)(x-2y-2).$$

21. 因式分解: $(a^2 - 5a)^2 + 12(a^2 - 5a) + 36$

【答案】 $(a-2)^2(a-3)^2$

【解析】

【分析】 本题主要考查因式分解, 熟练掌握因式分解是解题的关键; 因此此题可根据十字相乘法及完全平方公式进行分解因式即可.

【详解】 解: 原式 $= (a^2 - 5a + 6)^2 = [(a-2)(a-3)]^2 = (a-2)^2(a-3)^2$.

22. 计算: $x^{-1}y^{-1} \div (x^{-1} - y^{-1})$

【答案】

$$\frac{1}{y-x}$$

【解析】

【分析】 本题考查了负整数次幂转化为正整数次幂的形式, 以及分式的混合运算, 先将负整数次幂转化为正整数次幂的形式, 再根据分式的混合运算顺序及运算法则进行计算即可.

【详解】 解: 原式 $= \frac{1}{xy} \div \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)$

$$= \frac{1}{xy} \div \frac{y-x}{xy}$$

$$= \frac{1}{xy} \times \frac{xy}{y-x}$$

$$= \frac{1}{y-x}.$$

【点睛】

23. 先化简, 再求值: $\frac{x}{x-4} + \frac{4}{x^2-16} \div \frac{2}{x+4}$, 其中 $x = 2026^0$.

【答案】 $\frac{x+2}{x-4}$, -1

【解析】

【分析】 本题主要考查分式的化简求值, 熟练掌握其运算法则是做题的关键. 先按照分式的运算法则, 对原式进行化简, 再将 $x = 2026^0$ 代入计算即可.

【详解】解：原式 $= \frac{x}{x-4} + \frac{4}{(x-4)(x+4)} \cdot \frac{x+4}{2} = \frac{x}{x-4} + \frac{2}{x-4} = \frac{x+2}{x-4}$,

当 $x = 2026^0 = 1$ 时，原式 $= \frac{1+2}{1-4} = \frac{3}{-3} = -1$.

24. 以下是某同学解方程 $\frac{5}{3x-2} + \frac{2x}{2-3x} = 3$ 的过程:

解：由原方程可得 $\frac{5}{3x-2} - \frac{2x}{3x-2} = 3 \dots\dots\dots ①$

因为此时等式左边分式的分母相同，于是

可得 $5-2x=3 \dots\dots\dots ②$

解得 $x=1 \dots\dots\dots ③$

经验后， $x=1$ 是原方程的解 $\dots\dots\dots ④$

$\therefore$ 原方程的解是 $x=1$.

(1) 上述解题过程，从第_____步开始出现错误（填入表示解题步骤的序号①②③④即可）

(2) 请写出解方程 $\frac{5}{3x-2} + \frac{2x}{2-3x} = 3$ 的正确解题过程.

【答案】(1) ② (2) 过程见详解

【解析】

【分析】 本题主要考查分式方程的解法，熟练掌握分式方程的解法是解题的关键；

(1) 根据题中所给过程进行求解即可；

(2) 根据分式方程的解法可进行求解.

【小问 1 详解】

解：上述解题过程，从第②步开始出现错误；

故答案为②；

【小问 2 详解】

解： $\frac{5}{3x-2} + \frac{2x}{2-3x} = 3$

$5-2x=3(3x-2),$

$5-2x=9x-6,$

$5+6=9x+2x,$

$11=11x,$

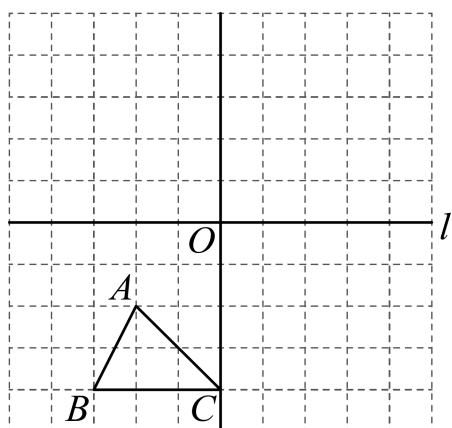
解得 $x=1,$

检验：当 $x=1$ 时， $3x-2=1 \neq 0,$

∴原方程的解是 $x = 1$.

