

2025 学年第一学期七年级数学阶段练习

一. 选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分):

1. 下列说法中正确的是 ()

A. $-\frac{xy^2}{3}$ 的系数是 -3 ;

B. x^2y 的次数是 2 次;

C. $3x^2 - x - 2$ 是二次三项式;

D. $x^2 - 3x + 5$ 的一次项是 $3x$.

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查代数式的系数、次数以及多项式的项与次数的概念, 解题的关键是准确理解这些概念的定义.

对每个选项分别根据系数、次数、多项式的项与次数的定义进行分析判断.

【详解】解: A、 $-\frac{xy^2}{3} = -\frac{1}{3}xy^2$, 其系数是 $-\frac{1}{3}$, 不是 -3 , 该选项错误;

B、 x^2y 的次数是 $2+1=3$ 次, 不是 2 次, 该选项错误;

C、 $3x^2 - x - 2$ 的最高次项是 $3x^2$, 次数为 2, 且有三项, 是二次三项式, 该选项正确;

D、 $x^2 - 3x + 5$ 的一次项是 $-3x$, 不是 $3x$, 该选项错误.

故选: C.

2. 下列等式中, 表示“同底数幂的乘法性质”的是 ()

A. $(a^m)^n = a^{mn}$ (m, n 是正整数);

B. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (m, n 是正整数);

C. $(ab)^n = a^n b^n$ (n 是正整数);

D. $a^m \cdot b^n = (ab)^{m+n}$ (m, n 是正整数).

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查幂的运算, 根据同底数幂的乘法法则, 进行判断即可.

【详解】解: A 为幂的乘方法则, B 为同底数幂的乘法法则, C 为积的乘方法则, D 等式不成立;

故选 B.

3. 下列各式从左到右是因式分解的是 ()

A. $(a+1)(a-3) = a^2 - 2a - 3$;

B. $2a^2 + 4 = 2(a^2 + 2)$;

C. $y^3 + 4y^2 - 2 = y^2(y + 4) - 2$;

D. $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$.

【答案】BD

【解析】

【分析】本题考查了因式分解“把一个多项式化成几个整式积的形式，像这样的式子变形叫做这个多项式的因式分解，也叫做把这个多项式分解因式”，熟记因式分解的定义是解题关键. 根据因式分解的定义逐项判断即可得.

【详解】解：A、等式的右边不是乘积的形式，是整式的乘法，则此项不是因式分解，不符合题意；

B、 $2a^2 + 4 = 2(a^2 + 2)$ 满足因式分解的定义，则此项是因式分解，符合题意；

C、等式的右边不是乘积的形式，则此项不是因式分解，不符合题意；

D、 $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ 满足因式分解的定义，则此项是因式分解，符合题意；

故选：BD.

4. $-x^2 + y^2$ 因式分解的结果是 ()

A. $(x + y)(x - y)$

B. $(-x - y)(-x + y)$

C. $(-x + y)(x + y)$

D. $(-x + y)(x - y)$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查的是因式分解，灵活运用平方差公式是解题的关键. 将表达式 $-x^2 + y^2$ 改写为 $y^2 - x^2$ ，应用平方差公式 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ 进行因式分解.

【详解】解： $\because -x^2 + y^2 = y^2 - x^2$,

又 $\because y^2 - x^2 = (y + x)(y - x) = (-x + y)(x + y)$,

$\therefore$ 因式分解的结果为 $(-x + y)(x + y)$.

故选：C.

5. 若 $x^2 + kx + 12 = (x + a)(x + b)$ ，且 a 、 b 、 k 均为整数，则 k 的值不可能是 ()

A. 6;

B. 7;

C. 8;

D. -13.

【答案】A

【解析】

【分析】 本题考查的是多项式的整数解问题，灵活运用因式分解和整数的性质是解题的关键。由等式右边展开得 $x^2 + (a+b)x + ab$ ，与左边比较系数，得 $ab=12$ 和 $a+b=k$ 。由于 a 、 b 为整数，枚举所有整数对 (a,b) 满足 $ab=12$ ，计算 $k=a+b$ ，即可确定 k 的可能值。

$$\text{【详解】 } \because x^2 + kx + 12 = (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab,$$

