

2025 学年第一学期初二年级数学学科练习卷

(2025 年 9 月)(150 分, 100 分钟)

一. 选择题 (每题 3 分, 共 18 分)

1. 下列各实数中, 为无理数的是 ()

- A. $-\sqrt[3]{8}$ B. 0 C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{22}{7}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据立方根, 算术平方根, 无理数的定义判断即可.

本题考查了无理数即无限不循环小数, 算术平方根, 立方根, 熟练掌握定义是解题的关键.

【详解】解: $\because -\sqrt[3]{8} = -2$ 是有理数, 不是无理数; 0 是有理数, 不是无理数, $\sqrt{2}$ 是无理数, $\frac{22}{7}$ 是有理数;

故选: C.

2. 一个细胞约有 0.000015 克. 数字 0.000015 用科学记数法可表示为 ()

- A. 0.15×10^{-4} B. 1.5×10^{-5} C. 15×10^{-6} D. 1.5×10^5

【答案】B

【解析】

【分析】此题主要考查科学记数法的表示方法, 掌握相关知识是解决问题的关键. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 当原数的绝对值大于 0 而小于 1 时, n 是负整数, n 的绝对值等于原数左边第一个非零数前面所有零的个数.

【详解】解: $0.000015 = 1.5 \times 10^{-5}$,

故选: B.

3. 若 $m = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 则 m 的值在 ()

- A. 0 和 $\frac{1}{2}$ 之间 B. $\frac{1}{2}$ 和 1 之间
C. 1 和 $\frac{3}{2}$ 之间 D. $\frac{3}{2}$ 和 2 之间

【答案】B

【解析】

【分析】 本题考查了无理数的估算，根据无理数估算的方法即可求解，掌握无理数估算的方法是解题的关键.

【详解】 解： $\because \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$,

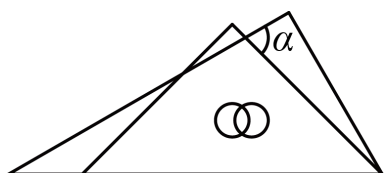
$$\therefore 2 < \sqrt{5} < 3,$$

$$\therefore 2-1 < \sqrt{5}-1 < 3-1, \text{ 即 } 1 < \sqrt{5}-1 < 2,$$

$$\therefore \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1,$$

故选： B .

4. 一副标准直角三角板 (分别含 30° 、 60° 角与 45° 、 45° 角), 如图所示叠放, 则图中 $\angle \alpha$ 的度数是 ()



A. 55°

B. 65°

C. 75°

D. 85°

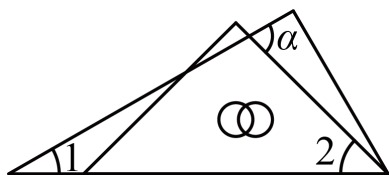
【答案】 C

【解析】

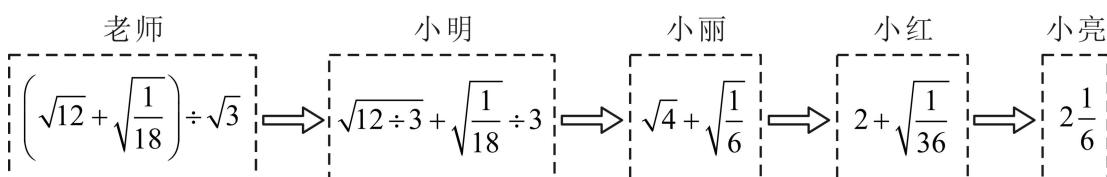
【分析】 本题考查三角形外角，掌握相关知识是解决问题的关键．由三角形外角可知 $\angle \alpha = \angle 1 + \angle 2 = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$.

【详解】 解： $\angle \alpha = \angle 1 + \angle 2 = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$,

故选： C .



5. 学习小组设计了一个 “接力游戏”，用合作的方式完成二次根式的混合运算，如图，老师把题目交给一位同学，他完成一步解答后交给第二位同学，依次进行，最后完成计算．规则是每人只能看到前一人传过来的式子．接力中，自己负责的式子出现错误的是 ()



- A. 小明和小丽 B. 小红和小亮 C. 小明和小亮 D. 小丽和小红

【答案】 D

【解析】

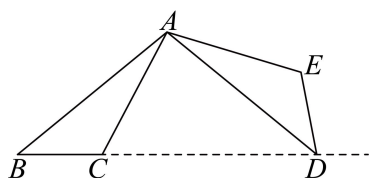
【分析】 本题主要考查了二次根式的混合运算，解题的关键是熟练掌握二次根式的运算法则. 利用二次根式的运算法则逐步进行判断即可.

【详解】 解：由 $\sqrt{12 \div 3} + \sqrt{\frac{1}{18} \div 3} = \sqrt{4} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{6}}$ 可得，小丽出现错误；

由 $\sqrt{4} + \sqrt{\frac{1}{6}} = 2 + \frac{\sqrt{6}}{6}$ 可得，小红出现错误；

故选： D.

6. 如图，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 106° ，若点 B 的对应点 D 恰好落在线段 BC 的延长线上 $\angle B$ 大小为 ()



- A. 33° B. 34° C. 36° D. 37°

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查了旋转的性质以及等腰三角形的性质，根据旋转的性质结合等腰三角形的性质求解是解题的关键. 根据旋转的性质可得出 $AB = AD, \angle BAD = 106^\circ$ ，再根据等腰三角形的性质可求出 $\angle B$ 的度数，此题得解.

【详解】 解：根据旋转的性质，可得： $AB = AD, \angle BAD = 106^\circ$ ，

$$\therefore \angle B = \angle ADB = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 106^\circ) = 37^\circ.$$

故选： D.

二. 填空题(每题 3 分， 共 57 分)

7. 整数 1 的平方根是_____.

【答案】 ± 1

【解析】

【分析】本题考查平方根，根据平方根的性质：一个正数有两个平方根，且它们互为相反数解答即可.