四、解答题 (本大题共 5 题, 第 25、26、27 题每题 6 分, 第 28、29 题每题 8 分, 满分 34 分)

25. 已知 ABC 的顶点 A 、 B 、 C 在格点上, 按要求在方格纸中画图.



- (1) 画出 ABC 向右平移 4 格后的图形 $\triangle A_1B_1C_1$.
- (2) 画出 ABC 关于直线 l 成轴对称的图形 $\triangle A_2B_2C_2$.
- (3) 画出 ABC 关于点 O 成中心对称的图形 $\triangle A_3B_3C_3$.

【答案】(1) 画图见解析

(2) 画图见解析 (3) 画图见解析

【解析】

【分析】(1) 根据平移的性质画图即可;

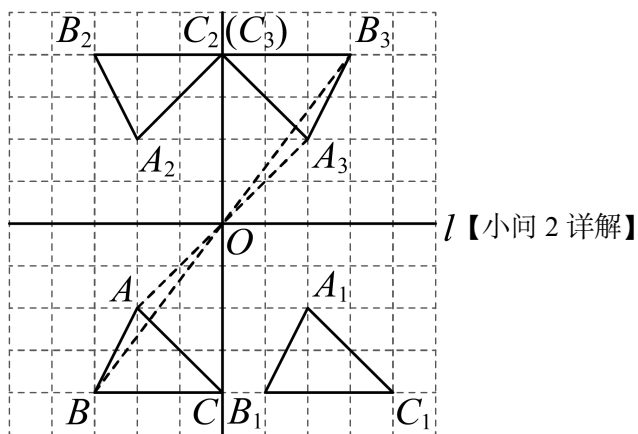
(2) 根据轴对称的性质画图即可;

(3) 根据中心对称图形的性质画图即可;

本题考查了平移作图, 作轴对称图形, 作中心对称图形的性质, 熟练掌握知识点是解题的关键.

【小问 1 详解】

解: 如图所示, $\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求;



解：如图所示， $\triangle A_2B_2C_2$ 即为所求；

【小问 3 详解】

解：如图所示， $\triangle A_3B_3C_3$ 即为所求．

26. 某校七年级要举行“阅读之星”评选活动，评选小组收到一份评选方案，方案考虑了①书籍的数量 A ，②书籍的总页数 B ，③书籍的类别数 C ，共 3 个指标因素，建立的“阅读之星”得分公式为：

$10A + 0.1B + 5C$ ．假设小海共读了 6 本书，6 本书的总页数为 750 页，所读书籍的类别数为 2，那么小海的得分为： $10A + 0.1B + 5C = 10 \times 6 + 0.1 \times 750 + 5 \times 2 = 145$ ．有人建议将“读书报告评分”也作为评选的指标因素，读书报告评分满分为 10 分．那么新评选方案需考虑如下 4 个指标因素：①书籍的数量 A ，②书籍的总页数 B ，③书籍的类别数 C ，④读书报告评分 D ，建立的“阅读之星”得分公式为

$pA + qB + rC + sD$ ，其中 p 、 q 、 r 、 s 为各项指标因素的系数．表 1 为新评选方案中各指标因素的系数．

表 1

指标因素	系数
书籍的数量 A	5
书籍的总页数 B	0.1
书籍的类别数 C	3
读书报告评分 D	10

(1) 请根据表 1，建立新评选方案“阅读之星”的得分公式_____

(2) 已知欢欢和乐乐的各项阅读指标如下：

	书籍的数量 A	书籍的总页数 B	书籍的类别数 C	读书报告评分 D
欢欢	6	750	3	9
乐乐	4	800	1	6

请根据新评选方案“阅读之星”的得分公式，分别计算欢欢和乐乐的得分。

【答案】 (1) $5A + 0.1B + 3C + 10D$

(2) 欢欢得分 204，乐乐得分 163

【解析】

【分析】 本题考查了整式的相关概念，比如系数及求整式的值，理解题意是解题的关键。(1) 根据题目条件，读懂题目信息，把各系数代入整式即可；(2) 根据 (1) 中的公式，分别代入欢欢和乐乐 A 、 B 、 C 、 D 的值计算即可。

