

2025 学年第一学期七年级数学期末质量检测

满分：100 分 时间：90 分钟

一、选择题（本大题共 6 题，每题 2 分，共 12 分）

1. 下列计算正确的是（ ）

- A. $3a \cdot a^2 = 3a^3$ B. $3a + a^2 = 3a^3$ C. $a^2 \div 3a = 3a$ D. $(3a)^3 = 3a^3$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了单项式乘单项式、单项式除单项式、合并同类项、积的乘方，熟练掌握相关运算法则是解题的关键.

根据单项式乘单项式、单项式除单项式、合并同类项、积的乘方的运算法则逐项计算判断即可.

【详解】解：A、 $3a \cdot a^2 = (3 \times 1) \times (a \cdot a^2) = 3a^3$ ，原计算正确，符合题意；

B、 $3a$ 和 a^2 不是同类项，不能合并，原计算错误，不符合题意；

C、 $a^2 \div 3a = (1 \div 3) \times (a^2 \div a) = \frac{1}{3}a$ ，原计算错误，不符合题意；

D、 $(3a)^3 = 3^3 \cdot a^3 = 27a^3$ ，原计算错误，不符合题意；

故选：A.

2. 下列分式中哪个是最简分式（ ）

- A. $\frac{3xy^2}{5y}$ B. $\frac{y^2 - x^2}{2(y+x)}$ C. $\frac{-x-1}{2x+2}$ D. $\frac{x+2y}{y+2x}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查最简分式的定义，熟练掌握最简分式是解题的关键.

根据最简分式的定义即可得到答案.

【详解】解：A: $\frac{3xy^2}{5y} = \frac{3xy}{5}$ ，可约分，不是最简分式，不符合题意；

B: $\frac{y^2 - x^2}{2(y+x)} = \frac{(y-x)(y+x)}{2(y+x)} = \frac{y-x}{2}$ ，可约分，不是最简分式，不符合题意；

C: $\frac{-x-1}{2x+2} = \frac{-(x+1)}{2(x+1)} = -\frac{1}{2}$ ，可约分，不是最简分式，不符合题意；

D: $\frac{x+2y}{y+2x}$, 分子与分母无公因式, 不可约分, 是最简分式, 符合题意.

故选 D.

3. 下列从左到右的变形是因式分解的是 ()

A. $(2x+y)(2x-y)=4x^2-y^2$

B. $-4x^2+4xy-y^2=-(2x-y)^2$

C. $x^2+2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$

D. $2xy-4z^2=2(xy-2z^2)$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了因式分解的定义, 因式分解的定义是将一个多项式化为几个整式的积的形式.

选项 A 是整式乘法, 选项 C 左边不是多项式, 选项 D 仅提取数字, 选项 B 符合定义.

【详解】解: 因式分解需满足左边为多项式, 右边为整式的积,

选项 A: 左边为积, 右边为多项式, 是整式乘法, 不符合因式分解的定义;

选项 B: 左边为多项式 $-4x^2+4xy-y^2$, 右边为 $-(2x-y)^2$, 是积的形式, 符合因式分解的定义;

选项 C: 左边 $x^2+2+\frac{1}{x^2}$ 含分式, 不是多项式, 不符合因式分解的定义;

选项 D: 左边 $2xy-4z^2$ 为多项式, 右边 $2(xy-2z^2)$ 为积的形式, 但仅提取数字, 不符合因式分解的定义;

故选: B.

4. “双十二”期间, 某水果店打出苹果每公斤优惠 4 元的促销标语, 结果小明发现同样用 350 元购买该店苹果, 比优惠前可多买 40%, 求优惠后该苹果的售价. 设该苹果优惠后每公斤 x 元, 则可得方程: ()

A. $\frac{350}{x-4}=\frac{350}{x} \cdot (1+40\%)$

B. $\frac{350}{x-4} \cdot (1+40\%)=\frac{350}{x}$

C. $\frac{350}{x+4}=\frac{350}{x} \cdot (1+40\%)$

D. $\frac{350}{x+4} \cdot (1+40\%)=\frac{350}{x}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了分式方程的应用, 理解题意是解决本题的关键.