【详解】解：整数1的平方根是 ± 1 ,

故答案为： ± 1 .

8. 已知 $2m+2$ 的立方根是 2, $m+n$ 的算术平方根是 3. 若 $a = -\frac{1}{3}m+n$, 则 $\sqrt{a} =$ ____.

【答案】 $\sqrt{5}$

【解析】

【分析】本题考查了平方根和立方根的定义，注意算术平方根和平方根的区别. 根据算术平方根的定义和立方根的定义，列出关于 m, n 的方程，然后求 a 值，即可求出 $\sqrt{a}$ 的值.

【详解】解： $\because 2m+2$ 的立方根是 2,

$$\sqrt[3]{2m+2} = 2,$$

$$\therefore m = 3,$$

$\because m+n$ 的算术平方根是 3,

$$\therefore m+n = 9,$$

$$\therefore n = 6,$$

$$\therefore a = -\frac{1}{3}m+n = -\frac{1}{3} \times 3 + 6 = 5,$$

$$\therefore \sqrt{a} = \sqrt{5},$$

故答案为： $\sqrt{5}$.

9. 已知 m, n 都是实数，且满足 $|8+m| + \sqrt{1+n^2} = 1$ ，则 $(m+n)$ 的立方根是_____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】本题考查算术平方根，绝对值，立方根，掌握相关知识是解决问题的关键. 因为 $|8+m| \geq 0, \sqrt{1+n^2} \geq 1$ 且 $|8+m| + \sqrt{1+n^2} = 1$ ，可得 $8+m = 0, 1+n^2 = 1$ ，求出 m, n 后代入求值即可.

【详解】解： $\because |8+m| \geq 0, \sqrt{1+n^2} \geq 1$ ，且 $|8+m| + \sqrt{1+n^2} = 1$,

$$\therefore 8+m = 0, 1+n^2 = 1,$$

$$m = -8, n = 0,$$

$$\therefore \sqrt[3]{m+n} = \sqrt[3]{-8+0} = -2.$$

故答案为：-2.

10. 如果 $\sqrt[3]{2.37} \approx 1.333$, $\sqrt[3]{23.7} \approx 2.872$, 那么 $\sqrt[3]{2370}$ 约等于_____.

【答案】 13.33

【解析】

【分析】 根据立方根的性质，即可解答.

【详解】 解： $\because \sqrt[3]{2.37} \approx 1.333$,

$$\therefore \sqrt[3]{2370} = \sqrt[3]{2.37 \times 1000} \approx 1.333 \times 10 = 13.33,$$

故答案为：13.33.

【点睛】 本题考查了立方根，解决本题的关键是熟记立方根的性质.

11. 若 $\sqrt{28}$ 与最简二次根式 $\sqrt{a+2}$ 是同类二次根式，则 $a =$ _____.

【答案】 5

【解析】

【分析】 本题考查最简二次根式，同类二次根式，掌握相关知识是解决问题的关键. 将 $\sqrt{28}$ 化为最简二次根式后，利用化为最简二次根式后同类二次根式的被开方数相同列式计算即可.

【详解】 解： $\sqrt{28} = 2\sqrt{7}$,

$\therefore$ 它与最简二次根式 $\sqrt{a+2}$ 是同类二次根式，

$$\therefore a+2=7,$$

$$a=5.$$

故答案为：5.

12. 若 $\frac{\sqrt{1-x}}{2-|x|}$ 有意义，则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \leq 1$ 且 $x \neq -2$

【解析】

【分析】 本题考查求代数式有意义的条件，根据二次根式有意义和分式有意义的条件进行求解即可.

【详解】 解：由题意，得： $1-x \geq 0$ 且 $2-|x| \neq 0$,

解得： $x \leq 1$ 且 $x \neq -2$;

故答案为： $x \leq 1$ 且 $x \neq -2$.

13. 规定一种新运算 $a \otimes b = a^2 - \sqrt{2}b$, 如 $3 \otimes 2 = 3^2 - \sqrt{2} \times 2 = 9 - 2\sqrt{2}$, 则 $(2\sqrt{5} - 1) \otimes \sqrt{10} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $21 - 6\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 根据新定义直接代入求解即可得到答案;

【详解】 解: 由题意可得,

$$(2\sqrt{5} - 1) \otimes \sqrt{10} = (2\sqrt{5} - 1)^2 - \sqrt{2} \times \sqrt{10} = 20 - 4\sqrt{5} + 1 - 2\sqrt{5} = 21 - 6\sqrt{5},$$

故答案为: $21 - 6\sqrt{5}$;

【点睛】 本题考查根据新定义计算, 解题的关键读懂新定义.

14. 已知 $a = 4 + \sqrt{6}, b = 4 - \sqrt{6}$, 则 $a^2b - ab^2$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $20\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 本题考查因式分解, 二次根式的计算, 掌握算理是解决问题的关键. 将 $a^2b - ab^2$ 因式分解, 然后代入求值即可.

【详解】 解: $a^2b - ab^2$,

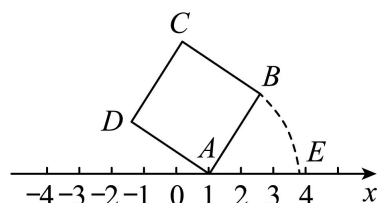
$$= ab(a - b),$$

$$= (4 + \sqrt{6})(4 - \sqrt{6})(4 + \sqrt{6} - 4 + \sqrt{6}),$$

$$= (16 - 6) \times 2\sqrt{6},$$

$$= 20\sqrt{6}.$$

15. 如图, 面积为 7 的正方形 $ABCD$ 的顶点 A 在数轴上, 且表示的数为 1, 若点 E 在数轴上, (点 E 在点 A 的右侧) 且 $AB = AE$, 则点 E 所表示的数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $\sqrt{7} + 1$

【解析】

【分析】先根据正方形的面积求出正方形的边长 $AB = \sqrt{7}$ ，即可求出 $AE = \sqrt{7}$ ，根据点 A 表示的数为 1，且点 E 在点 A 的右侧，即可求出 E 点所表示的数。

【详解】解：∵ 正方形 $ABCD$ 的面积为 7，

$$\therefore AB = \sqrt{7},$$

$$\therefore AB = AE,$$

$$\therefore AE = \sqrt{7},$$

∵ 点 A 表示的数为 1，且点 E 在点 A 的右侧，

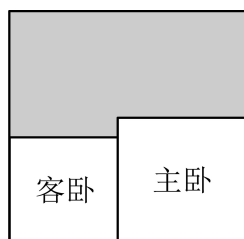
$$\therefore E \text{ 点所表示的数为 } 1 + \sqrt{7}.$$

故答案为： $1 + \sqrt{7}$.

