

七年级数学

一、单项选择题

1. 下列代数式中，是最简分式的是（ ）

A. $\frac{2m}{3mn}$

B. $\frac{a+b}{a^2-b^2}$

C. $\frac{2a}{a^2+a}$

D. $\frac{x+y}{x^2+y^2}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了最简分式的定义，解题的关键在于对每一个选项的分子分母进行因式分解，看是否存在公因式，若不存在，则为最简分式。

通过检查各选项分子与分母是否有公因式，判断是否可约分，从而确定最简分式。

【详解】解：A、因为分子分母有公因式 m ，所以 $\frac{2m}{3mn} = \frac{2}{3n}$ ，可约分，不是最简分式；

B、因为分母 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ，与分子有公因式 $(a+b)$ ，所以 $\frac{a+b}{a^2-b^2} = \frac{1}{a-b}$ ，可约分，不是最简分式；

C、因为分母 $a^2 + a = a(a+1)$ ，与分子有公因式 a ，所以 $\frac{2a}{a^2+a} = \frac{2}{a+1}$ ，可约分，不是最简分式；

D、因为分子 $x+y$ 与分母 x^2+y^2 无公因式，所以不可约分，是最简分式；

故选：D。

2. 下列各式中，运算正确的是（ ）

A. $x^3 + x^3 = x^6$

B. $2a \cdot 3b = 5ab$

C. $3a^2 \div a^2 = 3a$

D. $(-2a)^3 = -8a^3$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查整式的运算，包括加法、乘法、除法和乘方，整式运算需注意系数、指数和符号的规则，避免混淆运算类型，需根据运算法则逐一验证。

【详解】A、 $\because x^3 + x^3 = 2x^3 \neq x^6$ ， $\therefore$ A 错误。

B、 $\because 2a \cdot 3b = 6ab \neq 5ab$ ， $\therefore$ B 错误。

C、 $\because 3a^2 \div a^2 = 3 \neq 3a$ ， $\therefore$ C 错误。

D、 $\because (-2a)^3 = (-2)^3 \cdot a^3 = -8a^3$ ， $\therefore$ D 正确。

故选：D。

3. 在数 $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$, $(-2)^{-2}$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}$, $(-2)^{-1}$ 中, 最小的数是 ()

- A. $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$ B. $(-2)^{-2}$ C. $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}$ D. $(-2)^{-1}$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了有理数的大小比较, 熟练掌握有理数大小比较的方法是解答本题的关键.

根据正数大于 0, 负数小于 0, 正数大于一切负数, 两个负数, 绝对值大的反而小, 计算各数的值并比较大小即可.

$$\text{【详解】 } \because \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4.$$

$$(-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}.$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2.$$

$$(-2)^{-1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{又} \because 4 > \frac{1}{4} > -\frac{1}{2} > -2$$

$$\therefore \text{最小的是} \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}.$$

故选: C.

4. 如果 $x^2 + kx - 6 = (x - 3)(x + 2)$, 则 k 应为 ().

- A. 5 B. -5 C. 1 D. -1

【答案】 D

【解析】

【分析】 把等式右边进行整式的乘法运算, 然后对比左右两边即可求解.

【详解】 解: 由 $x^2 + kx - 6 = (x - 3)(x + 2)$ 可得:

$$x^2 + kx - 6 = x^2 - x - 6,$$

$$\therefore k = -1;$$

故选 D.

【点睛】 本题主要考查整式的乘除，熟练掌握整式的乘除运算是解题的关键.

5. 下面是某同学“化简 $\frac{x+3}{x+2} + \frac{2-x}{x^2-4}$ ”的过程，共四步.

$$\text{解：原式} = \frac{x+3}{x+2} + \frac{x-2}{(x+2)(x-2)} \dots\dots \text{第一步}$$

$$= \frac{x+3}{x+2} + \frac{1}{x+2} \dots\dots \text{第二步}$$

$$= \frac{x+4}{x+2} \dots\dots \text{第三步}$$

$$= 2 \dots\dots \text{第四步}$$

请判断：该同学的化简过程从第（ ）步开始出现错误.