【小问 1 详解】

解：∵ 建立的“阅读之星”得分公式为 $pA + qB + rC + sD$ ， $p = 5$ 、 $q = 0.1$ 、 $r = 3$ 、 $s = 10$ ，

∴ 新评选方案“阅读之星”的得分公式为 $5A + 0.1B + 3C + 10D$ ，

故答案为： $5A + 0.1B + 3C + 10D$ ；

【小问 2 详解】

解：欢欢的得分为 $5 \times 6 + 0.1 \times 750 + 3 \times 3 + 10 \times 9 = 204$ ，

乐乐的得分为 $5 \times 4 + 0.1 \times 800 + 3 \times 1 + 10 \times 6 = 163$ 。

27. 《上海市初中毕业升学体育统一考试项目成绩评价标准》规定，女生 800 米跑成绩若在 3 分 39 秒至 3 分 26 秒之间（含端点），可获得附加分 0.5 分；若成绩达到 3 分 25 秒及以上，可获得附加分 1 分（统一考试总分仍为 15 分）。

在一次计时跑步中，某班一名女生和一名男生的平均速度相同，且女生跑完 800 米所用时间比这名男生跑完 1000 米所用时间少 54 秒。那么按照上述评价标准，在这次计时跑步中，这名女生的成绩是否能获得附加分？请说明理由。

【答案】 能获得附加分

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程的行程问题，根据题意列出方程并求解，参照结果的成绩范围，则可判断是否能获得附加分。

【详解】 解：能获得附加分。

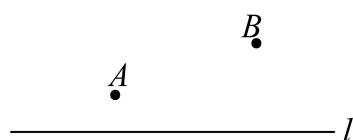
设这名女生的成绩为 x 分，则这名男生跑完 1000 米所用的时间为 $\left(x + \frac{54}{60}\right)$ 分，

根据题意，得 $\frac{800}{x} = \frac{1000}{x + \frac{54}{60}}$ ，

解得 $x = 3.6$ ，

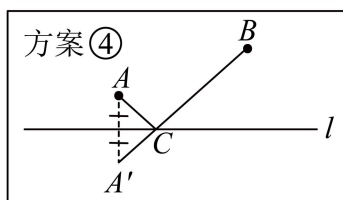
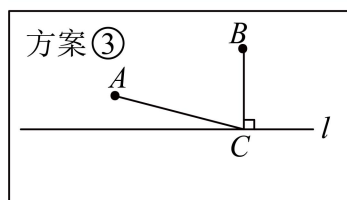
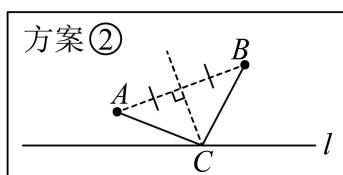
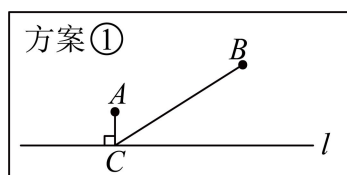
3.6 分钟 = 3 分 36 秒，在 3 分 39 秒至 3 分 26 秒之间，所以可获得附加分 0.5 分。

28. 【提出问题】唐代诗人李颀的《古从军行》开头两句“白日登山望烽火，黄昏饮马傍交河，”中隐含着—个有趣的数学问题——将军饮马，如图，将军牵马从营地 A 出发，先到河流 l 边上一点 C 饮马，再去河岸同侧的营地 B 开会，应该怎样走才能使路程最短？



【分析问题】

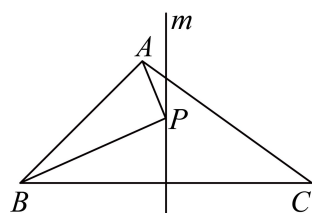
(1) 为了解决这个问题，数学小组的同学提出了如下四种确定河边饮马点 C 的方案。