$\therefore$ 比较系数，得 $ab=12$ ， $a+b=k$ ，

$\because a$ 、 b 为整数，且 $ab=12$ ，

$\therefore$ 所有整数对 (a,b) 为：

$(1,12)$ ， $k=13$ ；

$(2,6)$ ， $k=8$ ；

$(3,4)$ ， $k=7$ ；

$(-1,-12)$ ， $k=-13$ ；

$(-2,-6)$ ， $k=-8$ ；

$(-3,-4)$ ， $k=-7$ 。

(其余对为重复值，略)

$\therefore k$ 的可能值为 $13, 8, 7, -13, -8, -7$ 。

选项 A.6 不在可能值中，故不可能。

6. 如图 1 所示，有两张完全相同的大正方形纸片 A 、 B ，从纸片 A 的四个角裁剪四个完全相同的小正方形，并将四个小正方形纸片拼放在纸片 B 的四个顶点处。图 2 中已标出裁剪后 A 、 B 纸片尺寸，并且记载剪后的面积分别为 S_A 、 S_B (图 2 中阴影部分)。

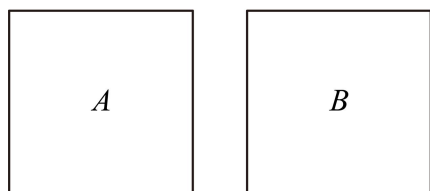


图1

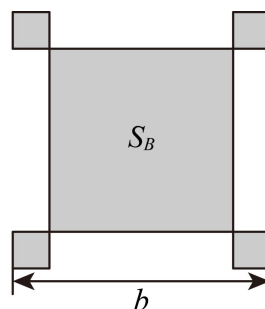
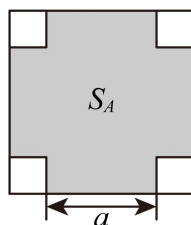


图2

小海认为： $S_B + S_A = \frac{1}{2}(b+a)^2$ ；乐乐认为： $S_B - S_A = \frac{1}{2}(b-a)^2$ 。

关于小海和乐乐观点，下列说法正确的是（ ）

- A. 小海正确、乐乐正确；
B. 小海错误、乐乐正确；
C. 小海正确、乐乐错误；
D. 小海错误、乐乐错误.

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了乘法公式与几何图形，设四个小正方形的边长为 x ，根据原正方形的边长不变可列方程求出 $x = \frac{b-a}{4}$ ，然后根据割补法分别求出 S_A 、 S_B ，最后计算 $S_B + S_A$ 、 $S_B - S_A$ ，即可判断.

【详解】 解： 设四个小正方形的边长为 x ，

根据题意，得 $a + 2x = b - 2x$ ，

$$\text{解得 } x = \frac{b-a}{4},$$

$$\therefore S_A = (2x+a)^2 - 4x^2 = \left(2 \times \frac{b-a}{4} + a\right)^2 - 4\left(\frac{b-a}{4}\right)^2 = \frac{(b+a)^2}{4} - \frac{(b-a)^2}{4},$$

$$S_B = (b-2x)^2 + 4x^2 = \left(b - 2 \times \frac{b-a}{4}\right)^2 + 4\left(\frac{b-a}{4}\right)^2 = \frac{(b+a)^2}{4} + \frac{(b-a)^2}{4},$$

$$\therefore S_B + S_A = \frac{(b+a)^2}{4} + \frac{(b-a)^2}{4} + \left[\frac{(b+a)^2}{4} - \frac{(b-a)^2}{4}\right] = \frac{1}{2}(b+a)^2,$$

$$S_B - S_A = \frac{(b+a)^2}{4} + \frac{(b-a)^2}{4} - \left[\frac{(b+a)^2}{4} - \frac{(b-a)^2}{4}\right] = \frac{1}{2}(b-a)^2,$$

$\therefore$ 小海正确、乐乐正确，

故选： A.

二. 填空题（本大题共 12 题，每题 2 分，满分 24 分）

7. 计算： $\left(-\frac{1}{2}x^2y\right)^3 = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $-\frac{1}{8}x^6y^3$

【解析】

【分析】 本题考查了幂的乘方与积的乘方，熟练运用其运算法则是解题的关键. 根据幂的乘方 $(a^m)^n = a^{mn}$ 和积的乘方 $(ab)^m = a^m b^m$ 的运算法则，对 $\left(-\frac{1}{2}x^2y\right)$ 的系数、 x 的部分、 y 的部分分别进行运算，进而求

出结果.