根据题意得原价为 $x+4$ 元, 用 350 元购买, 优惠前可买 $\frac{350}{x+4}$ 公斤, 优惠后可买 $\frac{350}{x}$ 公斤. 根据优惠后购

买量比优惠前多 40%, 得优惠后购买量等于优惠前购买量乘以 $1+40\%$, 进而列式即可.

【详解】解: $\because$ 优惠后每公斤 x 元,

∴ 原价为 $(x+4)$ 元,

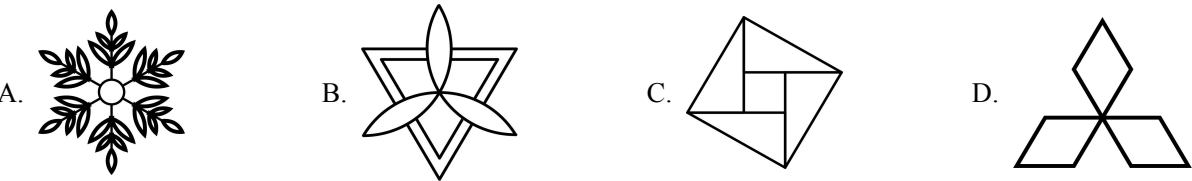
∴ 用 350 元购买, 优惠前数量为 $\frac{350}{x+4}$ 公斤, 优惠后数量为 $\frac{350}{x}$ 公斤.

又 ∵ 优惠后数量比优惠前多 40%,

$$\therefore \frac{350}{x} = \frac{350}{x+4} \cdot (1+40\%).$$

故选 D.

5. 下列图形中是中心对称图形, 不是轴对称图形的是 ()



【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了轴对称图形, 中心对称图形的识别, 解题的关键在于熟练掌握: 在平面内, 一个图形沿一条直线折叠, 直线两旁的部分能够完全重合的图形叫做轴对称图形; 在平面内, 把一个图形绕着某个点旋转 180° , 如果旋转后的图形能与原来的图形重合, 那么这个图形叫做中心对称图形.

根据中心对称图形和轴对称图形的概念求解即可.

【详解】解: A、该图形既是轴对称图形, 也是中心对称图形, 故不符合题意;

B、该图形是轴对称图形, 不是中心对称图形, 故不符合题意;

C、该图形是中心对称图形, 不是轴对称图形, 故符合题意;

D、该图形是轴对称图形, 不是中心对称图形, 故不符合题意,

故选: C.

6. “俄罗斯方块”是一种早期的电子游戏, 核心玩法是在方格场地中, 操控 7 种积木 (每个占四个格子) 通过平移、旋转并堆叠 (积木与积木之间不能重合, 没有缝隙), 填满整行即可消除该行从而得分, 积木堆到顶端则游戏结束. 例如: 下图①中, 将上方“长方形”积木, 向下平移 4 个格子, 就可以消除“第 1 行”从而得分. 那么当如图②中最上方积木通过怎样的运动可以同时消除“第 1 行和第 2 行” ()



- 图②

【解析】

故选 C.

7. 计算: $\frac{1}{2}a \cdot (3ab - 2b) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解析】

【详解】解: $\frac{1}{2}a \cdot (3ab - 2b) = \frac{1}{2}a \cdot 3ab + \frac{1}{2}a \cdot (-2b) = \frac{3}{2}a^2b - ab,$

故答案为 $\frac{3}{2}a^2b - ab$.

8. 计算: $(6a^3b^2 - 9a^2b^3) \div 3a^2b^2 =$ _____.

【解析】

【详解】 解: $(6a^3b^2 - 9a^2b^3) \div 3a^2b^2$

$$= 6a^3b^2 \div 3a^2b^2 - 9a^2b^3 \div 3a^2b^2$$

$$= 2a - 3b$$

故答案为: $2a - 3b$.