【点睛】 本题主要考查算术平方根的应用，实数与数轴，解题的关键是根据正方形的面积求出

$$AE = AB = \sqrt{7}.$$

16. 如图为某正方形的房屋结构平面图，其中主卧(面积较大)与客卧都为正方形，它们的面积之和比其余面积(阴影部分)多 15m^2 ，则主卧与客卧的周长差_____ m .



【答案】 $4\sqrt{15}$

【解析】

【分析】 本题考查了二元一次方程的应用问题，完全平方公式，掌握解二元一次方程的方法是解题的关键. 假设主卧的边长为 $x\text{m}$ ，客卧的边长为 $y\text{m}$ ，且 $x > y$ ，根据面积列出方程求解即可.

【详解】解：假设主卧的边长为 $x\text{m}$ ，客卧的边长为 $y\text{m}$ ，且 $x > y$ ，

$$\text{根据题意得：} (x + y)^2 = 2(x^2 + y^2) - 15,$$

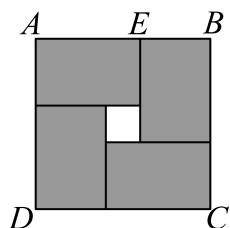
$$\text{整理得：} (x - y)^2 = 15,$$

$$\text{解得：} x - y = \sqrt{15} \text{ (负值已舍),}$$

$$\therefore \text{主卧与客卧的周长差为 } 4x - 4y = 4\sqrt{15}(\text{m}),$$

故答案为： $4\sqrt{15}$.

17. 如图，用 4 张一样大小的长方形纸片排成一个正方形 $ABCD$ ，长方形纸片的长 $AE = 3\sqrt{5}$ ，图中空白部分是一个面积为 5 的小正方形，则正方形 $ABCD$ 的面积为_____.



【答案】 80

【解析】

【分析】 本题考查了正方形面积，一元二次方程的应用，完全平方公式的应用，求出长方形的宽是解答关键.

设长方形的宽为 x ，表示出小正方形的边长，进而列出方程求解小正方形的边长，进而求出大正方形的边长，再利用正方形面积公式求解.

【详解】 解： 设长方形的宽为 x ，

$\therefore$ 小正方形的边长为 $3\sqrt{5} - x$

$\therefore$ 空白小正方形的面积为 $(3\sqrt{5} - x)^2 = 5$ ，

解得 $x = 2\sqrt{5}$ 或 $4\sqrt{5}$ （不符合题意），

小正方形的宽为 $3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$ ，

$\therefore AB = 3\sqrt{5} + \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$ ，

$\therefore$ 正方形 $ABCD$ 面积为 $4\sqrt{5} \times 4\sqrt{5} = 80$.

故答案为： 80.

18. 循环小数化分数： $-0.1\dot{6} =$ _____.

【答案】 $-\frac{1}{6}$

【解析】

【分析】 此题考查了一元一次方程的应用，掌握相关知识是解本题的关键. 设 $x = 0.1\dot{6} = 0.1666\cdots$ ，则 $10x = 1.6666\cdots$ ， $100x = 16.666\cdots$ ，利用两式相减即可求出 x 的值，则答案可求.

【详解】 解： 设 $x = 0.1\dot{6} = 0.1666\cdots$ ，

则 $10x = 1.6666\cdots$ ①, $100x = 16.666\cdots$ ②,

则由 ② - ① 得, $90x = 15$,

$$\text{即 } x = \frac{1}{6},$$

$$-0.1\dot{6} = -\frac{1}{6},$$

故答案为: $-\frac{1}{6}$.

19. 化简二次根式: $b\sqrt{-\frac{b+1}{b^2}} =$ _____.

【答案】 $-\sqrt{-b-1}$

【解析】

【分析】 先判断 b 的取值范围, 再利用二次根式的性质化简即可.

【详解】 解: $\because -\frac{b+1}{b^2} \geq 0$,

$$\therefore b \leq -1,$$

$$\therefore b\sqrt{-\frac{b+1}{b^2}} = \frac{b}{|b|}\sqrt{-b-1} = -\sqrt{-b-1},$$

故答案为: $-\sqrt{-b-1}$.

【点睛】 本题主要考查了二次根式的化简, 熟知二次根式的性质是解题的关键.

20. 已知, c 是 $\sqrt{10}$ 的小数部分, 比较大小: c _____ $\frac{1}{7}$ (填 “>”、“<” 或 “=”).

【答案】 >

【解析】

【分析】 本题主要考查了无理数的小数部分表示, 无理数的大小比较, 解题的关键是掌握无理数大小的比较.

表示出无理数的小数部分, 利用倒数法和平方法比较大小即可.

【详解】 解: $\because \sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{16}$,

$$\therefore \sqrt{10} \text{ 的小数部分为 } \sqrt{10} - 3,$$

$$\frac{1}{\sqrt{10}-3} = \sqrt{10} + 3, \quad \frac{1}{7} \text{ 的倒数为 } 7,$$

$$(\sqrt{10}+3)^2=10+9+6\sqrt{10}=19+6\sqrt{10},$$

$$7^2=49=19+30,$$

$$\therefore (6\sqrt{10})^2=360, 30^2=900,$$

$$\therefore 6\sqrt{10}<30, \text{ 则 } 19+6\sqrt{10}<19+30=49,$$

$$\text{即 } (\sqrt{10}+3)^2<7^2,$$

$$\text{又 } \because \sqrt{10}+3>0,$$

$$\therefore \sqrt{10}+3<7$$

$$\therefore \sqrt{10}-3>\frac{1}{7},$$

故答案为: $>$.