【详解】解: $\left(-\frac{1}{2}x^2y\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot (x^2)^3 \cdot y^3 = -\frac{1}{8}x^6y^3,$

故答案为: $-\frac{1}{8}x^6y^3.$

8. 计算: $(x-y)^3 \div (y-x)^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $x-y$

【解析】

【分析】 本题考查同底数幂的除法运算, 解题的关键是将 $(y-x)^2$ 转化为 $(x-y)^2$, 再利用同底数幂的除法法则计算.

先将 $(y-x)^2$ 转化为与 $(x-y)^3$ 同底数的形式, 再根据同底数幂的除法法则进行计算.

【详解】解: $(x-y)^3 \div (y-x)^2 = (x-y)^3 \div (x-y)^2.$

$$= (x-y)^{3-2}$$

$$= x-y.$$

故答案为: $x-y.$

9. 计算: $(x-3)(x+5) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $x^2+2x-15$

【解析】

【分析】 本题主要考查了多项式乘以多项式的运算, 直接根据多项式乘以多项式的运算法则求解即可.

【详解】解: $(x-3)(x+5)$

$$= x^2 - 3x + 5x - 15$$

$$= x^2 + 2x - 15,$$

故答案为: $x^2+2x-15.$

10. 计算: $\left(\frac{1}{2}\right)^{2024} \times (-2)^{2025} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题考查了同底数幂乘法的逆用、积的乘方的逆用，熟练掌握运算法则是解题关键．先根据同底数幂乘法的逆用将 $(-2)^{2025}$ 改写成 $(-2)^{2024} \times (-2)$ ，再根据积的乘方的逆用计算即可得．

【详解】 解： $\left(\frac{1}{2}\right)^{2024} \times (-2)^{2025}$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{2024} \times (-2)^{2024} \times (-2)$$
$$= \left[\frac{1}{2} \times (-2)\right]^{2024} \times (-2)$$
$$= (-1)^{2024} \times (-2)$$
$$= 1 \times (-2)$$
$$= -2,$$

故答案为： -2 ．

11. 若 $(x+1)^0$ 无意义，则整式 $x^2 - x$ 的值为_____．

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查零指数幂的意义及代数式求值，解题的关键是根据零指数幂无意义的条件求出 x 的值．先根据零指数幂无意义的条件（底数为0）求出 x 的值，再将其代入整式计算．

【详解】 解： $\because (x+1)^0$ 无意义，

$$\therefore x+1=0,$$
$$\therefore x=-1,$$
$$\therefore x^2 - x = (-1)^2 - (-1) = 1+1=2,$$

故答案为： 2．

12. 已知 $a^m = 3$ ， $a^n = 2$ ，那么 $a^{2m-n} =$ _____．

【答案】 $\frac{9}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了幂的乘方的逆运算，同底数幂除法的逆运算，先计算出 a^{2m} 的值，再根据

$a^{2m-n} = a^{2m} \div a^n$ 计算求解即可.

【详解】解: $\because a^m = 3$,

$$\therefore a^{2m} = (a^m)^2 = 3^2 = 9,$$

又 $\because a^n = 2$,

$$\therefore a^{2m-n} = a^{2m} \div a^n = 9 \div 2 = \frac{9}{2},$$

故答案为: $\frac{9}{2}$.

13. 因式分解 $3x^2y - 12y =$ _____.

【答案】 $3y(x+2)(x-2)$

【解析】

【分析】先提出公因式, 再利用平方差公式分解, 即可求解.

【详解】解: $3x^2y - 12y$

$$= 3y(x^2 - 4)$$

$$= 3y(x+2)(x-2)$$

故答案为: $3y(x+2)(x-2)$

【点睛】本题考查综合运用提公因式法和公式法因式分解. 一般因式分解时有公因式先提取公因式, 然后再考虑用公式法因式分解.

14. 2022 年我国粮食总产量大约为 7.0×10^{11} kg. 如果按我国人口 1.4×10^9 人计算, 那么人均粮食产量大约是_____.

【答案】 500kg

【解析】

【分析】本题主要考查了单项式除以单项式. 根据单项式除以单项式法则计算即可.

【详解】解: 人均粮食产量为:

$$(7.0 \times 10^{11}) \div (1.4 \times 10^9) = (7.0 \div 1.4) \times (10^{11} \div 10^9) = 5.0 \times 10^2 = 500\text{kg}.$$

故答案为 500kg.

15. 若关于 x 的整式 $x^2 - kx + 16$ 是某个整式的平方, 那么 $k =$ _____.

