

2025-2026 学年七年级数学上学期第一次月考卷

强化卷·全解全析

(考试时间: 100 分钟 试卷满分: 150 分)

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。
4. 测试范围: 沪教版 2024 七年级上册 10.1~11.1。

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 共 24 分. 下列各题四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题卡的相应位置上.)

1. 下列代数式 $-\frac{a+b}{3}$, $\frac{m}{\pi}$, $2x^2y$, 3^{-5} , $(x-1)^{-2}$ 中, 单项式有 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】C

【分析】本题考查了单项式的判定, 掌握单项式的概念是关键.

数字与字母的积的代数式叫做单项式, 单独的一个数或一个字母也叫单项式, 由此即可求解.

【详解】解: $-\frac{a+b}{3} = -\frac{a}{3} - \frac{b}{3}$ 不是单项式,

$\frac{m}{\pi}$ 是单项式,

$2x^2y$ 是单项式,

$3^{-5} = \frac{1}{3^5}$ 是单项式,

$(x-1)^{-2} = \frac{1}{(x-1)^2}$ 不是单项式,

∴ 单项式有 3 个,

故选: C .

2. 下列说法正确的是 ()

- A. $\frac{1}{2}a^2b$ 是二次单项式 B. $a^3 + a^2$ 是五次二项式

C. $a^2 + a - 1$ 的常数项是 1

D. $-\frac{a^3b^2c}{5}$ 的系数是 $-\frac{1}{5}$

【答案】D

【分析】根据单项式和整式的相关概念判断各个选项即可.

【详解】A: $\frac{1}{2}a^2b$ 是三次单项式, 故 A 选项不符合题意;

B: $a^3 + a^2$ 是三次二项式, 故 B 选项不符合题意;

C: $a^2 + a - 1$ 的常数项是 -1 , 故 C 选项不符合题意;

D: $-\frac{a^3b^2c}{5}$ 的系数是 $-\frac{1}{5}$, 故 D 选项符合题意;

故选: D

【点睛】本题考查了单项式、整式, 熟练掌握单项式和整式的相关概念是解题的关键.

3. 下列运算正确的是 ()

A. $a^3 + a^3 = a^6$

B. $a^5 \cdot a^2 = a^6$

C. $(a^3)^2 = a^9$

D. $(-a^2)^3 = -a^6$

【答案】D

【分析】本题考查了合并同类项, 同底数幂的乘法, 幂的乘方. 熟练掌握合并同类项, 同底数幂的乘法, 幂的乘方是解题的关键.

利用合并同类项, 同底数幂的乘法, 幂的乘方对各选项判断作答即可.

【详解】解: A 中 $a^3 + a^3 = 2a^3 \neq a^6$, 故不符合要求;

B 中 $a^5 \cdot a^2 = a^7 \neq a^6$, 故不符合要求;

C 中 $(a^3)^2 = a^6 \neq a^9$, 故不符合要求;

D 中 $(-a^2)^3 = (-1)^3 \times (a^2)^3 = -a^6$, 故符合要求;

故选: D.

4. 化简 $5a \cdot (2a^2 - ab)$ 的结果是 ()

A. $-10a^3 - 5ab$

B. $10a^3 - 5a^2b$

C. $-10a^3 + 5a^2b$

D. $-10a^3 - 5a^2b$

【答案】B

【分析】本题考查了单项式乘以整式, 根据单项式乘以整式进行计算即可求解.

【详解】解: $5a \cdot (2a^2 - ab) = 10a^3 - 5a^2b$

故选: B.

5. 下面是小芳做的 - 道整式的加减运算题, 但她不小心把 - 滴墨水滴在了上

面. $\left(-x^2 + 3xy - \frac{1}{2}y^2\right) - \left(-\frac{1}{2}x^2 + 4xy - \frac{3}{2}y^2\right) = -\frac{1}{2}x^2$  $+ y^2$, 阴影部分即为被墨迹弄污的部分. 那么被墨汁遮住的一项应是 ()

- A. $-7xy$ B. $-xy$ C. $+7xy$ D. $+xy$

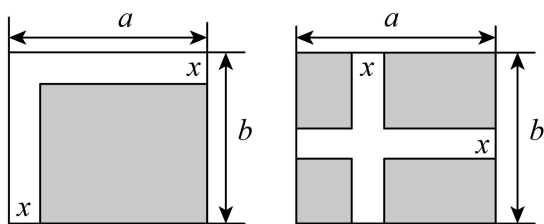
【答案】B

【分析】 本题考查了整式的加减运算, 正确计算是解题的关键.