A. 一

B. 二

C. 三

D. 四

【答案】 A

【解析】

【分析】 按正常计算步骤计算，对比题干找出错误的步骤.

$$\text{【详解】 解：} \frac{x+3}{x+2} + \frac{2-x}{x^2-4},$$

$$= \frac{x+3}{x+2} + \frac{2-x}{(x+2)(x-2)}, \text{ 第一步,}$$

故该同学是从第一步开始出现错误的,

故选： A.

【点睛】 本题考查分式的化简，解题关键是熟练掌握分式的基本性质.

6. 科技改变生活，机器狗可以用于提供各种社会服务. 某景区用机器狗 A 和 B 搬运货物，已知机器狗 A 比机器狗 B 每小时多搬运 30 千克货物，机器狗 A 搬运 900 千克货物所用的时间与机器狗 B 搬运 600 千克货物所用的时间相等. 小云根据这一情境中的数量关系列出方程 $\frac{900}{x+30} = \frac{600}{x}$ ，则未知数 x 表示的意义为（ ）

A. 机器狗 A 每小时搬运货物的质量

B. 机器狗 B 每小时搬运货物的质量

C. 机器狗 A 搬运 900 千克货物所用的时间

D. 机器狗 B 搬运 600 千克货物所用的时间

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查分式方程的实际应用，需根据题意确定未知数的含义，正确理解题意列代数式，找等量是解题的关键，题目中给出机器狗 A 比 B 每小时多搬运 30 千克，且搬运不同质量货物时间相等，通过建立方程，分析得出分母位置对应工作效率，从而确定未知数 x 的意义.

【详解】 解：设机器狗 B 每小时搬运 x 千克货物，则机器狗 A 每小时搬运 $(x+30)$ 千克，依题意，得，

$$\frac{900}{x+30} = \frac{600}{x},$$

说明 x 表示机器狗 B 每小时搬运的货物质量，

故选 B.

二、填空题

7. 单项式 $-\frac{3a^2bc}{7}$ 的次数是_____.

【答案】 4

【解析】

【分析】 本题考查单项式的概念：单项式的次数是所有字母的指数之和.

【详解】 解：单项式 $-\frac{3a^2bc}{7}$ 的次数为 $2+1+1=4$ ，

故答案为：4.

8. 若分式 $\frac{5x}{2x-1}$ 有意义，则 x 的取值范围是_____.

【答案】

$$x \neq \frac{1}{2}$$

【解析】

【分析】 本题考查的是分式有意义的条件，熟记分式有意义的条件是分母不等于零是解题的关键.

分式有意义的条件是分母不为零.

【详解】 解：要使分式 $\frac{5x}{2x-1}$ 有意义，

则分母 $2x-1 \neq 0$ ，解得 $x \neq \frac{1}{2}$.

故答案为： $x \neq \frac{1}{2}$.

9. 分解因式： $3m^2 - 6m =$ _____.

【答案】 $3m(m-2)$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解，利用提公因式法解答即可，掌握因式分解的方法是解题的关键.

【详解】 解： $3m^2 - 6m = 3m(m-2)$,

故答案为： $3m(m-2)$.

10. 分解因式： $a^2 + a - 2 =$ _____.

【答案】 $(a+2)(a-1)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了因式分解的应用，准确分析计算是解题的关键.

对原多项式进行变形，得到 $a^2 + 2a - a - 2$ ，利用提取公因式法求解即可.

【详解】 解： $a^2 + a - 2$

$$= a^2 + 2a - a - 2$$

$$= (a^2 + 2a) - (a + 2)$$

$$= a(a + 2) - (a + 2)$$

$$= (a + 2)(a - 1);$$

故答案为 $(a + 2)(a - 1)$.