9. 计算: $(-3a^3)^2 \cdot (2a)^{-3} \div (-9)^0 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{9}{8}a^3$

【解析】

【分析】 本题考查整式的混合运算, 先计算幂的乘方、负整数指数幂和零指数幂, 再根据整式的乘除法则进行运算.

【详解】 解: $(-3a^3)^2 \cdot (2a)^{-3} \div (-9)^0$

$$= 9a^6 \cdot \frac{1}{8a^3} \div 1$$

$$= 9a^6 \cdot \frac{1}{8a^3}$$

$$= \frac{9a^6}{8a^3}$$

$$= \frac{9}{8}a^3$$

故答案为 $\frac{9}{8}a^3$.

10. 因式分解: $-x^2 - x - \frac{1}{4} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解, 解题的关键是熟练掌握利用完全平方公式进行因式分解. 先处理符号, 再由完全平方公式进行因式分解.

【详解】 解: 原式 $= -\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right)$

$$= -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2,$$

故答案为: $-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$.

11. 如果分式 $\frac{5}{3x+2}$ 有意义, 则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \neq -\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了分式有意义的条件, 熟练掌握分式有意义的条件, 分母不为零, 是解题的关键. 根据分式有意义的条件, 分母不为零, 列出不等式并求解即可.

【详解】 解: $\because$ 分式 $\frac{5}{3x+2}$ 有意义,

$\therefore$ 分母 $3x+2 \neq 0$,

即 $3x \neq -2$,

$\therefore x \neq -\frac{2}{3}$.

故答案为: $x \neq -\frac{2}{3}$.

12. 如果 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2$, 则 $\frac{xy}{2x-2y} =$ _____.

【答案】 $-\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查了求分式的值.

由 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2$ 得到 $\frac{x-y}{xy} = -2$, 即 $\frac{xy}{x-y} = -\frac{1}{2}$, 进而代入 $\frac{xy}{2x-2y}$ 计算即可.

【详解】 解: $\because \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2$,

$\therefore \frac{y}{xy} - \frac{x}{xy} = 2$,

$\therefore \frac{y-x}{xy} = 2$,

$\therefore \frac{x-y}{xy} = -2$,

$$\therefore \frac{xy}{x-y} = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{xy}{2x-2y} = \frac{1}{2} \times \frac{xy}{x-y} = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}.$$

故答案为: $-\frac{1}{4}$.

13. 已知 m, n 是常数, 如果 $\frac{m}{2}x^{m-1}y^5$ 和 $\frac{3}{n}x^3y^{m-n}$ 是同类项, 那么它们合并同类项后得_____.

【答案】 $-x^3y^5$

【解析】

【分析】 本题考查同类项的定义, 根据相同字母的指数必须相等, 因此建立关于 m 和 n 的方程并求解, 再计算合并后的系数.

【详解】 解: $\because \frac{m}{2}x^{m-1}y^5$ 和 $\frac{3}{n}x^3y^{m-n}$ 是同类项,

$\therefore x$ 的指数相等, y 的指数相等.

即 $m-1=3, 5=m-n$.

解得 $m=4, n=-1$,

$$\begin{aligned} & \frac{m}{2}x^{m-1}y^5 + \frac{3}{n}x^3y^{m-n} \\ &= \frac{4}{2}x^{4-1}y^5 + \frac{3}{-1}x^3y^{4-(-1)} \\ &= 2x^3y^5 - 3x^3y^5 \\ &= -x^3y^5 \end{aligned}$$

所以合并后为 $-x^3y^5$.

14. 如果 $x^a=5, x^b=3$, 那么 $x^{3b-2a} =$ _____.

【答案】 $\frac{27}{25}$

【解析】

【分析】 本题考查了同底数幂的除法逆运算, 幂的乘方逆运算, 解题的关键是熟练掌握计算公式.

先将原式变形为 $x^{3b} \div x^{2a}$, 再逆用幂的乘方运算法则得到 $(x^b)^3 \div (x^a)^2$, 最后代入求值即可.