【详解】 $\left(-x^2 + 3xy - \frac{1}{2}y^2\right) - \left(-\frac{1}{2}x^2 + 4xy - \frac{3}{2}y^2\right)$
 $= -x^2 + 3xy - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 - 4xy + \frac{3}{2}y^2$
 $= -\frac{1}{2}x^2 - xy + y^2,$

故选: B.

6. 如图, 通过计算, 比较图①, 图②中阴影部分的面积, 可以验证的算式是 ()



图①

图②

- A. $a(b-x) = ab - ax$ B. $(a-x)(b-x) = ab - ax - bx + x^2$
 C. $(a-x)(b-x) = ab - ax - bx$ D. $b(a-x) = ab - bx$

【答案】B

【分析】 本题考查整式乘整式, 单项式乘整式, 整式运算, 要求阴影部分面积, 若不规则图形可考虑利用大图形的面积减去小图形的面积进行计算, 若规则图形可以直接利用公式进行求解, 解题的关键是正确表示出图①和图②中阴影部分的面积列出等式.

由题意知: 图①和图②中阴影部分的面积相等, 正确表示出图①和图②中阴影部分的面积列出等式即可解答.

【详解】 解: 由题意知: 图①和图②中阴影部分的面积相等,

图①中, 阴影部分面积 $= (a-x)(b-x)$,

图②中, 阴影部分面积 $= ab - ax - bx + x^2$,

$$\therefore (a-x)(b-x) = ab - ax - bx + x^2,$$

故选：B.

二、填空题：(本大题共 12 题，每题 4 分，共 48 分.)

7. 在式子 2025 , $-4x^2y$, $x+y-2$, $\frac{1}{x}$, $\frac{x+1}{3}$ 中，整式的个数是_____个.

【答案】4

【分析】此题考查了整式的概念，掌握整式的概念是解题的关键，单项式和整式统称为整式，根据整式的概念，对每个式子逐个进行判断，即可求解.

【详解】解：2025 是单项式，为整式；

$-4x^2y$ 是单项式，为整式；

$x+y-2$ 是整式，为整式；

$\frac{1}{x}$ 分母含有未知数，不是整式；

$\frac{x+1}{3}$ 是整式，为整式；

所以整式个数为 4，

故答案为：4.

8. 计算 $-3x^2 \cdot 4x =$ _____.

【答案】 $-12x^3$

【分析】本题主要考查了单项式乘单项式，掌握单项式乘单项式的运算法则是解题的关键，直接利用单项式乘单项式的运算法则计算即可.

【详解】解： $-3x^2 \cdot 4x = (-3 \times 4)(x^2 \cdot x) = -12x^3$.

故答案为： $-12x^3$.

9. 在整式 $\frac{2x^2-5xy^3-x^3y^4}{7}$ 中，四次项的系数是_____.

【答案】 $-\frac{5}{7}$

【分析】本题考查了整式的常数项的概念，解题关键是理解常数项的概念和将整式进行变形，先用分子的每一项除以 4，从而得到一个整式，再找出其中的常数项即可.

【详解】解： $\frac{2x^2-5xy^3-x^3y^4}{7}$
 $= \frac{2}{7}x^2 - \frac{5}{7}xy^3 - \frac{1}{7}x^3y^4$,

四次项为 $-\frac{5}{7}xy^3$ ，故四次项系数为 $-\frac{5}{7}$ ，

故答案为： $-\frac{5}{7}$ 。

10. 合并同类项： $5x^2 - 8x + 6 - 3x^2 + 6x - 3 =$ _____.

【答案】 $2x^2 - 2x + 3$

【分析】 本题主要考查了合并同类项，熟记合并同类项法则是解答本题的关键。合并同类项的法则：把同类项的系数相加，所得结果作为系数，字母和字母的指数不变，据此计算即可。

【详解】 解： $5x^2 - 8x + 6 - 3x^2 + 6x - 3$
 $= (5x^2 - 3x^2) + (6x - 8x) + (6 - 3)$
 $= 2x^2 - 2x + 3$ ，

故答案为： $2x^2 - 2x + 3$ 。

11. 若单项式 $3x^{2+m}y^2$ 与 $-2x^5y^n$ 是同类项，则 $n^m =$ _____.