11. 将 $x^{-1}(x-y)^{-2}z$ 化成只含有正整数指数幂的形式： _____.

【答案】 $\frac{z}{x(x-y)^2}$

【解析】

【分析】 本题考查负指数幂的定义，熟记概念是解题的关键. 根据负指数幂 $a^{-p} = \frac{1}{a^p} (a \neq 0)$ ，即可得出答案.

【详解】 解： 原式 $= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{(x-y)^2} \cdot z$

$$= \frac{z}{x(x-y)^2},$$

故答案为: $\frac{z}{x(x-y)^2}$.

12. 计算: $x \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{y^2}{x}$

【解析】

【分析】 本题考查了分式的乘方运算以及分式的乘法运算, 解题的关键是掌握分式的乘方运算法则和乘法运算法则.

先计算 $\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{y^2}{x^2}$, 再与 x 相乘并约分即可解答.

【详解】 解: $x \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^2 = x \cdot \frac{y^2}{x^2} = \frac{y^2}{x}$,

故答案为: $\frac{y^2}{x}$.

13. 计算: $\frac{a^2}{a+1} - \frac{1}{a+1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $a-1$.

【解析】

【分析】 原式利用同分母分式的减法法则计算, 约分即可得到结果.

【详解】 解: $\frac{a^2}{a+1} - \frac{1}{a+1} = \frac{a^2-1}{a+1} = \frac{(a+1)(a-1)}{a+1} = a-1$.

故答案为: $a-1$.

14. 方程 $\frac{3x^2}{x-3} = \frac{27}{x-3}$ 的根是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x=-3$

【解析】

【分析】 本题考查可以转化为一元二次方程的分式方程, 熟练掌握解分式方程的步骤是解题的关键, 并要验根. 方程两边分母相同, 均为 $x-3$, 需满足分母不为零, 即 $x \neq 3$. 通过消去分母求解, 并检验增根.

【详解】解：原方程为 $\frac{3x^2}{x-3} = \frac{27}{x-3}$ ，

两边同乘 $x-3$ ，得 $3x^2 = 27$ 。

两边同除以 3，得 $x^2 = 9$ ，

解得 $x = 3$ 或 $x = -3$ 。

检验：当 $x = 3$ 时，分母 $x-3 = 0$ ，无意义，为增根；

当 $x = -3$ 时，分母 $x-3 = -6 \neq 0$ ，代入原方程成立。

故答案为： $x = -3$ 。

15. 计算 $(-3)^{51} \times 9^{-25}$ 的结果是_____。

【答案】 -3

【解析】

【分析】 本题考查负整数指数幂，有理数的乘方，利用负整数指数幂，幂的乘方法则变形后进行计算即可。

【详解】解： $(-3)^{51} \times 9^{-25}$

$$= (-3)^{51} \times \frac{1}{9^{25}}$$

$$= (-3)^{51} \times \frac{1}{3^{50}}$$

$$= -3,$$

故答案为： -3。

16. 甲、乙两港口相距 50 千米，一艘轮船从甲港口顺流航行至乙港口，又立即从乙港口逆流返回甲港口，共用 8 小时，已知水流速度为 4km/h，若设该轮船在静水中的速度为 x km/h，则可列方程为_____。

【答案】 $\frac{50}{x+4} + \frac{50}{x-4} = 8$

【解析】

【分析】 根据题意可列出相对应的方程，本题的等量关系为：顺流时间+逆流时间=8，从而可得解答本题。

【详解】 由题意可得，该轮船在静水中的速度为 x km/h，

顺流时间为： $\frac{50}{x+4}$ ，逆流时间为： $\frac{50}{x-4}$ ，

所列方程为： $\frac{50}{x+4} + \frac{50}{x-4} = 8$ 。

故答案为： $\frac{50}{x+4} + \frac{50}{x-4} = 8$ 。

【点睛】 本题主要考查由实际问题抽象出分式方程的知识点.