【答案】 ± 8

【解析】

【分析】 本题考查完全平方公式的应用, 解题的关键是掌握完全平方公式的结构特征.

根据完全平方公式 $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, 分析给定整式的结构, 求出 k 的值.

【详解】 解: 根据完全平方公式 $(x \pm b)^2 = x^2 \pm 2bx + b^2$, 对比 $x^2 - kx + 16$, 可得 $b^2 = 16$, 则 $b = \pm 4$,
又因为 $\pm 2b = -k$, 当 $b = 4$ 时, $-k = 2 \times 4 = 8$, 即 $k = -8$,
当 $b = -4$ 时, $-k = 2 \times (-4) = -8$, 即 $k = 8$.

故答案为: ± 8 .

16. 已知关于 x 的整式 $x^2 + 9x - m$ 可以写成两个因式的积, 其中一个因式为 $x + 11$, 那么另一个因式为 _____.

【答案】

$x - 2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了因式分解, 设另一个因式为 $x + b$, 可得: $(x + 11)(x + b) = x^2 + (b + 11)x + 11b$,
所以可得 $x^2 + (b + 11)x + 11b = x^2 + 9x - m$, 通过比较系数求解.

【详解】 解: 设另一个因式为 $x + b$,
则 $(x + 11)(x + b) = x^2 + (b + 11)x + 11b$
 $\therefore x^2 + (b + 11)x + 11b = x^2 + 9x - m$,
可得: $b + 11 = 9$,
解得: $b = -2$,
 $\therefore$ 另一个因式为 $x - 2$,
故答案为: $x - 2$.

17. 若一个正整数 N 等于两个不相等的正整数的和与这两个不相等的正整数的积之和, 那么称该正整数 N 为“可拆分”整数, 并记可拆分的种类为 $F[N]$. 例如: 正整数 3 不是“可拆分”整数, 因此 $F[3] = 0$; 而正整数 23 有三种拆分方法, 即 $23 = 1 + 11 + 1 \times 11$ 、 $23 = 2 + 7 + 2 \times 7$ 、 $23 = 3 + 5 + 3 \times 5$, 因此 $F[23] = 3$;

按照上述定义, $F[88]-F[71]=$ _____.

【答案】

-5

【解析】

【分析】 本题主要考查了有理数的混合运算, 根据“可拆分”整数的定义, 将 $N=a+b+a \times b$ 转化为 $(a+1)(b+1)=N+1$, 因此 $F[N]$ 等于 $N+1$ 的因子对 (因子均不小于 2 且不相等) 的数量.

【详解】 解: 对于 $N=88$,

$\because N+1=89$, 89 是质数,

$\therefore$ 其因子只有 1 和 89, 无法满足因子均不小于 2 的条件,

$\therefore F[88]=0$,

对于 $N=71$, $N+1=72$,

$\because 72$ 的因子对 (均不小于 2 且不相等) 有 $(2,36)$ 、 $(3,24)$ 、 $(4,18)$ 、 $(6,12)$ 、 $(8,9)$, 共 5 对,

$\therefore F[71]=5$,

$F[88]-F[71]=0-5=-5$.

故答案为: -5.

18. 已知有理数 a 、 b 、 x 、 y 满足 $2ax+3by=-3$, 且 $x-a=3b-y=-2$, 那么 $ab+xy=$ _____

【答案】 $-\frac{4}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了分解因式, 代数式求值, 非负数的性质, 根据题意可得 $x=a-2$ 和 $y=3b+2$,

代入方程 $2ax+3by=-3$ 得到关于 a 和 b 的方程, 利用完全平方公式结合非负数的性质得到 $a=1$ 和 $b=-\frac{1}{3}$,

再求出 $x=-1$ 和 $y=1$, 最后计算 $ab+xy$ 即可.

【详解】 解: $\because x-a=3b-y=-2$,

$\therefore x=a-2$, $y=3b+2$,

$\because 2ax+3by=-3$,

$$\therefore 2a(a-2)+3b(3b+2)=-3,$$

$$\therefore 2a^2-4a+9b^2+6b+3=0$$

$$\therefore 2(a-1)^2+9\left(b+\frac{1}{3}\right)^2=0$$

$$\therefore a-1=0, \quad b+\frac{1}{3}=0,$$

$$\text{解得 } a=1, \quad b=-\frac{1}{3}.$$

$$\therefore x=1-2=-1, \quad y=3\times\left(-\frac{1}{3}\right)+2=1.$$

$$\therefore ab+xy=1\times\left(-\frac{1}{3}\right)+(-1)\times 1=-\frac{1}{3}-1=-\frac{4}{3},$$

$$\text{故答案为: } -\frac{4}{3}.$$

三. 解答题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 共 24 分)

19. 计算: $(-2x^2)^3-x\cdot x^5+(-3x^3)^2$.