【答案】 8

【分析】 本题主要考查了同类项，解题的关键是熟记同类项的定义。利用同类项的定义求出 m ， n 的值，再代入求值即可。

【详解】 解： $\because$ 单项式 $3x^{2+m}y^2$ 与 $-2x^5y^n$ 是同类项，
 $\therefore 2+m=5, 2=n$ ，
 $\therefore m=3, n=2$ ，
 $\therefore n^m = 2^3 = 8$ ，

故答案为： 8。

12. 将整式 $3a^3 + ab^2 - 2a^2b - 4b^3$ 按字母 b 进行降幂排列： _____

【答案】 $-4b^3 + ab^2 - 2a^2b + 3a^3$

【分析】 本题主要考查了整式的排列问题，从左往右把原整式按照 b 的指数从大到小排列即可。

【详解】 解： 将整式 $3a^3 + ab^2 - 2a^2b - 4b^3$ 按字母 b 进行降幂排列为 $-4b^3 + ab^2 - 2a^2b + 3a^3$ ，
故答案为： $-4b^3 + ab^2 - 2a^2b + 3a^3$ 。

13. 已知一个整式与 $-x^2 + x - 3$ 的和等于 $3x^2 - 2x$ ，则这个整式是_____.

【答案】 $4x^2 - 3x + 3$

【分析】 本题考查整式的加减运算，根据这个整式 $= 3x^2 - 2x$ 与 $-x^2 + x - 3$ 的差，进行列式求解，即可解题。

【详解】 解： 这个整式是 $3x^2 - 2x - (-x^2 + x - 3) = 3x^2 - 2x + x^2 - x + 3 = 4x^2 - 3x + 3$ ，

故答案为: $4x^2 - 3x + 3$.

14. 若 $(x+2)(2x-n) = 2x^2 + mx + 2$, 则 $m+n$ 的值是_____.

【答案】4

【分析】本题考查了整式乘以整式, 将所给等式的左边展开, 然后与等式右边比较, 可得含有 m 和 n 的等式, 求出 m 、 n 的值即可得答案.

【详解】解: $\because (x+2)(2x-n) = 2x^2 + mx + 2$,

$$\therefore 2x^2 + (4-n)x - 2n = 2x^2 + mx + 2,$$

$$\therefore 4-n = m, \quad -2n = 2,$$

$$\therefore m = 5, \quad n = -1,$$

$$\therefore m+n = 5+(-1) = 4.$$

故答案为: 4.

15. 若 $a^m = 3$, $a^n = 4$, 则 $a^{2m+n} =$ _____.

【答案】36

【分析】本题主要考查幂的乘方与同底数幂的乘法的逆运算. 将 $a^m = 3$ 、 $a^n = 4$ 代入原式 $= a^{2m} \cdot a^n = (a^m)^2 \cdot a^n$, 计算可得.

【详解】解: 当 $a^m = 3$, $a^n = 4$ 时,

$$\text{原式} = a^{2m} \cdot a^n = (a^m)^2 \cdot a^n = 3^2 \times 4 = 36,$$

故答案为: 36.

16. 甲、乙两人共同计算一道整式: $(x+a)(2x+b)$, 由于甲抄错了 a 的符号, 得到的结果是 $2x^2 - 7x + 3$,

乙漏抄了第二个整式中 x 的系数, 得到的结果是 $x^2 + 2x - 3$. 则 $(-2a+b)(a+b)$ 的值为 _____.

【答案】-14

【分析】本题考查了整式乘以整式, 掌握运算法则是解题的关键.

先根据题意得出 $-2a+b = -7$, $a+b = 2$, 再整体代入求解.

【详解】解: 由题意得: $(x-a)(2x+b) = 2x^2 + (-2a+b)x - ab = 2x^2 - 7x + 3$

$$\therefore -2a+b = -7$$

$$\therefore (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab = x^2 + 2x - 3$$

$$\therefore a+b=2$$

$$\therefore (-2a+b)(a+b)=-7 \times 2=-14.$$

故答案为：-14.