17. 若 $x:y=1:3$, $2y=3z$, 则代数式 $\frac{2x+3y}{z-y}$ 的值是_____.

【答案】 -11

【解析】

【分析】 本题考查了比例的性质, 代数式求值, 根据已知条件得到 $x=\frac{1}{3}y$, $z=\frac{2}{3}y$, 代入代数式化简即可.

【详解】 解: $\because x:y=1:3$, $2y=3z$,

$$\therefore x=\frac{1}{3}y, \quad z=\frac{2}{3}y,$$

$$\therefore \frac{2x+3y}{z-y} = \frac{\frac{2}{3}y+3y}{\frac{2}{3}y-y} = \frac{\frac{11}{3}y}{-\frac{1}{3}y} = -11.$$

故答案为: -11.

18. 已知三个数 x , y , z 满足 $\frac{xy}{x+y}=\frac{1}{3}$, $\frac{yz}{y+z}=\frac{1}{4}$, $\frac{zx}{z+x}=\frac{1}{5}$, 则 $\frac{xyz}{xy+yz+zx}$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{1}{6}$

【解析】

【分析】 将 $\frac{xy}{x+y}=\frac{1}{3}$, $\frac{yz}{y+z}=\frac{1}{4}$, $\frac{zx}{z+x}=\frac{1}{5}$ 分别化简为 $3xyz=xz+yz$, $4xyz=xy+xz$, $5xyz=yz+xy$, 再将

三个式子相加得到 xyz 与 $xy+yz+xz$ 的关系, 代入所求式子即可求解.

【详解】 解: $\because \frac{xy}{x+y}=\frac{1}{3}$,

$$\therefore \frac{xyz}{xz+yz}=\frac{1}{3},$$

$$\therefore 3xyz=xz+yz \textcircled{1},$$

$$\therefore \frac{yz}{y+z}=\frac{1}{4},$$

$$\therefore \frac{xyz}{xy+xz} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore 4xyz = xy+xz \text{ ②},$$

$$\therefore \frac{zx}{z+x} = \frac{1}{5},$$

$$\therefore \frac{xyz}{yz+xy} = \frac{1}{5},$$

$$\therefore 5xyz = yz+xy \text{ ③},$$

由①+②+③得:

$$12xyz = 2xy+2yz+2xz,$$

$$\therefore xy+yz+xz = 6xyz,$$

$$\therefore \frac{xyz}{xy+yz+zx} = \frac{xyz}{6xyz} = \frac{1}{6},$$

故答案为: $\frac{1}{6}$.

【点睛】 本题考查分式的化简求值，解题的关键是利用题干给出的三个式子化简得出 xyz 与 $xy+yz+xz$ 的关系.

三、解答题

19. 因式分解: $4x^2 - 4xy + y^2 - 9$

【答案】 $(2x-y+3)(2x-y-3)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了因式分解，先由完全平方公式把前三项因式分解，再利用平方差公式因式分解即可.

【详解】 解: $4x^2 - 4xy + y^2 - 9$

$$= (2x-y)^2 - 3^2$$

$$= (2x-y+3)(2x-y-3).$$

20. 因式分解: $m^3 - m^2n - 4m + 4n$.

【答案】 $(m-n)(m+2)(m-2)$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解. 先分组, 再提公因式, 然后利用平方差公式继续分解即可.

【详解】 解: $m^3 - m^2n - 4m + 4n$

$$= m^2(m-n) - 4(m-n)$$

$$= (m-n)(m^2-4)$$

$$= (m-n)(m+2)(m-2).$$

21. 因式分解: $(x^2-x)^2 - 8(x^2-x) + 12$

【答案】 $(x-2)(x+1)(x-3)(x+2)$

【解析】

【分析】 本题考查因式分解, 先整体思想, 利用十字相乘法进行因式分解即可.

