

2025 学年第一学期七年级融合班

数学学科作业节点检测

(考试时间: 90 分钟 总分: 100 分)

一、选择题 (本大题共 6 题, 每小题 3 分, 满分 18 分)

1. 代数式①2, ② $3+x$, ③ $-\frac{1}{2}a^2$, ④ x^3y^4 , ⑤ a^2+b^2 , ⑥ $\frac{2}{a}$ 中, 单项式的个数 ()

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了单项式的定义, 解题的关键在于熟知表示数或字母的积的式子叫做单项式, 单独的一个数或一个字母也是单项式. 根据单项式的定义判断即可.

【详解】解: 单项式有 2, $-\frac{1}{2}a^2$, x^3y^4 , 因此有 3 个,

故选: B.

2. 下列说法正确的是 ()

A. $\frac{1}{2}a^2b$ 是二次单项式

B. a^3+a^2 是五次二项式

C. a^2+a-1 的常数项是 1

D. $-\frac{a^3b^2c}{5}$ 的系数是 $-\frac{1}{5}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据单项式和多项式的相关概念判断各个选项即可.

【详解】A: $\frac{1}{2}a^2b$ 是三次单项式, 故 A 选项不符合题意;

B: a^3+a^2 是三次二项式, 故 B 选项不符合题意;

C: a^2+a-1 的常数项是 -1 , 故 C 选项不符合题意;

D: $-\frac{a^3b^2c}{5}$ 的系数是 $-\frac{1}{5}$, 故 D 选项符合题意;

故选: D

【点睛】 本题考查了单项式、多项式，熟练掌握单项式和多项式的相关概念是解题的关键.

3. 已知 $7a^3b^m \div 14a^n b^2 = \frac{1}{2}b^2$ 那么 m 、 n 的取值依次为 ()

A. 2, 3

B. 4, 3

C. 1, 3

D. 4, 1

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了整式的除法. 依据整式的除法法则得到 $3-n=0$, $m-2=2$, 即可求出 m , n .

【详解】 解: $\because 7a^3b^m \div 14a^n b^2 = \frac{1}{2}b^2$,

$$\therefore 7a^3b^m \div 14a^n b^2 = \frac{1}{2}a^{3-n}b^{m+2} = \frac{1}{2}b^2,$$

$$\therefore 3-n=0, \quad m-2=2,$$

解方程组得 $m=4$, $n=3$.

故选: B.

4. 下列整式的乘法中, 不能用平方差公式计算的是 ()

A. $(x+y)(x-y)$

B. $(x+y)(-x+y)$

C. $(-x+y)(x-y)$

D. $(-x+y)(-x-y)$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题主要考查了平方差公式, 熟知平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 是解题的关键.

根据平方差公式逐项分析即可.

【详解】 解: A、 $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$, 能用平方差公式计算, 故不符合题意;

B、 $(x+y)(-x+y)=(y+x)(y-x)=y^2-x^2$, 能用平方差公式计算, 故不符合题意;

C、 $(-x+y)(x-y)=-(x-y)(x-y)$, 不符合平方差公式结构特征, 不能用平方差公式计算, 故符合题意;

D、 $(-x+y)(-x-y)=(-x)^2-y^2$, 能用平方差公式计算, 故不符合题意;

故选: C.

5. 若 $x^2+kx+16$ 能分解成两个一次因式的积, 且 k 为整数, 那么 k 不可能是 ()

A. 10

B. 17

C. 15

D. 8

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了十字相乘法分解因式. 把 16 分解为两个整数的积的形式, k 等于这两个整数的和.

【详解】解: $16 = 1 \times 16 = 2 \times 8 = 4 \times 4 = (-1) \times (-16) = (-2) \times (-8) = (-4) \times (-4)$,

所以 $k = 1 + 16 = 17$ 或 $2 + 8 = 10$ 或 $4 + 4 = 8$ 或 $(-1) + (-16) = -17$ 或 $(-2) + (-8) = -10$ 或

$(-4) + (-4) = -8$.

$\therefore$ 整数 k 的值是 ± 8 或 ± 10 或 ± 17 ,

观察四个选项, C 选项符合题意.

故选: C.