21. 已知 a 、 b 为一等腰三角形的两边长, 且满足等式 $2\sqrt{3a-6}+3\sqrt{2-a}=b-4$, 则此等腰三角形的周长是_____.

【答案】 10

【解析】

【分析】根据被开方数大于等于 0 列式求出 a 的值, 然后代入求出 b 的值, 再根据三角形的周长公式分情况讨论求解.

【详解】解: 根据题意得, $3a-6 \geq 0$ 且 $2-a \geq 0$,

解得 $a \geq 2$ 且 $a \leq 2$,

所以, $a=2$,

$$b-4=0,$$

解得 $b=4$,

①当腰为 2, 底为 4 时不能构成三角形;

②当腰为 4, 底为 2 时, 周长为 $4+4+2=10$.

故答案为: 10.

【点睛】本题考查了二次根式有意义的条件、三角形的三边关系以及等腰三角形的性质, 熟练掌握性质是解题的关键.

22. 已知等腰三角形的一个外角是 40° , 那么这个等腰三角形的底角等于_____度.

【答案】 20

【解析】

【分析】分等腰三角形的顶角的外角为 40° 和等腰三角形的底角的外角为 40° 两种情况，再根据等腰三角形的性质、三角形的内角和定理即可得.

【详解】解：当等腰三角形的顶角的外角为 40° ，则顶角等于 140° ，

所以底角等于 $\frac{1}{2} \times (180^\circ - 140^\circ) = 20^\circ$ ；

当等腰三角形的底角的外角为 40° ，则底角等于 140° ，

$\therefore 140^\circ + 140^\circ > 180^\circ$ ，

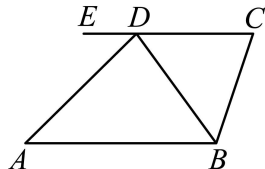
$\therefore$ 不满足三角形的内角和定理，不成立；

综上，这个等腰三角形的底角等于 20° 度，

故答案为：20.

【点睛】本题考查了等腰三角形的性质，学会运用分类讨论的思想解决问题，熟练掌握等腰三角形的性质和三角形的内角和定理是解题关键.

23. 如图，已知 $AB \parallel EC$ ， BD 平分 $\angle ABC$ ，交 EC 于点 D ， $\angle ADB = 2\angle ADE$ ， $\angle C = 72^\circ$ ，则 $\angle A$ 的度数为_____.



【答案】 42°

【解析】

【分析】本题考查平行线的性质，角度的和差，角平分线，熟练掌握平行线的性质是解题的关键. 利用 $AB \parallel EC$ ，得出 $\angle A = \angle ADE$ ， $\angle CDB = \angle ABD$ ， $\angle ABC + \angle C = 180^\circ$ ，则可求出 $\angle ABC$ ，利用 BD 平分 $\angle ABC$ ，求出 $\angle ABD$ ，则可得 $\angle CDB$ ，利用 $\angle ADB = 2\angle ADE$ ，可求出 $\angle ADE$ ，即可求解.

【详解】解： $\because AB \parallel EC$ ，

$\therefore \angle A = \angle ADE$ ， $\angle CDB = \angle ABD$ ， $\angle ABC + \angle C = 180^\circ$ ，

$\because \angle C = 72^\circ$ ，

$\therefore \angle ABC = 180^\circ - \angle C = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$ ，

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$ ，

$\therefore \angle ABD = \angle CBD = 54^\circ$ ，

$$\therefore \angle CDB = \angle ABD = 54^\circ,$$

$$\therefore \angle EDB = 180^\circ - \angle CDB = 180^\circ - 54^\circ = 126^\circ,$$

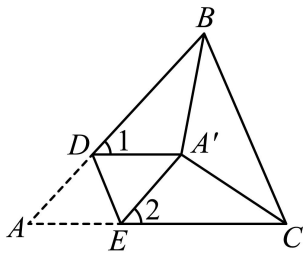
$$\therefore \angle ADB = 2\angle ADE,$$

$$\therefore \angle ADE = \frac{1}{3}\angle EDB = 42^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle ADE = 42^\circ,$$

故答案为: 42° .

24. 如图, 将纸片 ABC 沿 DE 折叠, 使点 A 落在点 A' 处, 且 $A'B$ 平分 $\angle ABC$, $A'C$ 平分 $\angle ACB$, 若 $\angle 1 = 44^\circ$, $\angle 2 = 46^\circ$, 则 $\angle BA'C$ 的度数为_____.

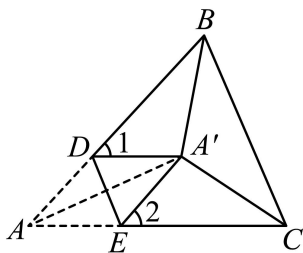


【答案】 112.5°

【解析】

【分析】 本题考查三角形的内角和定理、角平分线的定义、三角形的外角的性质等知识, 灵活运用所学知识, 学会添加常用辅助线是解答本题的关键. 连接 AA' , 根据折叠的性质及三角形外角的性质求出 $\angle BAC = 45^\circ$, 再根据三角形内角和定理可知 $\angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$, 由 $A'B$ 平分 $\angle ABC$, $A'C$ 平分 $\angle ACB$ 即可解决问题.