【详解】 解: $\because x^a=5, x^b=3$,

$$\therefore x^{3b-2a}$$

$$= x^{3b} \div x^{2a}$$

$$= (x^b)^3 \div (x^a)^2$$

$$= 3^3 \div 5^2$$

$$= \frac{27}{25}$$

故答案为: $\frac{27}{25}$.

15. 分式方程 $\frac{2}{x+2} = \frac{1}{x}$ 的解是: _____.

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程，解题的关键是熟练掌握解分式方程的步骤.

分式方程去分母转化为整式方程求解，需检验解是否使分母为零.

【详解】 方程两边同乘 $x(x+2)$,

得 $2x = x + 2$,

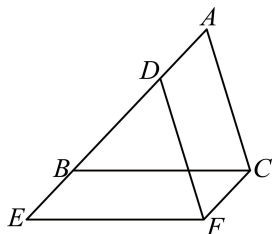
解得 $x = 2$,

经检验 $x = 2$ 是分式方程的解

所以，原方程的解为 $x = 2$

故答案为: $x = 2$.

16. 如图，将一个周长为10cm的 $\triangle ABC$ 沿射线 AB 方向平移到 $\triangle DEF$ 的位置，(点 A 、 B 、 C 分别与点 D 、 E 、 F 对应)，若四边形 $AEFC$ 周长为14cm，则平移的距离为_____ cm.



【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查了平移的性质，根据平移的性质得到 $BC = EF$ ， $BE = CF$ ，结合三角形和四边形的周长进行求解即可，熟练掌握平移的性质是解题的关键.

【详解】解：∵ ABC 沿射线 AB 方向平移到 $\triangle DEF$ 的位置，

$$\therefore BC = EF, BE = CF,$$

∵ 四边形 $AEFC$ 的周长为 14cm ，

$$\therefore AE + EF + CF + AC = 14\text{cm},$$

$$\therefore AB + BE + EF + CF + AC = 14\text{cm},$$

∵ ABC 周长为 10cm ，即 $AB + BC + AC = 10\text{cm}$ ，

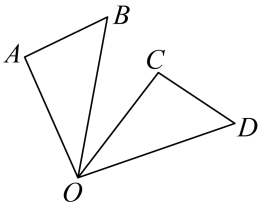
$$\therefore BE + CF = 14 - 10 = 4(\text{cm}),$$

$$\therefore BE = CF = 2\text{cm},$$

即平移的距离为 2cm ，

故答案为：2.

17. 如图，将 AOB 绕点 O 顺时针旋转 n° 得 $\triangle COD$ （点 A 、 B 分别对应点 C 、 D ），若 $5\angle BOC = \angle AOD = 100^\circ$ ，则旋转角为_____度.



【答案】60

【解析】

【分析】本题主要考查了旋转的性质，几何图形中角的计算，先根据 $5\angle BOC = \angle AOD = 100^\circ$ ，求出 $\angle BOC = 20^\circ$ ，根据旋转得出 $\angle AOB = \angle COD$ ，然后求出 $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC = 40^\circ + 20^\circ = 60^\circ$ 即可.

【详解】解：∵ $5\angle BOC = \angle AOD = 100^\circ$ ，

$$\therefore \angle BOC = 20^\circ,$$

$$\therefore \angle AOB + \angle COD = \angle AOD - \angle BOC = 80^\circ,$$

根据旋转可得： $\angle AOB = \angle COD$ ，

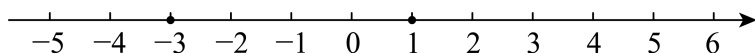
$$\therefore \angle AOB = \angle COD = \frac{1}{2} \times 80^\circ = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle AOC = \angle AOB + \angle BOC = 40^\circ + 20^\circ = 60^\circ,$$

即旋转角为 60° ．

故答案为：60.

18. 如图, 将一张印有数轴的纸条翻折, 使得表示 -3 的点与表示 1 的点重合, 此时, 表示数字 a 的点与表示数字_____的点重合 (用含 a 的代数式表示)



【答案】 $-2-a$

【解析】

【分析】 本题主要考查了数轴的翻折, 掌握中点公式是解题的关键. 数轴翻折后, 表示 -3 的点与表示 1 的点重合, 则数轴沿中点 -1 翻折, 根据重合的数中点是 -1 即可解答.