6. 我国北宋数学家贾宪在 1050 年左右首次发现了一个奇妙的“三角形”, 这个“三角形”被称为贾宪三角形, 这个“三角形”第 1 行有 1 个数, 第 2 行有 2 个数……第 n 行有 n 个数, 不仅如此, 这个“三角形”

第 $n+1$ 行中的数竟与 $(a+b)^n$ (n 是正整数) 展开式各项的系数完全吻合, 如下图所示:

$$\begin{array}{cccccccc} (a+b)^0 & \cdots & \cdots & \cdots & & & & 1 \\ (a+b)^1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & & 1 \\ (a+b)^2 & \cdots & \cdots & & 1 & 2 & 1 & \cdots \\ (a+b)^3 & \cdots & \cdots & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ (a+b)^4 & \cdots & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ (a+b)^5 & \cdots & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ & \cdots & & & & & & \end{array}$$

根据“贾宪三角形”请计算 $(a+b)^8$ 的展开式中从左起第五项的系数为 ()

A. 84

B. 56

C. 28

D. 70

【答案】D

【解析】

【分析】此题考查了数字变化规律, 通过观察、分析、归纳发现其中的规律, 并应用发现的规律解决问题的能力. 据图形中的规律即可求出 $(a+b)^8$ 的展开式中从左起第五项的系数.

【详解】解: 找规律发现 $(a+b)^4$ 的第三项系数为 1;

$(a+b)^5$ 的第三项系数为 $5 = 4 + 1$;

$(a+b)^6$ 的第三项系数为 $15 = 10 + 5$;

$(a+b)^7$ 的第三项系数为 $35 = 20 + 15$;

$\therefore (a+b)^8$ 第三项系数为 $35+35=70$.

故选: D

二、填空题 (本大题共 12 题, 每小题 2 分, 满分 24 分)

7. 用代数式表示: a 与 b 平方的差是__.

【答案】 $a-b^2-b^2+a$

【解析】

【分析】 本题考查列代数式, 要明确给出文字语言中的运算关系, 先求平方, 然后求差.

【详解】 解: b 平方为 b^2 , a 与 b 平方的差是 $a-b^2$,

故答案为: $a-b^2$.

【点睛】 本题考查了列代数式的知识, 列代数式的关键是正确理解文字语言中的关键词, 比如该题中的“倍”、“差”等, 从而明确其中的运算关系, 正确地列出代数式.

8. 整式 $5xy+xy^2+9x^2y^3-6xy-4$ 是_____次_____项式.

【答案】 ①. 五 ②. 四

【解析】

【分析】 本题主要考查了多项式的定义, 合并同类项. 根据多项式的项, 次的定义解答即可.

【详解】 解: 多项式 $5xy+xy^2+9x^2y^3-6xy-4=9x^2y^3+xy^2-xy-4$ 是五次四项式.

故答案为: 五, 四.

9. 把多项式 $3xy^2-2x^2y+4y^3-x^3$ 按 x 的降幂排列_____.

【答案】 $-x^3-2x^2y+3xy^2+4y^3$

【解析】

【分析】 根据多项式降幂排列法则, 即可求解.

【详解】 解: 把多项式 $3xy^2-2x^2y+4y^3-x^3$ 按 x 的降幂排列为 $-x^3-2x^2y+3xy^2+4y^3$.

故答案为: $-x^3-2x^2y+3xy^2+4y^3$

【点睛】 本题主要考查了多项式升幂排列或降幂排列, 熟练掌握按照某个字母的升幂 (或降幂) 排列是指按照该字母从低次幂到高次幂 (从高次幂到低次幂) 排列, 不含该字母则是该字母的 0 次幂是解题的关键.

10. 定义 $a-b=0$, 则称 a 、 b 互容, 若 $2x^2-2$ 与 $x+4$ 互容, 则 $6x^2-3x-9=_____$.

【答案】 9

【解析】

【分析】依题意，可得 $2x^2 - 2 - (x + 4) = 0$ ，得出 $2x^2 - x = 6$ ，代入代数式即可求解.

【详解】解： $\because 2x^2 - 2$ 与 $x + 4$ 互容，

$$\therefore 2x^2 - 2 - (x + 4) = 0,$$

$$\text{即 } 2x^2 - 2 - x - 4 = 0,$$

$$\therefore 2x^2 - x = 6,$$

$$\therefore 6x^2 - 3x - 9 = 3(2x^2 - x) - 9 = 3 \times 6 - 9 = 9,$$

故答案为： 9.

【点睛】本题考查了代数式求值，得出 $2x^2 - x = 6$ 是解题的关键.