【详解】 解: 如图, 连接 AA' ,



$\because$ 沿 DE 折叠,

$$\therefore \angle DAA' = \angle DA'A, \quad \angle EAA' = \angle EA'A,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle DAA' + \angle DA'A = 2\angle DAA', \quad \angle 2 = \angle EAA' + \angle EA'A = 2\angle EAA',$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 2\angle DAA' + 2\angle EAA' = 2\angle BAC = 44^\circ + 46^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ,$$

$\therefore A'B$ 平分 $\angle ABC$, $A'C$ 平分 $\angle ACB$,

$$\therefore \angle A'BC = \frac{1}{2}\angle ABC, \quad \angle A'CB = \frac{1}{2}\angle ACB,$$

$$\therefore \angle A'BC + \angle A'CB = \frac{1}{2} \times 135^\circ = 67.5^\circ,$$

$$\therefore \angle BA'C = 180^\circ - 67.5^\circ = 112.5^\circ,$$

故答案为: 112.5° .

25. 请先在草稿纸上计算下列四个式子的值: ① $\sqrt{1^3}$; ② $\sqrt{1^3+2^3}$; ③ $\sqrt{1^3+2^3+3^3}$; ④

$\sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3}$. 观察计算的结果, 由发现的规律得出 $\sqrt{1^3+2^3+\cdots+n^3} = \underline{\hspace{2cm}}$ (用含 n 的代数式表示).

【答案】 $\frac{n(n+1)}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的性质与化简, 规律探索, 掌握二次根式的性质和化简方法, 发现代数式所呈现的规律是正确解答的关键. 先计算出四个代数式的值, 发现规律后进行求解即可.

【详解】 解: ① $\sqrt{1^3} = 1 = 1$,

② $\sqrt{1^3+2^3} = \sqrt{1+8} = \sqrt{9} = 3 = 1+2$,

③ $\sqrt{1^3+2^3+3^3} = \sqrt{1+8+27} = \sqrt{36} = 6 = 1+2+3$,

④ $\sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3} = \sqrt{1+8+27+64} = \sqrt{100} = 10 = 1+2+3+4$,

$$\sqrt{1^3+2^3+\cdots+n^3} = 1+2+3+\cdots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

故答案为: $\frac{n(n+1)}{2}$.

三. 解答题(共 75 分)

26. 计算: $(-1)^3 + |1-\sqrt{2}| + \sqrt[3]{-27} + \sqrt{25}$.

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了立方根与算术平方根、实数的混合运算, 熟练掌握运算法则是解题关键. 先计算有理数的乘方、立方根与算术平方根, 再计算实数的加减法即可得.

【详解】解：原式 $= -1 + \sqrt{2} - 1 + (-3) + 5$

$$= -1 + \sqrt{2} - 1 - 3 + 5$$

$$= \sqrt{2}.$$

27. 计算: $\sqrt{6\frac{2}{5}} - 10\sqrt{0.4} + 4\sqrt{\frac{1}{40}}$

【答案】 $-\sqrt{10}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的混合运算，二次根式的化简，解题的关键是掌握二次根式的运算法则. 先对各个二次根式化简，再利用二次根式的加减运算法则进行求解即可.

【详解】解： $\sqrt{6\frac{2}{5}} - 10\sqrt{0.4} + 4\sqrt{\frac{1}{40}}$

$$= \sqrt{\frac{32}{5}} - 10\sqrt{\frac{2}{5}} + \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$= 4\sqrt{\frac{2}{5}} - 10\sqrt{\frac{2}{5}} + \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$= -5\sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{5} \times 25}$$

$$= -\sqrt{10}.$$

28. 计算: $3\sqrt{2\frac{2}{3}} \times \left(+\frac{1}{6}\sqrt{15}\right) \div \left(-\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$

【答案】 -5

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的乘除混合运算，解题的关键是熟练掌握二次根式的运算法则. 根据二次根式乘除混合运算法则进行求解即可.

【详解】解： $3\sqrt{2\frac{2}{3}} \times \left(+\frac{1}{6}\sqrt{15}\right) \div \left(-\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$

$$= 3\sqrt{\frac{8}{3}} \times \left(\frac{\sqrt{15}}{6}\right) \times \left(-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8}{3} \times 15 \times \frac{5}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2} \times 10$$

$$= -5.$$

29. 计算： $\left(\frac{2}{b}\sqrt{ab^3} - 3b\sqrt{\frac{a}{b}}\right) \div \sqrt{\frac{b}{a}} (b > 0)$

【答案】 $-a$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的混合运算，掌握算理是解决问题的关键。先计算括号里的减法，化为最简二次根式后合并同类二次根式，再计算括号外除法即可。

【详解】 解： $\left(\frac{2}{b}\sqrt{ab^3} - 3b\sqrt{\frac{a}{b}}\right) \div \sqrt{\frac{b}{a}},$

$$= \left(\frac{2}{b} \cdot b\sqrt{ab} - 3b \cdot \frac{1}{b}\sqrt{ab}\right) \div \sqrt{\frac{b}{a}},$$

$$= (2\sqrt{ab} - 3\sqrt{ab}) \div \sqrt{\frac{b}{a}},$$

$$= -\sqrt{ab} \div \sqrt{\frac{b}{a}},$$

$$= -\sqrt{ab} \cdot \sqrt{\frac{a}{b}},$$

$$= -a.$$

30. 计算： $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} \cdot \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{a-b} \div \frac{1}{a+2\sqrt{ab}+b}$

【答案】 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

【解析】

【分析】 本题考查分式的运算，二次根式的计算，掌握算理是解决问题的关键。将分子分母因式分解后，约分即可。

$$\begin{aligned}
 & \text{【详解】解: } \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} \cdot \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{a-b} \div \frac{1}{a+2\sqrt{ab}+b}, \\
 &= \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \cdot \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \cdot (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2, \\
 &= \sqrt{a}-\sqrt{b}.
 \end{aligned}$$

31. 某街区在进行改造时, 将原来 900 m^2 的正方形场地改建成面积不变的长方形场地, 且其长、宽比为 $5:4$.

(1) 原正方形场地的周长为_____ m.

(2) 如果把原来正方形场地的金属板围墙全部循环利用(不改变高度、厚度、不计加工损耗)那么这些金属板是否够用? 试利用所学知识说明理由.

【答案】(1) 120 (2) 这些金属板不够用, 理由见详解

【解析】

【分析】本题主要考查了求一个数的算术平方根, 列一元二次方程解决几何问题, 二次根式的大小比较, 解题的关键是掌握二次根式的运算.