【详解】 解: 由题意得数轴沿 -3 和 1 的中点 $\frac{-3+1}{2} = -1$ 翻折,

设与表示数字 a 的点重合的是表示数字 b 的点,

$$\text{则 } \frac{a+b}{2} = -1,$$

$$\text{解得 } b = -2-a,$$

故答案为 $-2-a$.

三、简答题 (19-23 题每题 5 分, 24 题 6 分, 25 题 7 分, 共 38 分)

19. 计算: $2(x-2)^2 - (x+3)(x-2)$.

【答案】 $x^2 - 9x + 14$

【解析】

【分析】 本题考查了整式的混合运算, 解题的关键是熟练掌握整式的混合运算法则.

先根据完全平方公式和多项式乘以多项式法则计算, 再去括号, 合并同类项即可.

【详解】 解: $2(x-2)^2 - (x+3)(x-2)$

$$= 2(x^2 - 4x + 4) - (x^2 - 2x + 3x - 6)$$

$$= 2x^2 - 8x + 8 - x^2 + 2x - 3x + 6$$

$$= x^2 - 9x + 14$$

20. 计算: $(x^{-1} \cdot y^{-1}) \div (x^{-1} - y^{-1})$.

【答案】 $\frac{1}{y-x}$

【解析】

【分析】 本题考查分式的化简, 先将负整数指数幂变形, 再通分, 约分即可.

【详解】解： $(x^{-1} \cdot y^{-1}) \div (x^{-1} - y^{-1})$

$$= \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \right) \div \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)$$

$$= \frac{1}{xy} \div \frac{y-x}{xy}$$

$$= \frac{1}{xy} \times \frac{xy}{y-x}$$

$$= \frac{1}{y-x}$$

21. 化简： $\frac{x^2-1}{x} \div \left(\frac{x^2+3x+1}{x} - 1 \right)$.

【答案】 $\frac{x-1}{x+1}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了分式的混合计算，先把小括号内的式子通分，再把分子合并同类项后分解因式，再把第一个分式的分子分解因式，接着把除法变成乘法后约分化简即可得到答案.

【详解】解： $\frac{x^2-1}{x} \div \left(\frac{x^2+3x+1}{x} - 1 \right)$

$$= \frac{x^2-1}{x} \div \frac{x^2+3x+1-x}{x}$$

$$= \frac{(x+1)(x-1)}{x} \div \frac{x^2+2x+1}{x}$$

$$= \frac{(x+1)(x-1)}{x} \div \frac{(x+1)^2}{x}$$

$$= \frac{(x+1)(x-1)}{x} \cdot \frac{x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x-1}{x+1}.$$

22. 因式分解： $(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24$.

【答案】 $(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解，解题的关键是熟练掌握因式分解的几种常用方法.

连续两次运用十字相乘法因式分解即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & (x^2 + 5x)^2 + 10(x^2 + 5x) + 24 \\ &= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) \\ &= (x+1)(x+4)(x+2)(x+3) \end{aligned}$$

23. 因式分解: $x^2 + xy - 1 - y$.

$$\text{【答案】 } (x-1)(x+1+y)$$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解.

通过分组分解，将多项式分为两组后分别提取公因式，再提取两组的公因式 $(x-1)$ 完成因式分解.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & x^2 + xy - 1 - y \\ &= (x^2 - 1) + (xy - y) \\ &= (x-1)(x+1) + y(x-1) \\ &= (x-1)(x+1+y). \end{aligned}$$

24. 解方程: $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x} = \frac{3}{x-x^2}$.

$$\text{【答案】 } x = -\frac{1}{3}$$

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程.