17. 已知 $(x^2+mx+1)(x-n)$ 的展开式中不含 x 项， x^2 项的系数为-2，则 $mn+m-n$ 的值为_____.

【答案】 -1

【分析】 本题考查整式乘以整式不含某一项问题，先进行整式乘以整式的计算，再根据展开式中不含 x 项， x^2 项的系数为-2，得到 $m-n=-2, mn-1=0$ ，整体代入代数式计算即可.

【详解】 解： $(x^2+mx+1)(x-n)=x^3-nx^2+mx^2-mnx+x-n$
 $=x^3+(m-n)x^2-(mn-1)x-n,$

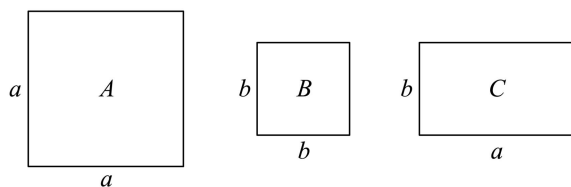
由题意，得： $m-n=-2, mn-1=0,$

$$\therefore mn=1,$$

$$\therefore mn+m-n=-2+1=-1;$$

故答案为：-1.

18. 有若干张如图所示的正方形A类、B类卡片和长方形C类卡片. 如果要拼成一个长为 $(2a+b)$ ，宽为 $(3a+2b)$ 的大长方形，那么需要C类卡片_____张.



【答案】 7

【分析】 本题考查了整式乘以整式，计算出长为 $(2a+b)$ ，宽为 $(3a+2b)$ 的大长方形的面积以及A类、B类卡片和长方形C类卡片的面积，即可得出答案.

【详解】 解： 长为 $(2a+b)$ ，宽为 $(3a+2b)$ 的大长方形的面积为
 $(2a+b)(3a+2b)=6a^2+4ab+3ab+2b^2=6a^2+7ab+2b^2,$

A类卡片的面积为： $a^2,$

B类卡片的面积为： $b^2,$

C类卡片的面积为： $ab,$

∴要拼成一个长为 $(2a+b)$ ，宽为 $(3a+2b)$ 的大长方形，需要6块A类卡片，2块B类卡片，7块C类卡片，故答案为：7.

三、解答题：(本大题共10题，共78分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.)

19. 计算：

(1) $2a^2 \cdot a^4 + (a^3)^2 - (3a^3)^2$;

(2) $(-x^3)^2 + x^2(-2x^2)^2$.

【答案】(1) $-6a^6$;

(2) $5x^6$.

【分析】本题考查了整式的混合运算，涉及到同底数幂的乘法，幂的乘方，积的乘方运算，关键是注意指数的变化，不能出错.

(1) 根据同底数幂的乘法，幂的乘方，积的乘方运算，再进行同类项合并，即可得到结果;

(2) 先进行幂的乘方运算，再合并同类项，即可得到结果.

【详解】(1) 解： $2a^2 \cdot a^4 + (a^3)^2 - (3a^3)^2$

$$= 2a^6 + a^6 - 9a^6$$

$$= -6a^6;$$

(2) 解： $(-x^3)^2 + x^2(-2x^2)^2$

$$= x^6 + x^2 \times 4x^4$$

$$= x^6 + 4x^6$$

$$= 5x^6.$$

20. 先去括号，再合并同类项：

(1) $(x+y-z) + (x-y+z) - (x-y-z)$;

(2) $(a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2)$;

(3) $3(2x^2 - y^2) - 2(3y^2 - 2x^2)$.

【答案】(1) $x+y+z$

(2) $4ab$

$$(3) 10x^2 - 9y^2$$

【分析】本题考查整式的加减，解答本题的关键是明确整式加减的计算方法.

(1) 先去括号，然后合并同类项即可；

(2) 先去括号，然后合并同类项即可；

(3) 根据乘法分配律先去掉括号，然后合并同类项即可.