(1) 利用求一个数的算术平方根进行求解即可;

(2) 设长方形的长为 $5x$, 宽为 $4x$, 根据面积相等列出方程求解得出 $x = 3\sqrt{5}$, 再求出周长和正方形周长比较即可.

【小问 1 详解】

解: 原正方形场地的周长为 $4\sqrt{900} = 4 \times 30 = 120\text{m}$,

故答案为: 120;

【小问 2 详解】

解: 这些金属板不够用, 理由如下:

设长方形的长为 $5x$, 宽为 $4x$, 根据题意得,

$$5x \cdot 4x = 900,$$

解得 $x = 3\sqrt{5}$, (负值已舍)

$$\therefore \text{长方形的周长为 } 2(5x + 4x) = 18x = 18 \times 3\sqrt{5} = 54\sqrt{5}\text{m},$$

$$\therefore (54\sqrt{5})^2 = 14580, 120^2 = 14400,$$

$$\therefore 14580 > 14400,$$

$$\therefore 54\sqrt{5} > 120,$$

$\therefore$ 这些金属板不够用.

32. 据研究, 高空抛物下落的时间 t (单位: s) 和高度 h (单位: m) 近似满足公式 $t = \sqrt{\frac{h}{5}}$ (不考虑风速的影响).

(1) 求从 45m 高空抛物到落地时间;

(2) 已知高空坠物动能 W (单位: J) $= 10 \times$ 物体质量 (单位: kg) $\times$ 高度 (单位: m), 某质量为 0.1kg 的玩具被抛出后经过 4s 后落在地上, 这个玩具产生的动能会伤害到楼下的行人吗? 请说明理由 (注: 伤害无防护人体只需要 65J 的动能).

【答案】 (1) 3s

(2) 这个玩具产生的动能会伤害到楼下的行人.

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的应用, 通过具体情境考查二次根式, 理解公式, 正确运算代入求值是解决本题的关键.

(1) 把 45m 代入公式即可;

(2) 求出 h , 代入动能计算公式即可求出.

【小问 1 详解】

解: 由题意知 $h = 45\text{m}$,

$$\therefore t = \sqrt{\frac{45}{5}} = 3(\text{s}),$$

故从 45m 高空抛物到落地时间为 3s;

【小问 2 详解】

解: 这个玩具产生的动能会伤害到楼下的行人,

$$\text{理由: 当 } t = 4\text{s} \text{ 时, } 4 = \sqrt{\frac{h}{5}},$$

$$\therefore h = 80\text{m},$$

$$\text{这个玩具产生的动能} = 10 \times 0.1 \times 80 = 80\text{J} > 65\text{J},$$

$\therefore$ 这个玩具产生的动能会伤害到楼下的行人.

33. 在数学学习活动中, 小明和他的小伙伴们遇到一个问题: 已知 $a = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$, 求 $2a^2 - 8a + 1$ 的

值. 经过思考和探索, 他的解答如下.

$$\therefore a = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2-\sqrt{3},$$

$$\therefore a-2 = -\sqrt{3},$$

$$\therefore (a-2)^2 = 3, \text{ 即 } a^2 - 4a + 4 = 3$$

$$\therefore a^2 - 4a = -1,$$

$$\therefore 2a^2 - 8a + 1 = 2(a^2 - 4a) + 1 = 2 \times (-1) + 1 = -1$$

请你根据小明的解题过程, 【解决下列问题】:

(1) 计算: $\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2025}+\sqrt{2024}}$

(2) 若 $a = \frac{1}{\sqrt{5}-2}$, 求 $a^4 - 4a^3 - 3a + 3$ 的值.

【答案】(1) 44

(2) $6 + \sqrt{5}$

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的混合运算, 求代数式的值, 熟练掌握二次根式的分母有理化是解题关键.

(1) 将各式分母有理化后, 合并同类二次根式即可;

(2) 根据阅读材料化简可得 $a^2 - 4a = 1$, 将所求代数式变形为含 $a^2 - 4a$ 的式子, 代入求值即可.

【小问1详解】

解: $\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2}-1,$

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \sqrt{3}-\sqrt{2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2025}+\sqrt{2024}} = \frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2024}}{(\sqrt{2025}+\sqrt{2024})(\sqrt{2025}-\sqrt{2024})} = \sqrt{2025}-\sqrt{2024},$$

$$\therefore \text{原式} = \sqrt{2}-1 + \sqrt{3}-\sqrt{2} + \sqrt{4}-\sqrt{3} + \cdots + \sqrt{2025}-\sqrt{2024},$$

$$= \sqrt{2025} - 1,$$

$$= 45 - 1,$$

$$= 44;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \because a = \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} = \sqrt{5}+2,$$

$$\therefore a-2 = \sqrt{5},$$

$$\therefore (a-2)^2 = 5, \text{ 即 } a^2 - 4a + 4 = 5$$

$$\therefore a^2 - 4a = 1,$$

$$\therefore a^4 - 4a^3 - 3a + 3,$$

$$= a^2(a^2 - 4a) - 3a + 3,$$

$$= a^2 - 3a + 3,$$

$$= a^2 - 4a + a + 3,$$

$$= 1 + a + 3,$$

$$= 4 + a,$$

$$= 4 + \sqrt{5} + 2,$$

$$= 6 + \sqrt{5}.$$

34. 如图，已知 $\triangle ABC$ 的面积是 30，请完成下列问题：

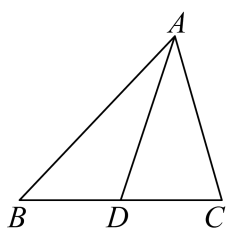


图1

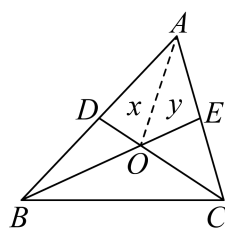


图2

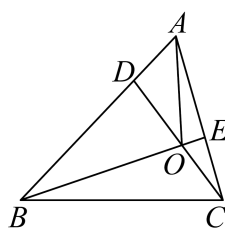


图3

(1) 如图 1， AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，则 $S_{\triangle ABD}$ _____ $S_{\triangle ACD}$ (填“>”、“<”或“=”)

(2) 如图 2，若 CD 、 BE 分别是 $\triangle ABC$ 的中线，求四边形 $ADOE$ 的面积可以用如下方法：

连接 AO ，由 $AD = DB$ 得 $S_{\triangle AOD} = S_{\triangle BDO}$ ，同理，可得 $S_{\triangle CEO} = S_{\triangle AEO}$ 。

设 $S_{\triangle ADO} = x$, $S_{\triangle AEO} = y$, 则 $S_{\triangle BDO} = x$, $S_{\triangle CEO} = y$.