11. 分解因式： $2a^3 - 4a^2b + 2ab^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $2a(a - b)^2$

【解析】

【分析】先提取公因式，然后利用完全平方公式因式分解即可.

【详解】解：原式 $= 2a(a^2 - 2ab + b^2) = 2a(a - b)^2$

故答案为： $2a(a - b)^2$

【点睛】此题考查的是因式分解，掌握用提公因式法和完全平方公式因式分解是解决此题的关键.

12. 分解因式： $4(x + 2y)^2 - (5x - 2y)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $3(7x + 2y)(2y - x)$

【解析】

【分析】本题考查了因式分解，熟记灵活运用这些方法是解题关键. 根据提公因式法和平方差公式分解即可.

【详解】解： $4(x + 2y)^2 - (5x - 2y)^2$

$$= (2x + 4y)^2 - (5x - 2y)^2$$

$$= [(2x + 4y) + (5x - 2y)][(2x + 4y) - (5x - 2y)]$$

$$= (7x+2y)(6y-3x)$$

$$= 3(7x+2y)(2y-x),$$

故答案为: $3(7x+2y)(2y-x)$.

13. 若 $x - \frac{1}{x} = 3$, 则 $x^4 + \frac{1}{x^4} =$ _____.

【答案】 119

【解析】

【分析】 本题考查了完全平方公式的应用, 通过将 $x - \frac{1}{x} = 3$ 两边同时平方, 利用完全平方公式得到 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 的值, 再将 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 看作一个整体, 再次利用完全平方公式求出 $x^4 + \frac{1}{x^4}$ 的值即可.

【详解】 解: $\because x - \frac{1}{x} = 3$,

$$\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 = 3^2 + 2 = 11,$$

$$\therefore x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = 11^2 - 2 = 119.$$

故答案为: 119.

14. 已知二项式 A 和单项式 B 满足 $A^2 = x^2 + B + 1$, 那么 $B =$ _____.

【答案】 $\pm 2x, \frac{1}{4}x^4$

【解析】

【分析】 本题考查了完全平方, 根据平方项确定出这两个数是解题的关键. 完全平方: $a^2 \pm 2ab + b^2$ 的特点是首平方, 尾平方, 首尾底数积的两倍在中央, 据此求解即可.

【详解】 解: $\because A$ 是二项式,

$\therefore A^2$ 是一个二项式的完全平方,

$\therefore x^2 + B + 1$ 可以写成一个二项式的完全平方,

$$\therefore B = \pm 2x, \frac{1}{4}x^4.$$

故答案为: $\pm 2x, \frac{1}{4}x^4$.

15. 已知 $(x^2 + mx + 1)(x - n)$ 的展开式中不含 x 项, x^2 项的系数为 -2 , 则 $mn + m - n$ 的值为 _____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题考查多项式乘以多项式不含某一项问题，先进行多项式乘以多项式的计算，再根据展开式中不含 x 项， x^2 项的系数为 -2 ，得到 $m-n=-2, mn-1=0$ ，整体代入代数式计算即可.

【详解】 解： $(x^2 + mx + 1)(x - n) = x^3 - nx^2 + mx^2 - mnx + x - n$
 $= x^3 + (m - n)x^2 - (mn - 1)x - n$,

由题意，得： $m - n = -2, mn - 1 = 0$,

$\therefore mn = 1$,

$\therefore mn + m - n = -2 + 1 = -1$;

故答案为： -1.

16. 已知： $(x+2)^{|x|-2} = 1$ ，则 x 的值是_____.

【答案】 -1 或 2

【解析】

【分析】 本题考查零指数幂的性质和有理数的乘方运算，正确分类讨论是解题的关键.

利用 -1 的偶次幂等于 1 ， 1 的任意次幂等于 1 ，任意非零数的零次幂等于 1 ，分别列出方程，进一步可求出 x 的值.

【详解】 解： $\because (x+2)^{|x|-2} = 1$,

$\therefore x+2 = -1$ 或 $x+2 = 1$ 或 $|x|-2 = 0$,

当 $x+2 = -1$ 时，即 $x = -3$ ，此时 $(x+2)^{|x|-2} = (-1)^1 = -1 \neq 1$ ，故舍去；

当 $x+2 = 1$ 时，即 $x = -1$ ，此时 $(x+2)^{|x|-2} = 1^{-1} = 1$ ，满足等式；

当 $|x|-2 = 0$ 时，即 $x = \pm 2$ ，

$x = 2$ 时， $(x+2)^{|x|-2} = 4^0 = 1$ ，满足等式；

$x = -2$ 时， $(x+2)^{|x|-2} = 0^0$ ，无意义，不满足等式；

$\therefore x$ 的值为： -1 或 2.