【详解】 解: 原式 $= (x^2-x-2)(x^2-x-6)$

$$= (x-2)(x+1)(x-3)(x+2).$$

22. 计算: $\left(-\frac{x}{y^2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{y^2}{x}\right)^3 \div \left(-\frac{y}{x}\right)^4$.

【答案】 $-\frac{x^3}{y^2}$

【解析】

【分析】 本题考查含乘方的分式乘除混合运算, 掌握好分式运算的法则是关键.

根据含乘方的分式乘除混合运算的法则进行计算即可.

【详解】 解: $\left(-\frac{x}{y^2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{y^2}{x}\right)^3 \div \left(-\frac{y}{x}\right)^4 = \frac{x^2}{y^4} \cdot \left(-\frac{y^6}{x^3}\right) \div \frac{y^4}{x^4} = \frac{x^2}{y^4} \left(-\frac{y^6}{x^3}\right) \cdot \frac{x^4}{y^4} = -\frac{x^3}{y^2}.$

23. 计算: $\frac{2a}{a^2-4} + \frac{a}{a-2} - \frac{1}{a+2}.$

【答案】 $\frac{a+1}{a-2}$

【解析】

【分析】 本题考查了分式的加减运算, 分式的加减运算先看是同分母加减还是异分母加减, 异分母加减关键是通分, 通分的关键是找最简公分母.

先将原式通分后化成同分母的分式再进行加减运算, 最后约分化简成最简分式.

$$\begin{aligned}
& \text{【详解】解: } \frac{2a}{a^2-4} + \frac{a}{a-2} - \frac{1}{a+2} \\
&= \frac{2a}{(a+2)(a-2)} + \frac{a(a+2)}{(a-2)(a+2)} - \frac{a-2}{(a+2)(a-2)} \\
&= \frac{2a+a^2+2a-(a-2)}{(a+2)(a-2)} \\
&= \frac{a^2+3a+2}{(a+2)(a-2)} \\
&= \frac{(a+1)(a+2)}{(a+2)(a-2)} \\
&= \frac{a+1}{a-2}.
\end{aligned}$$

24. 解方程: $\frac{x}{x-3} - 1 = \frac{x+2}{x^2-9}$.

【答案】 $x = -\frac{7}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查解分式方程，熟练掌握解分式方程的方法并检验是解题的关键．将原方程去分母后化为整式方程，解得 x 的值后进行检验即可．

【详解】解: $\frac{x}{x-3} - 1 = \frac{x+2}{x^2-9}$,

$$\frac{x}{x-3} - 1 = \frac{x+2}{(x-3)(x+3)},$$

两边同乘 $(x-3)(x+3)$ 得: $x(x+3) - (x+3)(x-3) = x+2$,

去括号: $x^2 + 3x - x^2 + 9 = x + 2$,

移项: $3x - x = -9 + 2$,

合并同类项: $2x = -7$,

系数化为1: $x = -\frac{7}{2}$.

检验: 将 $x = -\frac{7}{2}$ 代入 $(x-3)(x+3)$ 中, $(x-3)(x+3) \neq 0$.

$\therefore$ 该方程的解为 $x = -\frac{7}{2}$.

25. 北极航道的打通为中国和欧洲海运开辟了新航线, 北极航线的里程相比传统走苏伊士运河航线大大缩短,

节省了时间和燃油成本，每年可以节省上百亿的运费。某海运公司集装箱货轮从中国上海港出发，原来走苏伊士运河航线海运里程约 20000 公里，取道北极航线海运里程缩短 8000 公里，时间节省 20 天，因北极航线临近大陆，风浪较小，平均速度是原来的 1.2 倍。求集装箱货轮走北极航线平均每天航行多少公里？

【答案】集装箱货轮走北极航线平均每天航行 600 公里

【解析】

【分析】本题考查了分式方程的应用，理解题意并列出分式方程是解题的关键；设集装箱货轮原来走苏伊士运河航线平均每天航行 x 公里，则走北极航线平均每天航行 $1.2x$ 公里，表示出走两条航线的的时间，根据“时间节省 20 天”列出分式方程，解分式方程，最后检验即可。