【答案】 0

【解析】

【分析】 此题考查了整式的合运算能力, 关键是能准确进行积的乘方、同底数幂相乘、幂的乘方和合并同类项的计算. 先计算积的乘方、同底数幂相乘和幂的乘方, 再合并同类项.

$$\text{【详解】 解: } (-2x^2)^3-x\cdot x^5+(-3x^3)^2$$

$$=-8x^6-x^6+9x^6$$

$$=0$$

20. 计算: $2x^2y^3(2x^2-3xy+5y^2)\div(-xy)$.

$$\text{【答案】 } -4x^3y^2+6x^2y^3-10xy^4$$

【解析】

【分析】 本题主要考查了单项式乘以多项式, 多项式除以单项式, 先计算单项式乘以多项式, 再计算多项式除以单项式即可得到答案.

$$\text{【详解】 解: } 2x^2y^3(2x^2-3xy+5y^2)\div(-xy)$$

$$= (4x^4y^3 - 6x^3y^4 + 10x^2y^5) \div (-xy)$$

$$= -4x^3y^2 + 6x^2y^3 - 10xy^4.$$

21. 计算: $(x+2y)^2 - (2x-y)(x+2y) - 6y^2$.

【答案】 $-x^2 + xy$

【解析】

【分析】 本题主要考查了整式的混合计算，先根据完全平方公式和多项式乘以多项式的计算法则去括号，然后合并同类项即可得到答案.

【详解】 解: $(x+2y)^2 - (2x-y)(x+2y) - 6y^2$
 $= x^2 + 4xy + 4y^2 - (2x^2 - xy + 4xy - 2y^2) - 6y^2$
 $= x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x^2 + xy - 4xy + 2y^2 - 6y^2$
 $= -x^2 + xy.$

22. 计算: $2025^2 - 2024 \times 2026$

【答案】 1

【解析】

【分析】 此题考查了平方差公式，变形后根据平方差公式 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 计算即可.

【详解】 解: $2025^2 - 2024 \times 2026$
 $= 2025^2 - (2025-1)(2025+1)$
 $= 2025^2 - (2025^2 - 1)$
 $= 2025^2 - 2025^2 + 1$
 $= 1.$

23. 因式分解: $x^2 + 6x - 27$.

【答案】 $(x-3)(x+9)$

【解析】

【分析】 本题考查因式分解（配方法与平方差公式），解题的关键是通过配方将二次三项式转化为平方差形式.

先通过配方将原式转化为完全平方式与常数的差，再利用平方差公式进行因式分解.

【详解】解：原式 $= x^2 + 6x + 9 - 9 - 27$

$$= (x^2 + 6x + 9) - 36$$

$$= (x + 3)^2 - 6^2$$

根据平方差公式 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ ，可得

$$= (x + 3 + 6)(x + 3 - 6)$$

$$= (x + 9)(x - 3).$$

24. 因式分解： $x^2 - y^2 - z^2 - 2yz$.

【答案】 $(x - y - z)(x + y + z)$

【解析】

【分析】本题主要考查了因式分解，先利用完全平方公式因式分解得到 $x^2 - (y + z)^2$ ，再利用平方差公式因式分解即可.

【详解】解： $x^2 - y^2 - z^2 - 2yz$

$$= x^2 - (y^2 + z^2 + 2yz)$$

$$= x^2 - (y + z)^2$$

$$= (x - y - z)(x + y + z).$$

四. 解答题 (本大题共 5 题，第 25~27 题每题 4 分，第 28 题 8 分，第 29 题 14 分，共 34 分)

25. 先化简，再求值： $(b + 1)(ab - 2) - 2a^2b^2 + 2ab$ ，其中， $a = \frac{3}{2}, b = -\frac{4}{3}$.

【答案】 $2ab + 2, -2$

【解析】

【分析】先根据整式的乘除运算法则进行化简，再代入 a, b 即可求解.