正确的方案是_____ (填序号)，此方案中用到的求最短路程的数学知识是_____。

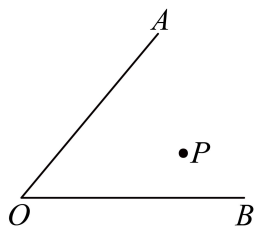
【解决问题】

(2) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 B 与点 C 关于直线 m 成轴对称，点 P 是直线 m 上的动点。若 $AB = 5, AC = 6, BC = 8$ ，则 $\triangle ABP$ 周长的最小值为_____。



【类比探究】

(3) 如图, 点 P 是 $\angle AOB$ 内一定点, 将军牵马从军营 P 出发, 先到河流 OA 边上一点 C 饮马, 再到草地 OB 边上一点 D 吃草, 最后回到军营 P



①在上图上画图: 使将军走过的路程 $PC + CD + DP$ 最短. (保留画图痕迹, 辅助线用虚线, 最短路程用实线)

②当将军走过的路程 $PC + CD + DP$ 最短, 且 $\angle AOB = 55^\circ$ 时, 则 $\angle CPD = \underline{\hspace{1cm}}^\circ$.

【答案】 (1) ④, 两点之间线段最短; (2) 11; (3) ①见解析; ②70

【解析】

【分析】 本题主要考查了轴对称的性质, 两点之间线段最短等知识点.

(1) 根据轴对称的性质以及两点之间线段最短即可求解;

(2) 过点 A 作直线 m 的对称点 A' , 连接 $A'B$ 与直线 m 的交点即为 $\triangle ABP$ 周长的最小值的点 P , 由对称轴的性质可得, $BP = CP, AP = A'P$, 则 $A'B = AC$, 则 $\triangle ABP$ 的周长最小值转化为 $AB + AC$ 的值;

(3) ①过点 P 分别作 OA, OB 的对称点 P_2, P_1 , 连接 P_1P_2 与 OA, OB 交点即为点 C, D , 则此时 $PC + CD + DP$ 最短;

②由三角形内角和定理可得 $\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$, 由轴对称的性质可得 $\angle 2 = \angle 3$, 则 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$, 故 $\angle 7 = 180^\circ - \angle 1 - \angle 3 = 180^\circ - 2\angle 1$, 同理可得 $\angle 8 = 180^\circ - 2\angle 4$, 再由三角形内角和定理求解.

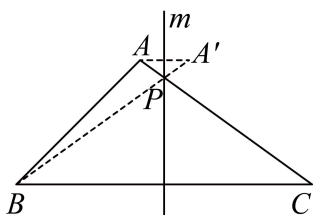
【详解】 解: (1) 正确的方案是④,

因为由轴对称的性质可得 $CA = CA'$,

所以当点 B, C, A' 三点共线时, $CA + CB = CA' + CB = A'B$

所以此方案中用到的求最短路程的数学知识是两点之间, 线段最短;

(2) 过点 A 作直线 m 的对称点 A' , 连接 $A'B$ 与直线 m 的交点即为 $\triangle ABP$ 周长的最小值的点 P ,



由对称轴的性质可得, $BP = CP, AP = A'P$,

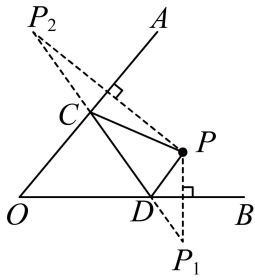
$$\therefore BP + A'P = CP + AP,$$

$$\therefore A'B = AC,$$

$$\therefore \triangle ABP \text{ 的周长最小值为 } AB + BP + AP = AB + BP + A'P = AB + A'B = AB + AC = 5 + 6 = 11,$$

故答案为: 11;