故答案为： -1 或 2.

17. 已知 $k^a = 4$ ， $k^b = 6$ ， $k^c = 9$ ， $2^{b+c} \cdot 3^{b+c} = 6^{a-2}$ ，则 $9^a \div 27^b =$ _____.

【答案】9

【解析】

【分析】根据 $k^a = 4$ ， $k^b = 6$ ， $k^c = 9$ ，得到 $a + c = 2b$ ①，再根据 $2^{b+c} \cdot 3^{b+c} = 6^{a-2}$ ，得到 $b + c = a - 2$ ②，联立①②得到 $2a - 3b = 2$ ，然后利用幂的乘方将代数式变形，即可计算求值.

【详解】解：∵ $k^a = 4$ ， $k^b = 6$ ， $k^c = 9$ ，

$$\therefore k^a \cdot k^c = k^b \cdot k^b,$$

$$\therefore k^{a+c} = k^{2b},$$

$$\therefore a + c = 2b \text{①},$$

$$\therefore 2^{b+c} \cdot 3^{b+c} = 6^{a-2},$$

$$\therefore (2 \times 3)^{b+c} = 6^{a-2},$$

$$\therefore b + c = a - 2 \text{②},$$

$$\text{联立①②得: } \begin{cases} a + c = 2b \\ b + c = a - 2 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} c = 2b - a \\ c = a - 2 - b \end{cases},$$

$$\therefore 2b - a = a - 2 - b$$

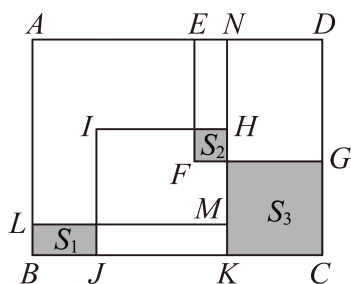
$$\therefore 2a - 3b = 2,$$

$$\therefore 9^a \div 27^b = (3^2)^a \div (3^3)^b = 3^{2a} \div 3^{3b} = 3^{2a-3b} = 3^2 = 9,$$

故答案为：9.

【点睛】本题主要考查了考查了同底数幂相乘，积的乘方的逆用，幂的乘方，同底数幂相除，熟练掌握相关运算法则是解题关键.

18. 如图，在长方形 $ABCD$ 中放入一个边长为 8 的正方形 $ALMN$ 和两个边长为 6 的正方形 $DEFG$ 、 $HJKL$ ．若阴影部分的面积满足 $2S_3 + S_1 - S_2 = 2$ ，则长方形 $ABCD$ 的面积为_____.



【答案】 90

【解析】

【分析】 本题考查了多项式乘以多项式与几何图形，根据所给图形，数形结合，正确表示出相关图形的长度和面积，是解题的关键.

设长方形 $ABCD$ 的长为 a ，宽为 b ，则由已知及图形可得 S_1 ， S_2 ， S_3 的长、宽及面积如何表示，根据

$2S_3 + S_1 - S_2 = 2$ ，可整体求得 ab 的值，即长方形 $ABCD$ 的面积.

【详解】 解：设长方形 $ABCD$ 的长为 a ，宽为 b ，则由已知及图形可得：

S_1 的长为： $8 - 6 = 2$ ，宽为： $b - 8$ ，故 $S_1 = 2(b - 8)$

S_2 的长为： $8 + 6 - a = 14 - a$ ，宽为： $6 + 6 - b = 12 - b$ ，故 $S_2 = (14 - a)(12 - b)$ ；

S_3 的长为： $a - 8$ ，宽为： $b - 6$ ，故 $S_3 = (a - 8)(b - 6)$.

$$\therefore 2S_3 + S_1 - S_2 = 2,$$

$$\therefore 2(a - 8)(b - 6) + 2(b - 8) - (14 - a)(12 - b) = 2$$

解得 $ab = 90$

故答案为： 90.