【详解】(1) 解: $(x+y-z)+(x-y+z)-(x-y-z)$

$$= x+y-z+x-y+z-x+y+z$$

$$= x+y+z;$$

(2) 解: $(a^2+2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2)$

$$= a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2$$

$$= 4ab;$$

(3) 解: $3(2x^2-y^2)-2(3y^2-2x^2)$

$$= 6x^2-3y^2-6y^2+4x^2$$

$$= 10x^2-9y^2.$$

21. 计算:

(1) $3b^2 \cdot 5a \cdot (-2a^3)^2$;

(2) $-2x^2(x^4-3x^3-2)$;

(3) $(2x-y+1)(3+5x)$.

【答案】(1) $60a^7b^2$

(2) $-2x^6+6x^5+4x^2$

(3) $10x^2+11x-5xy-3y+3$

【分析】本题考查的是单项式乘以单项式，单项式乘以整式，整式乘以整式，掌握各自的运算法则是解本题的关键.

(1) 先计算积的乘方，再计算单项式乘以单项式即可；

(2) 直接利用单项式乘以整式的运算法则进行计算即可；

(3) 直接利用整式乘以整式的运算法则进行计算即可.

【详解】(1) 解: $3b^2 \cdot 5a \cdot (-2a^3)^2$

$$= 15ab^2 \cdot 4a^6$$

$$= 60a^7b^2;$$

(2) 解: $-2x^2(x^4 - 3x^3 - 2)$

$$= -2x^6 + 6x^5 + 4x^2;$$

(3) $(2x - y + 1)(3 + 5x)$

$$= 6x + 10x^2 - 3y - 5xy + 3 + 5x$$

$$= 10x^2 + 11x - 5xy - 3y + 3;$$

22. 先化简, 再求值: $3x(x-1) + (x+2)(2x-1)$, 其中 $x=1$.

【答案】 $5x^2 - 2$, 3

【分析】 本题考查整式的混合运算-化简求值, 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

原式利用整式乘以整式, 单项式乘以整式, 去括号合并得到最简结果, 把 x 的值代入计算即可求出值.

【详解】 解: 原式 $= 3x^2 - 3x + 2x^2 + 3x - 2$

$$= 5x^2 - 2,$$

当 $x=1$ 时, 原式 $= 3$.

23. 已知 $-5x^2y^{m+1} + xy^2 - 3x^3 - 6$ 是六次四项式, 且 $3x^{2n}y^{5-m}$ 的次数与它相同.

(1) 求 m 、 n 的值;

(2) 请写出整式的各项, 并求出各项的系数和.

【答案】 (1) $m=3$, $n=2$

(2) 整式的各项为: $-5x^2y^4$, xy^2 , $-3x^3$, -6 ; 各项的系数和为 -13

【分析】 (1) 用整式的次数, 单项式的次数分别列方程求解即可;

(2) 由 (1) 得到 m 的值, 代入计算得到该整式的各项及各项系数, 再把系数求和即可.

【详解】 (1) 解: $\because -5x^2y^{m+1} + xy^2 - 3x^3 - 6$ 是六次四项式,

$$\therefore 2 + m + 1 = 6,$$

解得 $m=3$,

$\therefore 3x^{2n}y^{5-m}$ 的次数也是六次,

$$\therefore 2n + 5 - m = 6,$$

$$\therefore n = 2,$$

$$\therefore m = 3, \quad n = 2;$$

(2) 解: 该整式为 $-5x^2y^4 + xy^2 - 3x^3 - 6$,

整式的各项为: $-5x^2y^4$, xy^2 , $-3x^3$, -6 ,

各项的系数和为: $(-5) + 1 + (-3) + (-6) = -13$.

【点睛】本题考查了整式的次数和系数的概念, 单项式的次数的概念, 一元一次方程的应用, 理解基础概念是解题关键.

24. 形如 $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ 的式子叫做二阶行列式, 它的运算法则用公式表示为 $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$, 比如:

$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 1 \times 5 = 1$. 请你按照上述法则, 计算 $\begin{vmatrix} -2ab & a^2b \\ -3ab^2 & (-ab) \end{vmatrix}$ 的结果.

【答案】 $2a^2b^2 + 3a^3b^3$

【分析】本题考查定义新运算, 整式的运算, 根据新运算的法则, 列出代数式, 进行计算即可.