【详解】解：设集装箱货轮原来走苏伊士运河航线平均每天航行 x 公里，则走北极航线平均每天航行 $1.2x$ 公里。

走苏伊士运河航线里程 20000 公里，航行时间为 $\frac{20000}{x}$ 天；

走北极航线里程为 $20000 - 8000 = 12000$ （公里），航行时间为 $\frac{12000}{1.2x}$ 天；

时间节省 20 天，故列方程： $\frac{20000}{x} - \frac{12000}{1.2x} = 20$ ，

化简 $\frac{20000}{x} - \frac{10000}{x} = 20$ ，

即 $\frac{10000}{x} = 20$ ，解得 $x = 500$ 。

经检验， $x = 500$ 是原分式方程的解，且符合实际意义。

北极航线平均每天航行里程： $1.2x = 1.2 \times 500 = 600$ （公里）。

答：集装箱货轮走北极航线平均每天航行 600 公里。

26. 阅读下面的材料，然后回答问题：

方程 $x + \frac{1}{x} = 2 + \frac{1}{2}$ 的解为 $x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}$ ；方程 $x + \frac{1}{x} = 3 + \frac{1}{3}$ 的解为 $x_1 = 3, x_2 = \frac{1}{3}$ ；方程 $x + \frac{1}{x} = 4 + \frac{1}{4}$ 的解为 $x_1 = 4, x_2 = \frac{1}{4}$ ……

(1) 观察上述方程的解，猜想关于 x 的方程 $x + \frac{1}{x} = 5 + \frac{1}{5}$ 的解是_____；

(2) 根据上述的规律，猜想关于 x 的方程 $x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a}$ 的解是_____；

(3) 由 (2) 可知，在解方程： $y + \frac{2y+5}{y+2} = \frac{17}{4}$ 时，可变形转化为 $x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a}$ 的形式求值，按要求写出

你的变形求解过程。

【答案】(1) $x_1 = 5, x_2 = \frac{1}{5}$

$$(2) \quad x_1 = a, x_2 = \frac{1}{a}$$

$$(3) \quad y_1 = 2, y_2 = -\frac{7}{4}$$

【解析】

【分析】此题考查了解分式方程，读懂题意并灵活变形是解题的关键.

(1) 根据已知材料即可得出答案；

(2) 根据已知材料即可得出答案；

(3) 把方程转化成 $y+2+\frac{1}{y+2}=4+\frac{1}{4}$ ，由材料得出 $y+2=4$ ， $y+2=\frac{1}{4}$ ，求出方程的解即可.

【小问 1 详解】

解：关于 x 的方程 $x+\frac{1}{x}=5+\frac{1}{5}$ 的解是： $x_1=5$ ， $x_2=\frac{1}{5}$ ，

故答案为： $x_1=5$ ， $x_2=\frac{1}{5}$ ；

【小问 2 详解】

关于 x 的方程 $x+\frac{1}{x}=a+\frac{1}{a}$ 的解是： $x_1=a$ ， $x_2=\frac{1}{a}$ ，

故答案为： $x_1=a$ ， $x_2=\frac{1}{a}$ ；

【小问 3 详解】

解： $y+\frac{2y+5}{y+2}=\frac{17}{4}$

$$y+\frac{2(y+2)+1}{y+2}=\frac{17}{4},$$

$$y+\frac{2(y+2)}{y+2}+\frac{1}{y+2}=\frac{17}{4},$$

$$y+2+\frac{1}{y+2}=4+\frac{1}{4},$$

$$\text{即 } y+2=4, \quad y+2=\frac{1}{4},$$

$$\text{解得： } y_1=2, \quad y_2=-\frac{7}{4},$$

经检验： $y_1=2$ ， $y_2=-\frac{7}{4}$ 是方程的解.