【详解】解：原式 $= (a^2b^2 - 2ab + ab - 2 - 2a^2b^2 + 2) \div \left(-\frac{1}{2}ab\right)$

$$= (-a^2b^2 - ab) \times \left(-\frac{2}{ab}\right)$$

$$= 2ab + 2,$$

$$\text{当 } a = \frac{3}{2}, b = -\frac{4}{3} \text{ 时,}$$

$$\text{原式} = 2 \times \frac{3}{2} \times \left(-\frac{4}{3}\right) + 2$$

$$= -4 + 2$$

$$= -2.$$

【点睛】此题主要考查整式的化简求值，解题的关键熟知整式的乘除运算法则.

26. 如图 1 所示，有一块边长为 a 的正方形物料，其中心是边长为 b 的正方形空白. 为避免浪费，在图 1 沿虚线将该物料切割成四个完全相同的图形，并将切割后的物料拼成一个平行四边形重新利用，如图 2 所示.

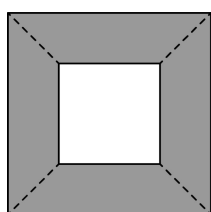


图1

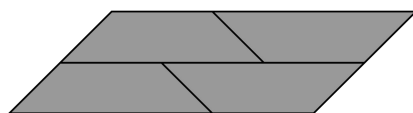


图2

(1) 结合图 1、图 2 的面积关系，你认为可以验证哪一个乘法公式？

(2) 若 $a = 5.5$ 分米， $b = 1.5$ 分米，求该物料的面积.

【答案】(1) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

(2) 28 平方分米

【解析】

【分析】本题考查平方差公式与几何图形，解题的关键是：

(1) 图①中阴影部分的面积可以表示为大正方形的面积与小正方形面积的差；图②中平行四边形的底为 $(a+b)$ ，高为 $(a-b)$ ，面积等于 $(a+b)(a-b)$ ；由此可解.

(2) 把 a 、 b 的值代入计算即可，

【小问 1 详解】

解：∵ 图 1 中阴影部分的面积为 $a^2 - b^2$ ；图②的面积可以表示为 $(a+b)(a-b)$ ，

$$\therefore a^2 - b^2 = (a+b)(a-b);$$

【小问 2 详解】

解：当 $a = 5.5$ ， $b = 1.5$ 时，

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = (5.5 + 1.5) \times (5.5 - 1.5) = 7 \times 4 = 28,$$

即该物料的面积 28 平方分米.

27. 若 $x - y = 5$, $xy = -6$, 求下列各式的值:

$$(1) \ x^2 + y^2;$$

$$(2) \ x + y.$$

【答案】 (1) 13

$$(2) \ \pm 1$$

【解析】

【分析】 本题主要考查了完全平方公式的变形求值, 熟知完全平方公式及其变形是解题的关键.

(1) 根据 $x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy$ 计算求解即可;

(2) 根据 $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$ 求出 $(x + y)^2$ 的值, 进而可得 $x + y$ 的值.

【小问 1 详解】

解: $\because x - y = 5, \ xy = -6,$

$$\therefore x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy = 5^2 + 2 \times (-6) = 13;$$

【小问 2 详解】

解: $\because x - y = 5, \ xy = -6,$

$$\therefore (x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy = 5^2 + 4 \times (-6) = 1,$$

$$\therefore x + y = 1 \text{ 或 } x + y = -1.$$

28. 我们已经学习了整式乘法, 可以计算以下的式子:

$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

...

你能发现以上等式右边的各项系数的规律吗？其实这些系数的规律早在 11 世纪就已经被我国北宋数学家贾宪发现.

本积
 左积 $\bigcirc$ 右隅
 商除 $\bigcirc$ $\bigcirc$ 方法
 平方积 $\bigcirc$ $\bigcirc$ $\bigcirc$ 平方隅
 立方积 $\bigcirc$ $\bigcirc$ $\bigcirc$ $\bigcirc$ 立方隅
 三乘积 $\bigcirc$ $\bigcirc$ $\bigcirc$ $\bigcirc$ $\bigcirc$ 三乘隅
 四乘积 $\bigcirc$ $\bigcirc$ $\bigcirc$ $\bigcirc$ $\bigcirc$ $\bigcirc$ 四乘隅
 五乘积 $\bigcirc$ $\bigcirc$ $\bigcirc$ $\bigcirc$ $\bigcirc$ $\bigcirc$ $\bigcirc$ 五乘隅