【详解】解: $\begin{vmatrix} -2ab & a^2b \\ -3ab^2 & (-ab) \end{vmatrix} = -2ab \cdot (-ab) - a^2b \cdot (-3ab^2) = 2a^2b^2 + 3a^3b^3$.

25. 已知代数式 $A = 3x - 5y$, $B = -x + 8y - 6$, $C = x^2 - \frac{m}{3}x$, $D = nx^2 + x - 3$.

(1) 求 $2(A+B) - 3(A-B)$ 的值; (结果用 x, y 表示)

(2) 若 $3C + D$ 的值与 x 的取值无关, 求 $m^2 + n^2$ 的值.

【答案】 (1) $-8x + 45y - 30$

(2) 10

【分析】本题考查了整式的加减混合运算, 掌握运算法则和运算顺序是解题的关键.

(1) 把 A, B 代入, 然后去括号合并解题即可;

(2) 把 C, D 代入去括号合并, 然后根据与 x 无关的条件得到 $3 + n = 0$, $1 - m = 0$, 求出 m, n 的值, 然后再代入解题即可.

【详解】(1) 解: $2(A+B) - 3(A-B)$

$$= 2A + 2B - 3A + 3B$$

$$= -A + 5B$$

$$= -(3x - 5y) + 5(-x + 8y - 6)$$

$$= -3x + 5y - 5x + 40y - 30$$

$$= -8x + 45y - 30;$$

$$(2) \text{ 解: } 3C + D = 3\left(x^2 - \frac{m}{3}x\right) + (nx^2 + x - 3)$$

$$= 3x^2 - mx + nx^2 + x - 3$$

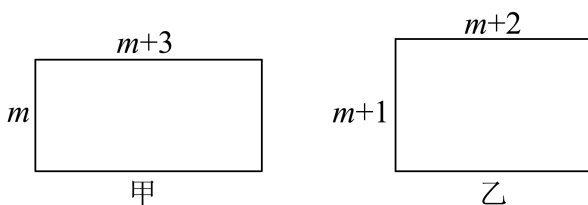
$$= (3 + n)x^2 + (1 - m)x - 3$$

由题可知: $3 + n = 0$, $1 - m = 0$,

解得 $n = -3$, $m = 1$;

所以 $m^2 + n^2 = (-3)^2 + 1^2 = 10$.

26. 甲、乙两个长方形, 其边长如图所示($m > 0$), 其面积分别为 S_1, S_2 .



(1) 用含 m 的代数式表示: $S_1 =$ _____, $S_2 =$ _____; (结果化为最简)

(2) S_1 _____ S_2 (选填“<”“>”或“=”);

(3) ①求甲、乙两个长方形的周长之和;

②若一个正方形的周长等于甲、乙两个长方形的周长之和, 正方形的面积为 S_3 , 若 $m = 1$, 求 $S_3 - S_2$ 的值.

【答案】 (1) $m^2 + 3m$; $m^2 + 3m + 2$

(2) <

(3) ① $8m + 12$; ② 19

【分析】 本题考查了列代数式、整式乘整式, 整式的四则混合运算, 长方形和正方形的面积, 熟练掌握运算法则是解题的关键.

(1) 根据长方形的面积公式列式, 并整理即可求解;

(2) 利用作差法比较两个式子大小即可求解;

(3) ①根据长方形的周长公式列式即可求解; ②结合①计算出 $S_3 - S_2$, 再把 m 的值代入即可求解.

【详解】 (1) 解: $S_1 = m(m + 3) = m^2 + 3m$, $S_2 = (m + 1)(m + 2) = m^2 + 3m + 2$

故答案为: $m^2 + 3m$, $m^2 + 3m + 2$.

(2) 解: $\because S_2 - S_1 = m^2 + 3m + 2 - m^2 - 3m = 2 > 0$,

$\therefore S_2 > S_1$,

故答案是: $<$.

(3) 解: ①周长之和: $(m + m + 3) \times 2 + (m + 1 + m + 2) \times 2 = 8m + 12$,

②正方形的边长为: $(8m + 12) \div 4 = 2m + 3$,

当 $m = 1$ 时,

$S_3 - S_2 = (2m + 3)^2 - (m^2 + 3m + 2) = 25 - (1 + 3 + 2) = 19$.