由题意得 $S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = 15$, $S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = 15$

可列方程组 $\begin{cases} 2x + y = 15 \\ x + 2y = 15 \end{cases}$, 解得_____;

通过解这个方程组可得四边形 $ADOE$ 的面积为_____;

(3) 如图 3, $\frac{AD}{DB} = \frac{1}{3}$, $\frac{CE}{AC} = \frac{2}{5}$, 请直接写出四边形 $ADOE$ 的面积:_____.

【答案】(1) = (2) $\begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases}$, 10

(3) $\frac{207}{34}$

【解析】

【分析】主要考查了等底同高的三角形面积相等, 高相同的三角形的面积比等于底的比, 二元一次方程组的解法. 准确理解题干中的方法并正确应用是解题的关键.

(1) 利用三角形的面积公式计算即可得出结论;

(2) 解方程组求解即可, 四边形 $ADOE$ 的面积为 $x + y$;

(3) 利用 (2) 中的方法, 设 $S_{\triangle ADO} = x$, $S_{\triangle CEO} = 2y$, 则 $S_{\triangle BDO} = 3x$, $S_{\triangle AEO} = 3y$, 利用已知条件列出方程组, 解方程组即可得出结论.

【小问 1 详解】

解: 过点 A 作 $AE \perp BC$ 于点 E , 如图 1,

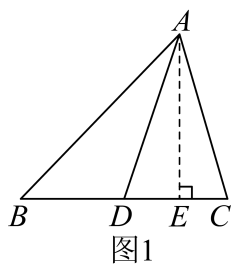


图1

$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的中线,

$\therefore BD = DC$.

$\because S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times BD \times AE$, $S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \times CD \times AE$,

$\therefore S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ADC}$.

故答案为：=；

【小问2详解】

$$\text{解: } \begin{cases} 2x+y=15 \\ x+2y=15 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x=5 \\ y=5 \end{cases}$$

$\therefore$ 四边形 $ADOE$ 的面积为: $5+5=10$.

$$\text{故答案为: } \begin{cases} x=5 \\ y=5 \end{cases}, 10;$$

【小问3详解】

$$\text{解: } \because \frac{AD}{DB} = \frac{1}{3}, \quad \frac{CE}{AC} = \frac{2}{5},$$

$\therefore$ 设 $S_{\triangle ADO} = x$, $S_{\triangle CEO} = 2y$, 则 $S_{\triangle BDO} = 3x$, $S_{\triangle AEO} = 3y$,

$$\because \frac{AD}{DB} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore S_{\triangle ACD} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC} = \frac{15}{2},$$

$$\because \frac{CE}{AC} = \frac{2}{5},$$

$$\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{3}{5} S_{\triangle ABC} = 18$$

$$\because S_{\triangle ABE} = S_{\triangle BDO} + S_{\text{四边形}ADOE}, \quad S_{\triangle ACD} = S_{\triangle CEO} + S_{\text{四边形}ADOE},$$

$$\therefore \text{可列方程组: } \begin{cases} 4x+3y=18 \\ x+5y=\frac{15}{2} \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x=\frac{135}{34} \\ y=\frac{12}{17} \end{cases}.$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ADOE} = S_{\triangle ADO} + S_{\triangle AEO} = x + 3y = \frac{207}{34}.$$

35. 阅读下面内容:我们已经学习了《二次根式》和《乘法公式》,可以发现:当 $a > 0$, $b > 0$ 时,

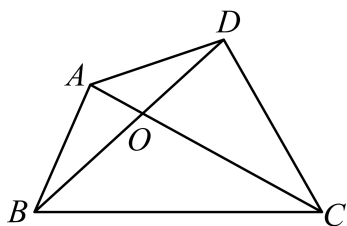
$\therefore (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0, \therefore a + b \geq 2\sqrt{ab}$, 当且仅当 $a = b$ 时取等号. 请利用上述结论解决以下

问题:

(1) 当 $x > 0$ 时, $x + \frac{1}{x}$ 的最小值为____, 当 $x < 0$ 时, $x + \frac{1}{x}$ 的最大值为_____.

(2) 当 $x > 0$ 时, 求 $y = \frac{x^2 - 2x + 16}{x}$ 的最小值. (写出必要过程)

(3) 如图, 四边形 $ABCD$ 的对角线 AC , BD 相交于点 O , $\triangle AOB$ 、 $\triangle COD$ 的面积分别为 2 和 9, 求四边形 $ABCD$ 面积的最小值. (写出必要过程)



【答案】(1) 2, -2

(2) 6 (3) $6\sqrt{2} + 11$

【解析】

【分析】 本题考查了配方法在二次根式、分式及四边形面积计算中的应用与拓展, 读懂阅读材料中的方法并正确运用是解题的关键.

(1) 利用配方法结合二次根式求出最值即可;

(2) 对分式进行变形得出 $y = \left(x + \frac{16}{x}\right) - 2$ 利用 (1) 的结论求出最值即可;

(3) 设 $S_{\triangle BOC} = x$, 根据等高三角形得出 $S_{\triangle AOD} = \frac{18}{x}$, 然后利用结论进行求最值即可.