三、简答题（本大题共 5 题，每小题 5 分，满分 25 分）

19. 计算： $(-3a^m)^2 - a^{m+1} \cdot a^{m-1} + 2(a^{m+1})^2 \div a^2$.

【答案】 $10a^{2m}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了幂的混合运算，解题的关键是熟练掌握幂的乘方，积的乘方，同底数幂乘法运算法则. 根据幂的乘方，积的乘方，同底数幂乘法运算法则进行计算即可.

【详解】 解： $(-3a^m)^2 - a^{m+1} \cdot a^{m-1} + 2(a^{m+1})^2 \div a^2$

$$= 9a^{2m} - a^{2m} + 2a^{2m+2} \div a^2$$

$$= 9a^{2m} - a^{2m} + 2a^{2m}$$

$$= 10a^{2m}.$$

20. 计算: $(x-2y+3)(x+2y-3) - (3+x-2y)(2y-x-3).$

【答案】 $2x^2 + 6x - 4xy$

【解析】

【分析】 本题考查了平方差公式与完全平方公式的运用, 以及整式的混合运算, 解决本题的关键是对式子进行合理变形.

将 $(x-2y+3)(x+2y-3)$ 变形为 $[x-(2y-3)][x+(2y-3)]$, 可由平方差公式进行计算; 再将 $(3+x-2y)(2y-x-3)$ 变形为 $(x-2y+3)[- (x-2y+3)]$, 可由完全平方公式进行计算, 由此可得.

【详解】 解: $(x-2y+3)(x+2y-3) - (3+x-2y)(2y-x-3)$

$$= [x-(2y-3)][x+(2y-3)] - (x-2y+3)[- (x-2y+3)]$$

$$= [x-(2y-3)][x+(2y-3)] + (x-2y+3)^2$$

$$= x^2 - (2y-3)^2 + [x-(2y-3)]^2$$

$$= x^2 - (4y^2 - 12y + 9) + x^2 - 2x(2y-3) + (2y-3)^2$$

$$= x^2 - 4y^2 + 12y - 9 + x^2 - 4xy + 6x + 4y^2 - 12y + 9$$

$$= 2x^2 + 6x - 4xy.$$

21. 计算: $x^2y^3 \left(\frac{4}{3}x^3y - 6x^2y^3 + 3xy^4 \right) \div \left(-\frac{1}{3}xy \right)^3.$

【答案】 $-36x^2y + 162xy^3 - 81y^4$

【解析】

【分析】 此题考查了整式的混合运算. 先计算单项式乘以多项式和积的乘方, 再计算多项式除以单项式即可.

【详解】 解: $x^2y^3 \left(\frac{4}{3}x^3y - 6x^2y^3 + 3xy^4 \right) \div \left(-\frac{1}{3}xy \right)^3$

$$\begin{aligned}
&= \left(x^2 y^3 \cdot \frac{4}{3} x^3 y - x^2 y^3 \cdot 6x^2 y^3 + x^2 y^3 \cdot 3xy^4 \right) \div \left(-\frac{1}{27} x^3 y^3 \right) \\
&= \left(\frac{4}{3} x^5 y^4 - 6x^4 y^6 + 3x^3 y^7 \right) \div \left(-\frac{1}{27} x^3 y^3 \right) \\
&= \frac{4}{3} x^5 y^4 \div \left(-\frac{1}{27} x^3 y^3 \right) - 6x^4 y^6 \div \left(-\frac{1}{27} x^3 y^3 \right) + 3x^3 y^7 \div \left(-\frac{1}{27} x^3 y^3 \right) \\
&= -36x^2 y + 162xy^3 - 81y^4
\end{aligned}$$

22. 分解因式: $(x^2 - 5x)^2 - 12(x^2 - 5x) + 36$.

【答案】 $(x-6)^2(x+1)^2$

【解析】

【分析】 本题考查因式分解, 解题的关键是运用换元法和完全平方公式进行因式分解.

把 $x^2 - 5x$ 看成一个整体, 利用完全平方公式进行第一次因式分解, 然后对分解后得到的式子继续用十字相乘法分解.

【详解】 解: 令 $t = x^2 - 5x$, 则原式变为 $t^2 - 12t + 36$,

根据完全平方公式 $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$, 这里 $a = t, b = 6$,

则 $t^2 - 12t + 36 = (t-6)^2$,

把 $t = x^2 - 5x$ 代后, 得到 $(x^2 - 5x - 6)^2$,

$$(x^2 - 5x - 6)^2 = (x-6)^2(x+1)^2,$$

因此 $(x^2 - 5x)^2 - 12(x^2 - 5x) + 36 = (x-6)^2(x+1)^2$.