1262 年，我国南宋数学家杨辉在他所著的《详解九章算法》中给出了一个“开方作法本源图”，如图所示，并指明“开方作法本源图出自《释锁算书》，贾宪用此术.”这幅图被后人称为“贾宪三角”. “贾宪三角”是中国古代数学的杰出研究成果之一，它把二项式系数图形化，你会发现，这个“三角形的两条斜的‘边’”都是由数字 1 组成的，而其他数都等于它“肩上”的两个数的和，借助这样的规律我们可以得出 $(a+b)^n$ 的展开式中各项系数. 例如，在三角形中第三行的三个数 1, 2, 1，恰好对应 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 展开式中的系数，且各项系数之和为 $1+2+1=4$. 请借助“贾宪三角”解决下列问题：

- (1) 整式 $(a+b)^5$ 的展开式是一个_____次_____项式；
- (2) 计算： $2^5 + 5 \times 2^4 + 10 \times 2^3 + 10 \times 2^2 + 5 \times 2 + 1$ ；
- (3) 若 $(a+b)^{10}$ 的展开式各项系数之和为 A ，求 A 的值（结果用幂的形式表示）

【答案】 (1) 五， 六 (2) 243

(3) 2^{10}

【解析】

【分析】 本题主要考查了数字变化的规律、列代数式及多项式，能根据题意得出各式计算结果的系数变化规律是解题的关键.

(1) 根据所给式子，观察其各项系数，发现规律即可解决问题.

(2) 把 $a=2$ ， $b=1$ 代入 $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ ，即可解答本题；

(3) 分别求出所给式子计算结果的各项系数之和，发现规律即可解决问题.

【小问 1 详解】

解：观察所给各式可知，

$(a+b)^1$ 计算结果中的各项系数依次为：1, 1;

$(a+b)^2$ 计算结果中的各项系数依次为：1, 2, 1;

$(a+b)^3$ 计算结果中的各项系数依次为：1, 3, 3, 1;

$(a+b)^4$ 计算结果中的各项系数依次为：1, 4, 6, 4, 1;

由此可知， $(a+b)^5$ 计算结果中的各项系数依次为：1, 5, 10, 10, 5, 1,

即 $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$,

∴ 整式 $(a+b)^5$ 的展开式是一个五次六项式,

故答案为：五, 六;

【小问 2 详解】

解：把 $a=2$, $b=1$ 代入 $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$,

得： $(2+1)^5 = 2^5 + 5 \times 2^4 \times 1 + 10 \times 2^3 \times 1^2 + 10 \times 2^2 \times 1^3 + 5 \times 2 \times 1^4 + 1^5$,

∴ $(2+1)^5 = 2^5 + 5 \times 2^4 + 10 \times 2^3 + 10 \times 2^2 + 5 \times 2 + 1$,

∴ $2^5 + 5 \times 2^4 + 10 \times 2^3 + 10 \times 2^2 + 5 \times 2 + 1 = 3^5 = 243$;

【小问 3 详解】

解： $(a+b)^1$ 计算结果各项系数之和为 $1+1=2=2^1$;

$(a+b)^2$ 计算结果各项系数之和为 $1+2+1=4=2^2$;

$(a+b)^3$ 计算结果各项系数之和为 $1+3+3+1=8=2^3$;

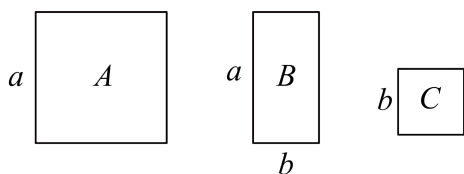
$(a+b)^4$ 计算结果各项系数之和为 $1+4+6+4+1=16=2^4$;

....,

∴ $(a+b)^n$ 计算结果各项系数之和为 2^n ,

∴ 当 $n=10$ 时, $(a+b)^{10}$ 的展开式各项系数之和 A 的值为 2^{10} .

29. 如图, 有 A 、 B 、 C 三种不同规格型号的卡片, 每种卡片各有 30 张. 其中 A 型卡片是边长为 a 的正方形, B 型卡片是长为 b 、宽为 a 的长方形, C 型卡片是边长为 b 的正方形, 其中 $a > b$. 现在从这些卡片中取出若干张卡片 (每种卡片至少取一张) 无缝隙、无重叠的拼成一个长方形.