两边同时乘以 $x^2 - x$ 化为整式方程，求解后检验即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & \text{两边同时乘以 } x^2 - x \text{ 得 } x + 2(x-1) = -3, \\ & \text{即 } x + 2x - 2 = -3, \\ & \text{解得 } x = -\frac{1}{3}, \\ & \text{检验: 当 } x = -\frac{1}{3} \text{ 时, } x^2 - x \neq 0, \end{aligned}$$

∴原方程的解为 $x = -\frac{1}{3}$.

25. 若 $-1 \leq x \leq 1$, 且 x 为整数, 请对 $\left(\frac{x^2}{x-1} - x - 1\right) \div \frac{x+1}{x^2+2x-3}$ 先化简再求值.

【答案】 $\frac{x+3}{x+1}$; 3

【解析】

【分析】 本题考查分式的化简求值, 先将原式化简, 根据分式有意义的条件确定 x 的值, 再代入求解即可.

【详解】 解: $\left(\frac{x^2}{x-1} - x - 1\right) \div \frac{x+1}{x^2+2x-3}$

$$= \left[\frac{x^2}{x-1} - (x+1)\right] \div \frac{x+1}{x^2+2x-3}$$
$$= \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{(x+1)(x-1)}{x-1}\right) \div \frac{x+1}{(x-1)(x+3)}$$
$$= \frac{x^2 - x^2 + 1}{x-1} \times \frac{(x-1)(x+3)}{x+1}$$
$$= \frac{1}{x-1} \times \frac{(x-1)(x+3)}{x+1}$$
$$= \frac{x+3}{x+1}$$

∵ $-1 \leq x \leq 1$, 且 x 为整数,

∴ $x = -1$ 或 0 或 1 ,

为使原式有意义, 需满足, 分母不为 0 , 除数不为 0 ,

$$\text{即 } x-1 \neq 0, \quad \frac{x+1}{(x-1)(x+3)} \neq 0,$$

∴ $x \neq 1$, $x \neq -1$, $x \neq -3$,

∴ $x = 0$,

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, } \frac{x+3}{x+1} = \frac{0+3}{0+1} = \frac{3}{1} = 3$$

四、解答题 (第 26、27 题每题 6 分, 第 28、29 题每题 7 分, 共 26 分)

26. 如果关于 x 的方程 $\frac{4-x}{3-x} - 2 = \frac{m}{x-3}$ 无解. 求 m 的值.

【答案】 $m = -1$

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程无解问题，分式方程无解的条件是去分母后得到的整式方程的解使原方程的分母为零，或整式方程本身无解.

先化为整式方程，再根据分式方程无解的条件计算即可.

【详解】 解：原方程为 $\frac{4-x}{3-x} - 2 = \frac{m}{x-3}$

两边同乘 $3-x$ ，得 $4-x-2(3-x) = -m$

整理得 $4-x-6+2x = -m$

即 $x-2 = -m$

$\therefore x = 2-m$

当 $3-x=0$ 时， $x=3$ ，

即 $2-m=3$ ，

解得 $m=-1$.

27. 春节将至，今年各类年会表演热点是机器人表演. 某工厂计划生产跳舞机器人 1000 套，安排甲、乙两个车间完成，甲车间计划完成 400 套. 在生产过程中，甲、乙车间每天生产的套数之比为 5:6，两车间同时生产，结果甲车间比乙车间早 2 天完成任务，求甲车间每天生产多少套跳舞机器人？

【答案】 50

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程的应用.

设甲车间每天生产 $5x$ 套，乙车间每天生产 $6x$ 套，根据生产任务和提前 2 天完成的条件列出方程求解即可.