23. 因式分解: $(x+y)(x+y+2xy) + (xy+1)(xy-1)$.

【答案】 $(x+1)(y+1)(x+y+xy-1)$.

【解析】

【分析】 本题主要考查了因式分解, 先根据整式的乘法运算把原式化为 $(x+y)^2 + 2xy(x+y) + x^2y^2 - 1$, 再由完全平方公式和平方差公式, 即可求解, 掌握知识点的应用是解题的关键.

【详解】 解: $(x+y)(x+y+2xy) + (xy+1)(xy-1)$

$$\begin{aligned}
&= (x+y)[(x+y)+2xy] + (xy+1)(xy-1) \\
&= (x+y)^2 + 2xy(x+y) + x^2y^2 - 1 \\
&= (x+y+xy)^2 - 1^2 \\
&= (x+y+xy+1)(x+y+xy-1) \\
&= (x+1)(y+1)(x+y+xy-1).
\end{aligned}$$

四、解答题（本大题共 4 题，第 24、25 题每题 8 分，第 26 题 9 分，第 27 题 8 分，满分 33 分）

24. 已知整式 A , B , C , $A+B=2C$, 整式 $A=x^2-3xy+2y^2$, $C=x^2+0.5xy-2y^2$.

(1) 求整式 B ;

(2) 若 x, y 满足 $2x^2+9y^2-4x+6y+3=0$, 求整式 B 的值.

【答案】(1) $B=x^2+4xy-6y^2$

(2) -1

【解析】

【分析】本题考查整式的运算，配方法的应用以及非负数的性质，解题的关键思路是通过已知等式，将 B 用 A 和 C 表示出来，然后代入 A 与 C 的表达式，再进行整式的化简运算

(1) 根据 $B=2C-A$, 根据整式的运算法则求解即可;

(2) 先对 $2x^2+9y^2-4x+6y+3=0$ 进行配方，根据非负性可求解 x 和 y 的值，代入整式 B 中即可得.

【小问 1 详解】

解: $\because A+B=2C$, 整式 $A=x^2-3xy+2y^2$, $C=x^2+0.5xy-2y^2$,

$$\therefore B=2C-A$$

$$= 2(x^2+0.5xy-2y^2) - (x^2-3xy+2y^2)$$

$$= 2x^2+xy-4y^2-x^2+3xy-2y^2$$

$$= x^2+4xy-6y^2,$$

$$\therefore \text{整式 } B=x^2+4xy-6y^2;$$

【小问 2 详解】

解: $\because 2x^2 + 9y^2 - 4x + 6y + 3 = 0,$

$\therefore$ 配方可得, $2(x^2 - 2x + 1) - 2 + 9\left(y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}\right) - 1 + 3 = 0,$

即 $2(x-1)^2 + 9\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = 0,$

即 $x-1=0, y + \frac{1}{3}=0,$

解得 $x=1, y=-\frac{1}{3},$

由 (1) 知, $B = x^2 + 4xy - 6y^2,$

将 $x=1, y=-\frac{1}{3}$ 代入可得, $B = 1^2 + 4 \times 1 \times \left(-\frac{1}{3}\right) - 6 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = 1 - 2 = -1.$

25. 阅读: 分解因式 $x^2 + 2x - 3.$

解: 原式 $= x^2 + 2x + 1 - 1 - 3$

$= (x^2 + 2x + 1) - 4$

$= (x+1)^2 - 4$

$= (x+1+2)(x+1-2)$

$= (x+3)(x-1)$

此方法是抓住二次项和一次项的特点, 然后加一项, 使这三项为完全平方式, 我们称这种方法为“配方法”, 此题为用配方法分解因式.

请体会配方法的特点, 然后用配方法解决下列问题:

分解因式:

(1) $4a^2 + 4a - 15;$

(2) $2a^2 + 4a - 6.$

【答案】 (1) $(2a+5)(2a-3)$

(2) $2(a+3)(a-1)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了分解因式, 熟知分解因式的方法是解题的关键.

(1) 仿照题意得到 $(2a+1)^2 - 16$ ，再利用平方差公式分解因式即可；

(2) 先把原式提取公因数 2，再仿照题意得到 $2[(a+1)^2 - 4]$ ，最后利用平方差公式分解因式即可.