(3) ①如图, $PC + CD + DP$ 最短,

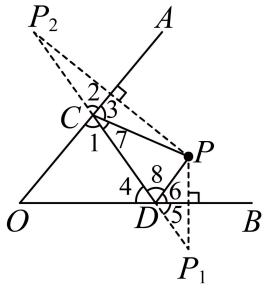


过点 P 分别作 OA, OB 的对称点 P_2, P_1 , 连接 P_1P_2 与 OA, OB 交点即为点 C, D

$$\text{则 } P_2C = PC, DP_1 = DP,$$

$$\therefore PC + CD + DP = P_2C + CD + P_1D = P_1P_2;$$

②如图:



$$\text{因为 } \angle 1 + \angle 4 + \angle AOB = 180^\circ,$$

$$\text{所以 } \angle 1 + \angle 4 = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ,$$

$$\text{由轴对称的性质可得 } \angle 2 = \angle 3,$$

$$\text{因为 } \angle 1 = \angle 2,$$

$$\text{所以 } \angle 1 = \angle 2 = \angle 3,$$

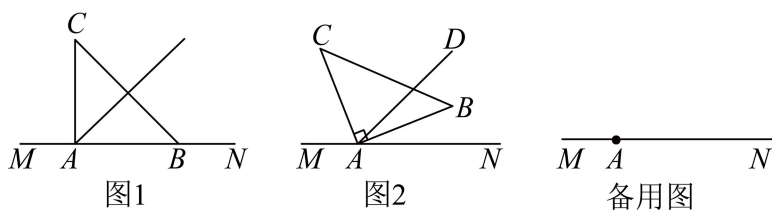
$$\text{所以 } \angle 7 = 180^\circ - \angle 1 - \angle 3 = 180^\circ - 2\angle 1,$$

$$\text{同理可得 } \angle 8 = 180^\circ - 2\angle 4,$$

$$\therefore \angle CPD = 180^\circ - (\angle 7 + \angle 8) = 180^\circ - (180^\circ - 2\angle 1 + 180^\circ - 2\angle 4) = 2(\angle 1 + \angle 4) - 180^\circ = 2 \times 125^\circ - 180^\circ = 70^\circ$$

故答案为：70.

29. 如图 1, 点 A 为直线 MN 上一点, AD 为射线, $\angle DAN = 42^\circ$, 将一个三角板的直角顶点放在点 A 处, 一边 AB 在射线 AN 上, 另一边 AC 与 AD 都在直线 MN 的上方.



(1) 如图 2, 将三角板绕点 A 逆时针旋转, 若 AB 恰好平分 $\angle DAN$, 则 $\angle CAM = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$.

(2) 将图 1 中的三角板绕点 A 逆时针旋转, 若 AB 、 AC 在 $\angle DAM$ 内部, 且 $\angle BAD = \frac{1}{5}\angle CAM$, 则旋转角 = $\underline{\hspace{2cm}}^\circ$.

(3) 将图 1 中的射线 AD 和三角板同时绕点 A 顺时针旋转 2 周, 射线 AD 、三角板的旋转速度分别为每秒 8° 和每秒 5° . 第几秒时, 射线 AD 与三角板的边 AB 恰好在同一直线上?

【答案】(1) 69

(2) 50

(3) 14s 或 74s 或 99.6s 或 135.6s

【解析】

【分析】本题考查了旋转的三要素, 角的和差计算, 一元一次方程的应用, 解题的关键注意分类讨论的思想和数形结合的思想.

(1) 根据角平分线得到 $\angle BAN = \frac{1}{2}\angle DAN = 21^\circ$, 再由平角的意义求解即可;

(2) 设 $\angle CAM = \alpha$, 则 $\angle BAD = \frac{1}{5}\alpha$, 由 $\angle CAM + \angle CAB + \angle BAD + \angle DAN = 180^\circ$ 建立方程求解 α ,

即可求解旋转角 $\angle BAN$ 的度数;

(3) 分四种情况讨论, 注意 AD 转动停止时, AB 继续转动.