(1) 若取出 A 型卡片_____张、 B 型卡片_____张、 C 型卡片_____张，可以拼成一个长为 $(2a+b)$ 、宽为 $(a+2b)$ 的长方形；

(2) 若取出 A 型卡片 1 张、 C 型卡片 6 张，请先判断需要抽取几张 B 型卡片才能拼成长方形，再画出相应的长方形；

(3) 若将选取的卡片拼成一个正方形：

①若一共选取 50 张卡片，能否拼成一个正方形？请说明理由。

②若 $a = 2b$ ，请用含 b 的代数式表示能拼成的正方形面积的最大值。请直接写出答案，不必说明理由。

【答案】 (1) 2, 5, 2

(2) 5，图见解析 (3) ①不存在这样的 x, y ，不能拼成一个正方形，理由见解析；② $196b^2$

【解析】

【分析】 本题考查了多项式乘法与图形面积的综合应用，解题的关键是利用多项式乘法法则求出图形面积，进而确定卡片的数量。

(1) 先求出长为 $(2a+b)$ 、宽为 $(a+2b)$ 的长方形面积，再根据三种卡片的面积确定各自的数量；

(3) 先根据 A 型和 C 型卡片的数量求出总面积的表达式，再通过因式分解确定长方形的长和宽，从而得出 B 型卡片的数量；

(3) ①设出三种卡片的数量，根据正方形面积公式和卡片总数列出方程，判断是否有正整数解；②将 $a = 2b$ 代入，找出能拼成正方形的最大面积。

【小问 1 详解】

解：长方形的面积为 $(2a+b)(a+2b) = 2a^2 + 4ab + ab + 2b^2 = 2a^2 + 5ab + 2b^2$ 。

$\because A$ 型卡片面积为 a^2 , B 型卡片面积为 ab , C 型卡片面积为 b^2 ,

$\therefore$ 需要 A 型卡片 2 张、 B 型卡片 5 张、 C 型卡片 2 张，

故答案为：2, 5, 2；

【小问 2 详解】

解：设需要 x 张 B 型卡片，面积为 xab ，则总面积为 $a^2 + xab + 6b^2$ ，

将其因式分解, $a^2 + xab + 6b^2 = (a + 2b)(a + 3b) = a^2 + 5ab + 6b^2$,

$\therefore$ 需要 5 张 B 型卡片,

如图所示:

A		B	B	B
C	B	C	C	
C	B	C	C	

【小问 3 详解】

解: ①设选取 m 张 A 型卡片, n 张 B 型卡片, p 张 C 型卡片,

拼成的正方形边长为 $xa + yb$ (x, y 为正整数),

则面积为 $(xa + yb)^2 = x^2a^2 + 2xyab + y^2b^2$,

$\therefore m = x^2, n = 2xy, p = y^2$, 且 $m + n + p = 50$,

即 $x^2 + 2xy + y^2 = 50, (x + y)^2 = 50$,

$\because 50$ 不是完全平方数, 且 x, y 为正整数,

$\therefore$ 不存在这样的 x, y , 不能拼成一个正方形;

②当 $a = 2b$ 时:

A 型卡片面积为 $a^2 = (2b)^2 = 4b^2$,

B 型卡片面积为 $ab = 2b \times b = 2b^2$,

C 型卡片面积为 b^2 ,

设拼成的正方形边长为 pb (p 为正整数), 则正方形面积为 p^2b^2 ,

该面积可表示为 x 张 A 型卡片、 y 张 B 型卡片、 z 张 C 型卡片的面积和,

即 $p^2b^2 = x \cdot 4b^2 + y \cdot 2b^2 + z \cdot b^2$ (其中 $x \leq 30, y \leq 30, z \leq 30$, 且 $x, y, z \geq 1$),

整理得 $p^2 = 4x + 2y + z$,

$\because x \leq 30, y \leq 30, z \leq 30$,

$\therefore p^2 \leq 4 \times 30 + 2 \times 30 + 30 = 210$,

由于 $x \leq 30, y \leq 30, z \leq 30$, 则 $p^2 \leq 4 \times 30 + 2 \times 30 + 30 = 210$,

则 p 取最大为 14 的整数,

当 $p = 14$ 时, $p^2 = 196$, 存在可行解如 $x = 30, y = 30, z = 16$ (满足 $4x + 2y + z = 196$ 且 $x \leq 30, y \leq 30, z \leq 30$),

$\therefore$ 能拼成的正方形面积的最大值为 $196b^2$.