【小问 1 详解】

解： $4a^2 + 4a - 15$

$$= (4a^2 + 4a + 1) - 15 - 1$$

$$= (2a+1)^2 - 16$$

$$= (2a+1+4)(2a+1-4)$$

$$= (2a+5)(2a-3);$$

【小问 2 详解】

解： $2a^2 + 4a - 6$

$$= 2(a^2 + 2a - 3)$$

$$= 2[(a^2 + 2a + 1) - 3 - 1]$$

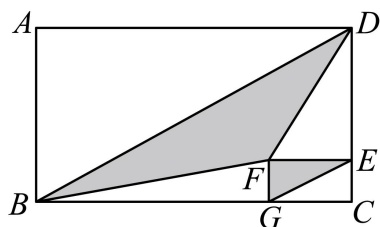
$$= 2[(a+1)^2 - 4]$$

$$= 2(a+1+2)(a+1-2)$$

$$= 2(a+3)(a-1).$$

26. 对于任意四个有理数 a 、 b 、 c 、 d ，可以组成两个有理数对 (a, b) 与 (c, d) ，我们规定：

$$(a, b) \square (c, d) = a^2 + d^2 - bc. \text{ 例如: } (1, 2) \square (3, 4) = 1^2 + 4^2 - 2 \times 3 = 11.$$



(1) 若 $(x, kx) \square (y, -y)$ 是一个完全平方式，求常数 k 的值；

(2) 若 $2x + y = 10$ ，且 $(3x + y, 2x^2 + 3y^2) \square (3, x - 3y) = 84$ ，求 xy 的值；

(3) 在 (2) 的条件下，将长方形 $ABCD$ 及长方形 $CEFG$ 按照如图方式放置，其中点 E 、 G 分别在边

CD 、 BC 上，连接 BD 、 BF 、 DF 、 EG ，若 $AB = 2x$ ， $BC = 8x$ ， $CE = y$ ， $CG = 4y$ ，求图中阴影部

分的面积.

【答案】(1) ± 2

(2) 4 (3) 136

【解析】

【分析】(1) 由题目中的规定可知 $(x, kx) \square (y, -y) = x^2 - kxy + y^2$, 根据完全平方公式的特征确定答案即可;

(2) 根据题目中的规定求出 $(3x + y, 2x^2 + 3y^2) \square (3, x - 3y) = 84$ 等号左边部分, 可得 $4x^2 + y^2 = 84$, 再借助完全平方公式, 将 $2x + y = 10$ 代入求解即可;

(3) 根据三角形面积公式将阴影部分的面积表示出来, 得到含 $2x + y$, xy 的整式, 再代入求值即可.

【小问 1 详解】

解: 根据题意, 可得 $(x, kx) \square (y, -y) = x^2 + (-y)^2 - kx \cdot y = x^2 - kxy + y^2$,

$\therefore (x, kx) \square (y, -y)$ 是一个完全平方式,

$$\therefore -kxy = \pm 2xy,$$

解得 $k = \pm 2$;

【小问 2 详解】

根据题意, 可得 $(3x + y, 2x^2 + 3y^2) \square (3, x - 3y)$

$$= (3x + y)^2 + (x - 3y)^2 - 3(2x^2 + 3y^2)$$

$$= (9x^2 + 6xy + y^2) + (x^2 - 6xy + 9y^2) - (6x^2 + 9y^2)$$

$$= 4x^2 + y^2$$

$$= 84,$$

$$\therefore 2x + y = 10,$$

$$\therefore (2x + y)^2 = 4x^2 + 4xy + y^2 = 100,$$

$$\therefore 4xy = 100 - 84 = 16,$$

$$\therefore xy = 4;$$

【小问 3 详解】

由 (2) 可知, $2x + y = 10$, $xy = 4$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 和四边形 $CEFG$ 均为长方形,