【小问 1 详解】

解: 因为 $\angle DAN = 42^\circ$, AB 平分 $\angle DAN$,

所以 $\angle BAN = \frac{1}{2}\angle DAN = 21^\circ$,

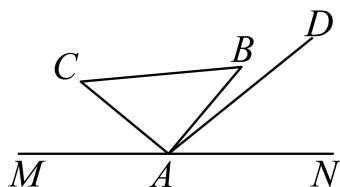
因为 $\angle CAB = 90^\circ$,

所以 $\angle CAM = 180^\circ - \angle CAB - \angle BAN = 180^\circ - 90^\circ - 21^\circ = 69^\circ$,

故答案为： 69；

【小问 2 详解】

解： 如图，



因为 $\angle BAD = \frac{1}{5} \angle CAM$,

设 $\angle CAM = a$, 则 $\angle BAD = \frac{1}{5} a$,

因为 $\angle CAM + \angle CAB + \angle BAD + \angle DAN = 180^\circ$,

所以 $\frac{1}{5} a + 90^\circ + a + 42^\circ = 180^\circ$,

解得 $a = 40^\circ$,

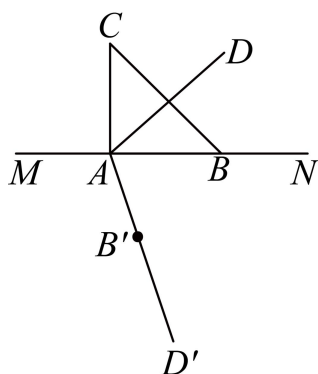
所以 $\angle BAD = \frac{1}{5} \times 40^\circ = 8^\circ$,

所以旋转角 $= \angle BAN = \angle DAN + \angle BAD = 42^\circ + 8^\circ = 50^\circ$,

故答案为： 50；

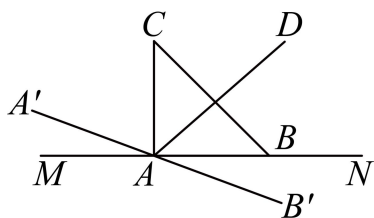
【小问 3 详解】

解： 当第一次 AB' , AD' 共线时， 如图：



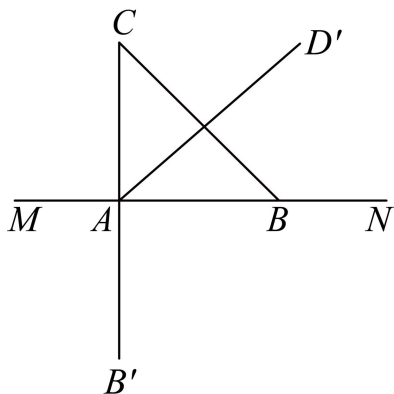
$$t = 42 \div (8 - 5) = 14s ;$$

当第二次 AB' , AD' 共线时， 如图：



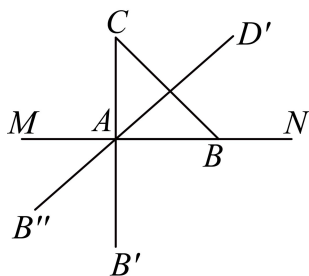
$$t = 14 + 180 \div 3 = 74\text{s} ;$$

当 AD 停止转动时, $t = 720^\circ \div 8 = 90\text{s}$, 则 AB 转动了 $5 \times 90 = 450^\circ$, 如图:



$$\therefore \angle BAB' = 450^\circ - 360^\circ = 90^\circ ,$$

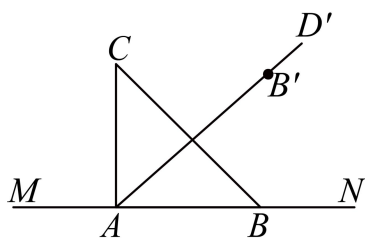
当第三次 AB'', AD' 共线时, 如图:



$$\text{此时 } \angle B'AB'' = 180^\circ - 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ ,$$

$$\therefore t = (450^\circ + 48^\circ) \div 5 = 99.6\text{s} ;$$

当第四次 AB', AD' 共线时, 如图:



$$\text{则 } t = (450^\circ + 48^\circ + 180^\circ) \div 5 = 135.6\text{s}$$

综上：第14s 或 74s 或 99.6s 或 135.6s 秒时，射线 AD 与三角板的边 AB 恰好在同一直线上.