27. 阅读下面的材料: 我们知道, 一般的数学公式、法则、定义可以正向运用, 也可以逆向运用. 例如, “同底数幂的乘法”“幂的乘方”“积的乘方”这几个法则的逆向运用表现为: $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$, $a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m$, 如下列探究:

探究一: 比较 2^{15} 与 3^{12} 的大小.

解: 因为 $2^{15} = (2^5)^3 = 32^3$, $3^{12} = (3^4)^3 = 81^3$,

又因为 $32 < 81$, 所以 $32^3 < 81^3$, 所以 $2^{15} < 3^{12}$.

小结: 指数相同的情况下, 通过比较底数的大小, 来确定两个幂的大小.

探究二: 比较 2^8 和 8^2 的大小.

解: 因为 $8^2 = (2^3)^2 = 2^6$, 且 $8 > 6$, 所以 $2^8 > 2^6$, 即 $2^8 > 8^2$,

小结: 底数相同的情况下, 通过比较指数的大小, 来确定两个幂的大小.

解决下列问题:

(1) 比较 2^{44} , 4^{22} 的大小;

(2) 比较 7^{24} , 4^{36} , 3^{48} , 2^{60} 的大小;

(3) 比较 $3^{12} \times 5^{10}$ 与 $3^{10} \times 5^{12}$ 的大小.

【答案】 (1) $2^{44} = 4^{22}$

(2) $3^{48} > 4^{36} > 7^{24} > 2^{60}$

(3) $3^{10} \times 5^{12} > 3^{12} \times 5^{10}$

【分析】 本题考查了幂的运算, 掌握幂的性质是解题的关键.

(1) 仿照探究二比较即可;

(2) 仿照探究一比较即可;

(3) 利用积的乘方的逆运算转化, 进而比较即可;

【详解】(1) 解: $\because 2^{44} = (2^4)^{11} = 16^{11}$, $4^{22} = (4^2)^{11} = 16^{11}$,

$$\therefore 2^{44} = 4^{22};$$

(2) 解: $\because 7^{24} = (7^2)^{12} = 49^{12}$, $4^{36} = (4^3)^{12} = 64^{12}$, $3^{48} = (3^4)^{12} = 81^{12}$, $2^{60} = (2^5)^{12} = 32^{12}$,

$$\text{又} \because 81 > 64 > 49 > 32,$$

$$\therefore 81^{12} > 64^{12} > 49^{12} > 32^{12},$$

$$\therefore 3^{48} > 4^{36} > 7^{24} > 2^{60};$$

(3) 解: $\because 3^{12} \times 5^{10} = (3 \times 5)^{10} \times 3^2$, $3^{10} \times 5^{12} = (3 \times 5)^{10} \times 5^2$,

$$\text{又} \because 5^2 > 3^2,$$

$$\therefore 3^{10} \times 5^{12} > 3^{12} \times 5^{10}.$$

28. 对于关于 x 的四个整式 $A = x + a, B = x + b, C = x + c, D = x + d$ (a, b, c, d 是常数), 任意两个整式的积与另外两个整式的积的差, 若其中一种组合得到结果为常数 n , 称这种组合为消元组合, 常数 n 是这种组合的消元余量.

例如: 对于整式 $A = x + 1, B = x + 2, C = x + 3, D = x + 4$,

$$\text{因为 } A \times D - B \times C = (x + 1)(x + 4) - (x + 2)(x + 3) = -2$$

所以 $A \times D - C \times B$ 这种组合为消元组合, 其消元余量为 -2 .

因为 $A \times B - C \times D = (x + 1)(x + 2) - (x + 3)(x + 4) = -4x - 10$, 结果不是常数;

所以 $A \times B - C \times D$ 这种组合不是消元组合.

(1) 若整式 $A = x + 1, B = x + 4, C = x + 8, D = x + 5$, 判断 $A \times C - B \times D$ 是否为消元组合, 若是, 请求出消元余量, 若不是, 请说明理由.

(2) 若整式 $A = x + 1, B = x - 2, C = x + 5, D = x + p$ 存在消元组合, 则 p 的值为_____.

(3) 若整式 $A = 2x + 1, B = x + 4, C = 2x + a, D = x + b$ 存在消元组合, 求 a 与 b 的关系式.

【答案】(1) 是消元组合, 消元余量为 -12 .