$\therefore CD = AB = 2x$, $BC = AD = 8x$, $CG = EF = 4y$, $CE = FG = y$,

$\therefore DE = 2x - y$, $BG = 8x - 4y$,

$\therefore$ 阴影部分的面积为

$$\begin{aligned} S &= S_{\triangle BCD} - S_{\triangle BFG} - S_{\triangle DEF} - S_{\triangle CEG} \\ &= \frac{1}{2}BC \cdot CD - \frac{1}{2}BG \cdot FG - \frac{1}{2}EF \cdot DE - \frac{1}{2}CG \cdot CE \\ &= \frac{1}{2} \times 8x \cdot 2x - \frac{1}{2}(8x - 4y) \cdot y - \frac{1}{2} \times 4y(2x - y) - \frac{1}{2} \times 4y \cdot y \\ &= 8x^2 - 4xy + 2y^2 - 4xy + 2y^2 - 2y^2 \\ &= 8x^2 - 8xy + 2y^2 \\ &= 2(2x + y)^2 - 16xy \\ &= 2 \times 10^2 - 16 \times 4 \\ &= 136. \end{aligned}$$

【点睛】 本题主要考查了整式混合运算、完全平方公式的应用、代数式求值等知识, 熟练掌握完全平方公式并灵活运用是解题关键.

27. 阅读材料, 完成下列问题.

材料: 已知多项式 $2x^3 - x^2 + m$ 有一个因式是 $2x + 1$, 求 m 的值.

解法一: 设 $2x^3 - x^2 + m = (2x + 1)(x^2 + ax + b)$,

则: $2x^3 - x^2 + m = 2x^3 + (2a + 1)x^2 + (a + 2b)x + b$,

$$\text{比较系数得: } \begin{cases} 2a + 1 = -1 \\ a + 2b = 0 \\ b = m \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{1}{2} \\ m = \frac{1}{2} \end{cases},$$

$$\therefore m = \frac{1}{2};$$

解法二：设 $2x^3 - x^2 + m = A \cdot (2x + 1)$ (A 为整式)；

由于上式为恒等式，为方便计算了取 $x = -\frac{1}{2}$ ， $2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + m = 0$ ，故 $m = \frac{1}{2}$ 。

(1) 已知多项式 $x^4 - mx^3 + 2nx - 16$ 有两个因式分别是 $(x-1)$ 和 $(x-2)$ ，求 m 和 n 的值；

(2) 已知多项式 $x^3 + kx^2 + 3$ 除以 $x+2$ 所得的余数，比该多项式除以 $x+3$ 所得的余数少 1，求 k 的值。

【答案】(1)
$$\begin{cases} m = 5 \\ n = 10 \end{cases}$$

(2) $k = 4$

【解析】

【分析】本题主要考查了因式分解及其应用，解题关键是熟练掌握常见的几种因式分解的方法和多项式乘多项式法则。

(1) 先设 $x^4 - mx^3 + 2nx - 16 = A(x-1)(x-2)$ ，然后令 $x=1$ ， $x=2$ ，从而列出关于 m ， n 的方程，解方程即可；

(2) 先令 $x^3 + kx^2 + 3 = (x+2)(x^2 + ax + b) + m$ ， $x^3 + kx^2 + 3 = (x+3)(x^2 + cx + d) + n$ ，再令 $x=-2$ ， $x=-3$ ，求出 m ， n ，再根据已知条件中 m ， n 的关系，列出关于 k 的方程，解方程即可。

【小问 1 详解】

解：设 $x^4 - mx^3 + 2nx - 16 = A(x-1)(x-2)$ ，

令 $x=1$ ，则 $1 - m + 2n - 16 = 0$ ，

令 $x=2$ ，则 $16 - 8m + 4n - 16 = 0$ ，

即
$$\begin{cases} m - 2n = -15 \\ 8m - 4n = 0 \end{cases}$$
，

解得：
$$\begin{cases} m = 5 \\ n = 10 \end{cases}$$
；

【小问 2 详解】

解：令 $x^3 + kx^2 + 3 = (x+2)(x^2 + ax + b) + m$ ，

$$x^3 + kx^2 + 3 = (x+3)(x^2 + cx + d) + n，$$

再令 $x=-2$ ，则 $-8 + 4k + 3 = m$ ；

令 $x = -3$ ，则 $-27 + 9k + 3 = n$ ；

$\therefore$ 多项式 $x^3 + kx^2 + 3$ 除以 $x + 2$ 所得的余数，比该多项式除以 $x + 3$ 所得的余数少 1，

$$\therefore n - m = 1,$$

$$\therefore (9k - 24) - (4k - 5) = 1,$$

$$\therefore 9k - 24 - 4k + 5 = 1,$$

$$\therefore 5k = 20,$$

$$\therefore k = 4.$$