【详解】 解：甲车间计划生产 400 套，则乙车间计划生产 $1000-400=600$ 套，

设甲车间每天生产套数为 $5x$ ，

$\therefore$ 甲、乙车间每天生产的套数之比为 5:6，

$\therefore$ 乙车间每天生产套数为 $6x$ ，

甲车间生产天数为 $\frac{400}{5x} = \frac{80}{x}$ ，

乙车间生产天数为 $\frac{600}{6x} = \frac{100}{x}$ ，

$\therefore$ 甲车间比乙车间早 2 天完成任务，

$\therefore \frac{100}{x} - \frac{80}{x} = 2$ ，

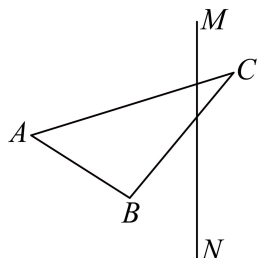
$$\text{即 } \frac{20}{x} = 2,$$

解得: $x = 10$,

经检验, $x = 10$ 是原分式方程的解,

$\therefore$ 甲车间每天生产 $5 \times 10 = 50$ 套.

28. 画图题 (保留必要画图痕迹, 不需要写画法): 如图, 已知直线 MN 和 $\triangle ABC$.



(1) 画出 $\triangle ABC$ 关于直线 MN 成轴对称的 $\triangle A_1B_1C_1$

(2) 在直线 MN 上找一点 O , 并画出 $\triangle A_1B_1C_1$ 关于点 O 成中心对称图形, 让所得三角形至少有一顶点与 $\triangle ABC$ 的三个顶点之一重合. (只需画出一种情况即可)

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析 (答案不唯一)

【解析】

【分析】 本题考查了作图—轴对称变换、画中心对称图形、轴对称的性质, 熟练掌握以上知识点并灵活运用是解此题的关键.

(1) 先确定点 A, B, C 关于关于直线 MN 的对称点 A_1, B_1, C_1 , 然后连线即可;

(2) 取 BB_1 与 MN 的交点为 O , 分别作出点 A_1, B_1, C_1 关于点 O 的对称点 A_2, B_2, C_2 , 然后连线即可; 或取 CC_1 与 MN 的交点为 O , 分别作出点 A_1, B_1, C_1 关于点 O 的对称点 A_3, B_3, C_3 , 然后连线即可; 或取 AA_1 与 MN 的交点为 O , 分别作出点 A_1, B_1, C_1 关于点 O 的对称点 A_4, B_4, C_4 , 然后连线即可.

【小问 1 详解】

解: 如图 1, $\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求作的图形,

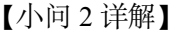


Figure 2 shows a geometric diagram of a cube-like structure. The vertices are labeled $A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, C, C_1, C_2$. A vertical line MN passes through the center O . Dashed lines represent hidden edges.

第 16页/共 19页

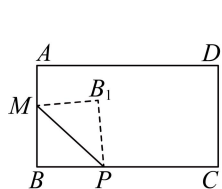


图1

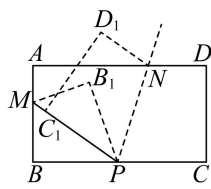


图2

(1) 若 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 互为“互优角”，当 $\angle 1 = 65^\circ$ 时，则 $\angle 2 =$ _____ 度.

(2) 如图 1，将一长方形纸片 $ABCD$ 沿着 MP 翻折，点 P 在线段 BC 上，点 M 在线段 AB 上，点 B 落在点 B_1 处，若 $\angle MPB_1$ 与 $\angle CPB_1$ 互为“互优角”，则求 $\angle MPB$ 的度数.

(3) 如图 2，点 N 在边 AD 上，点 C 和点 D 关于 PN 的对称点为点 C_1 和点 D_1 ，且点 M 、点 C_1 和点 P 在一直线上，则 $\angle NPB_1$ 与 $\angle MPB_1$ 是否可能互为“互优角”，若可能请求出此时 $\angle BPM$ 大小，若不可能请说明理由.