(2) -6 或 8 或 2

(3) $a = 9 - 2b$ 或 $a = 2b - 7$

【分析】本题考查整式乘整式的应用, 理解题中定义, 熟练掌握整式乘法运算法则是解答的关键.

(1) 先求得 $A \times C - B \times D$ 结果, 再根据题中定义可作出判断;

(2) 分三种情况 $A \times B - C \times D$, $A \times C - B \times D$, $A \times D - B \times C$ 求解即可;

(3) 分三种情况 $A \times B - C \times D$, $A \times C - B \times D$, $A \times D - B \times C$ 求解即可.

【详解】(1) 解：由题意，

$$A \times C - B \times D$$

$$= (x+1)(x+8) - (x+4)(x+5)$$

$$= x^2 + 8x + x + 8 - (x^2 + 5x + 4x + 20)$$

$$= x^2 + 8x + x + 8 - x^2 - 5x - 4x - 20$$

$$= -12,$$

结果是常数，

$\therefore A \times C - B \times D$ 这种组合为消元组合，其消元余量为 -12 。

(2) 解：分三种情况：

若组合 $A \times B - C \times D$ 是消元组合，

$$\therefore A \times B - C \times D$$

$$= (x+1)(x-2) - (x+5)(x+p)$$

$$= x^2 - 2x + x - 2 - (x^2 + px + 5x + 5p)$$

$$= x^2 - 2x + x - 2 - x^2 - px - 5x - 5p$$

$$= (-6-p)x - 2 - 5p,$$

$$\therefore -6-p=0, \text{ 解得 } p=-6;$$

若组合 $A \times C - B \times D$ 是消元组合，

$$\therefore A \times C - B \times D$$

$$= (x+1)(x+5) - (x-2)(x+p)$$

$$= x^2 + 5x + x + 5 - (x^2 + px - 2x - 2p)$$

$$= x^2 + 5x + x + 5 - x^2 - px + 2x + 2p$$

$$= (8-p)x + 5 + 2p,$$

$$\therefore 8-p=0, \text{ 解得 } p=8;$$

若组合 $A \times D - B \times C$ 是消元组合，

$$\therefore A \times D - B \times C$$

$$= (x+1)(x+p) - (x-2)(x+5)$$

$$=x^2+px+x+p-(x^2+5x-2x-10)$$

$$=x^2+px+x+p-x^2-5x+2x+10$$

$$=(p-2)x+p+10,$$

$$\therefore p-2=0, \text{ 解得 } p=2;$$

综上, p 的值为 -6 或 8 或 2 ;

(3) 解: 分三种情况:

$$\textcircled{1} A \times B - C \times D$$

$$=(2x+1)(x+4)-(2x+a)(x+b)$$

$$=2x^2+8x+x+4-(2x^2+2bx+ax+ab)$$

$$=2x^2+8x+x+4-2x^2-2bx-ax-ab$$

$$=(9-2b-a)x+4-ab,$$

若组合 $A \times B - C \times D$ 是消元组合,

$$\text{则 } 9-2b-a=0, \text{ 解得 } a=9-2b;$$

若组合 $A \times C - B \times D$ 是消元组合,

$$\textcircled{2} A \times C - B \times D$$

$$=(2x+1)(2x+a)-(x+4)(x+b)$$

$$=4x^2+2ax+2x+a-(x^2+bx+4x+4b)$$

$$=4x^2+2ax+2x+a-x^2-bx-4x-4b$$

$$=3x^2+(2a-b-2)x+a-4b, \text{ 不可能为常数,}$$

$\therefore$ 组合 $A \times C - B \times D$ 不是消元组合;

$$\textcircled{3} A \times D - B \times C$$

$$=(2x+1)(x+b)-(x+4)(2x+a)$$

$$=2x^2+2bx+x+b-(2x^2+ax+8x+4a)$$

$$=2x^2+2bx+x+b-2x^2-ax-8x-4a$$

$$=(2b-a-7)x+b-4a,$$

若组合 $A \times D - B \times C$ 是消元组合,

则 $2b - a - 7 = 0$ ，解得 $a = 2b - 7$ ；

综上， a 与 b 的关系式为 $a = 9 - 2b$ 或 $a = 2b - 7$ 。