【答案】 (1) 5 或 125

(2) 40° 或 80°

(3) $\angle NPB_1$ 与 $\angle MPB_1$ 能互为“互优角”； $\angle BPM = 12^\circ$

【解析】

【分析】 (1) 根据“互优角”定义列式计算即可；

(2) 设 $\angle MPB = x^\circ$ ，根据折叠得出 $\angle MPB_1 = \angle MPB = x^\circ$ ，则 $\angle CPB_1 = 180^\circ - 2x^\circ$ ，根据“互优角”定义列出方程 $|x - (180^\circ - 2x^\circ)| = 60^\circ$ ，解方程即可；

(3) 设 $\angle BPM = y^\circ$ ，根据折叠得出 $\angle MPB_1 = \angle BPM = y^\circ$ ，
 $\angle CPN = \angle NPM = \frac{1}{2}(180^\circ - y^\circ) = 90^\circ - \frac{1}{2}y^\circ$ ，分两种情况：当 PB_1 在 PN 左侧时，当 PB_1 在 PN 右侧时，分别列出方程，解方程即可.

【小问 1 详解】

解： $\because \angle 1$ 和 $\angle 2$ 互为“互优角”，

$$\therefore |\angle 1 - \angle 2| = 60^\circ,$$

$$\therefore |65^\circ - \angle 2| = 60^\circ,$$

解得： $\angle 2 = 5^\circ$ 或 $\angle 2 = 125^\circ$ ；

【小问 2 详解】

解： 设 $\angle MPB = x^\circ$ ，

根据折叠可得: $\angle MPB_1 = \angle MPB = x^\circ$, 则 $\angle CPB_1 = 180^\circ - 2x^\circ$,

$\therefore \angle MPB_1$ 与 $\angle CPB_1$ 互为“互优角”,

$$\therefore |\angle MPB_1 - \angle CPB_1| = 60^\circ,$$

$$\therefore |x - (180^\circ - 2x^\circ)| = 60^\circ,$$

解得: $x = 40$ 或 $x = 80$,

即 $\angle MPB = 40^\circ$ 或 80° .

【小问 3 详解】

解: $\angle NPB_1$ 与 $\angle MPB_1$ 能互为“互优角”;

设 $\angle BPM = y^\circ$,

根据折叠可得: $\angle MPB_1 = \angle BPM = y^\circ$,

$$\angle CPN = \angle NPM = \frac{1}{2}(180^\circ - y^\circ) = 90^\circ - \frac{1}{2}y^\circ,$$

当 PB_1 在 PN 左侧时,

$$\angle NPB_1 = \angle NPM - \angle MPB_1$$

$$= 90^\circ - \frac{1}{2}y^\circ - y^\circ$$

$$= 90^\circ - \frac{3}{2}y^\circ,$$

$\therefore \angle NPB_1$ 与 $\angle MPB_1$ 互为“互优角”,

$$\therefore |\angle NPB_1 - \angle MPB_1| = 60^\circ,$$

$$\text{即 } \left| 90^\circ - \frac{3}{2}y - y \right| = 60,$$

解得: $y = 12$ 或 $y = 60$,

当 $y = 60$ 时, $\angle NPB_1 = 90^\circ - \frac{3}{2} \times 60^\circ = 0^\circ$, 不符合题意舍去;

$\therefore$ 此时 $\angle BPM = 12^\circ$;

当 PB_1 在 PN 右侧时,

$$\angle NPB_1 = \angle MPB_1 - \angle NPM$$

$$= y^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}y^\circ \right)$$

$$= \frac{3}{2}y^\circ - 90^\circ,$$

$\therefore \angle NPB_1$ 与 $\angle MPB_1$ 互为“互优角”，

$$\therefore |\angle NPB_1 - \angle MPB_1| = 60^\circ,$$

$$\text{即 } \left| \frac{3}{2}y - 90 - y \right| = 60,$$

解得： $y = 300$ 或 $y = 60$ ，

当 $y = 60$ 时， $\angle NPB_1 = \frac{3}{2} \times 60^\circ - 90^\circ = 0^\circ$ ，不符合题意舍去；

当 $y = 300$ 时， $\angle MPB = 300^\circ > 180^\circ$ ，不符合题意舍去；

$\therefore$ 此时 $\angle BPM = 75^\circ$ ；

综上， $\angle BPM = 12^\circ$.

【点睛】 本题主要考查了折叠的性质，新定义运算，几何图形中角的计算，绝对值方程，解题的关键是理解定义，注意进行分类讨论.