【小问 1 详解】

解: 当 $x > 0$ 时,

$$x + \frac{1}{x} = (\sqrt{x})^2 - 2 + \left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2 + 2 = \left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2 + 2,$$

$$\because \left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2 \geq 0,$$

$$\therefore \left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2 + 2 \geq 2,$$

$$\text{即 } x + \frac{1}{x} \geq 2,$$

当 $x = \frac{1}{x}$ 时, $x + \frac{1}{x}$ 取最小值,

解得, 当 $x = 1$ 时, (负值已舍), $x + \frac{1}{x}$ 的最小值为 2;

当 $x < 0$ 时, $x + \frac{1}{x} = -\left\{-x + \left(-\frac{1}{x}\right)\right\}$,

即当 $-x > 0$ 时, $-x + \left(-\frac{1}{x}\right)$ 最小值为 2,

$\therefore$ 当 $x < 0$ 时, $x + \frac{1}{x}$ 的最大值为 -2 ;

故答案为: 2, -2 ;

【小问 2 详解】

解: $y = \frac{x^2 - 2x + 16}{x} = x - 2 + \frac{16}{x} = \left(x + \frac{16}{x}\right) - 2$,

根据 (1) 可得, 当 $x = \frac{16}{x}$ 时, $x + \frac{16}{x}$ 有最小值,

解得 $x = 4$, (负值已舍),

$\therefore y = \frac{x^2 - 2x + 16}{x}$ 的最小值为 $\left(4 + \frac{16}{4}\right) - 2 = 6$;

【小问 3 详解】

解: 设 $S_{\triangle BOC} = x$,

根据等高三角形可知: $S_{\triangle BOC} : S_{\triangle COD} = S_{\triangle AOB} : S_{\triangle AOD}$,

$\therefore x : 9 = 2 : S_{\triangle AOD}$,

$\therefore S_{\triangle AOD} = \frac{18}{x}$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积为 $2 + 9 + x + \frac{18}{x} = \left(x + \frac{18}{x}\right) + 11$,

当 $x = \frac{18}{x}$ 时, $x + \frac{18}{x}$ 有最小值,

解得 $x = 3\sqrt{2}$, (负值已舍),

$\therefore \left(x + \frac{18}{x}\right) + 11 = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 11 = 6\sqrt{2} + 11$,

∴ 四边形 $ABCD$ 面积的最小值为 $6\sqrt{2} + 11$.

36. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 点 D 是边 AB 上一点, $\angle BCD = \angle A$.

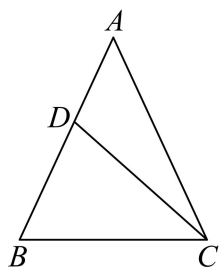


图1

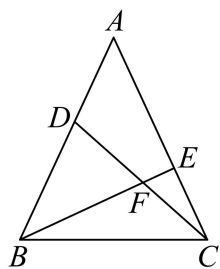
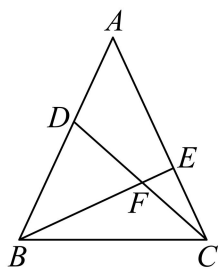


图2



备用图

(1) 如图 1, 试说明 $CD = CB$ 的理由;

(2) 如图 2, 过点 B 作 $BE \perp AC$, 垂足为点 E , BE 与 CD 相交于点 F .

①试说明 $\angle BCD = 2\angle CBE$ 的理由;

②如果 $\triangle BDF$ 是等腰三角形, 求 $\angle A$ 的度数.

【答案】(1) 见解析 (2) ①见解析; ② 45° 或 36°

【解析】

【分析】本题考查等腰三角形的判定及性质, 三角形的内角和定理及外角的性质, 结合图形分情况讨论是解决问题的关键.

(1) 根据等腰三角形的性质可得 $\angle ABC = \angle ACB$, 再利用三角形的外角性质可得 $\angle BDC = \angle A + \angle ACD$, 从而可得 $\angle BDC = \angle ACB$, 然后根据等量代换可得 $\angle ABC = \angle BDC$. 再根据等角对等边可得 $CD = CB$, 即可解答;

(2) ①根据垂直定义可得 $\angle BEC = 90^\circ$, 从而可得 $\angle CBE + \angle ACB = 90^\circ$, 然后设 $\angle CBE = \alpha$, 则 $\angle ACB = 90^\circ - \alpha$, 利用 (1) 的结论可得 $\angle ACB = \angle ABC = \angle BDC = 90^\circ - \alpha$, 最后利用三角形内角和定理可得 $\angle BCD = 2\alpha$, 即可解答;

②根据三角形的外角性质可得 $\angle BFD = 3\alpha$, 然后分三种情况: 当 $BD = BF$ 时; 当 $DB = DF$ 时; 当 $FB = FD$ 时; 分别进行计算即可解答.

【小问 1 详解】

解: $\because AB = AC$,

$\therefore \angle ABC = \angle ACB$,

$\because \angle BDC$ 是 $\triangle ADC$ 的一个外角,

$\therefore \angle BDC = \angle A + \angle ACD$,

$\therefore \angle ACB = \angle BCD + \angle ACD$, $\angle BCD = \angle A$,

$$\therefore \angle BDC = \angle ACB ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle BDC .$$

$$\therefore CD = CB ;$$

【小问 2 详解】

解：① $\because BE \perp AC ,$

$$\therefore \angle BEC = 90^{\circ} ,$$

$$\therefore \angle CBE + \angle ACB = 90^{\circ} ,$$

设 $\angle CBE = a ,$ 则 $\angle ACB = 90^{\circ} - a ,$

$$\therefore \angle ACB = \angle ABC = \angle BDC = 90^{\circ} - a ,$$

$$\therefore \angle BCD = 180^{\circ} - \angle BDC - \angle ABC = 180^{\circ} - (90^{\circ} - a) - (90^{\circ} - a) = 2a ,$$

$$\therefore \angle BCD = 2\angle CBE ;$$

② $\because \angle BFD$ 是 $\triangle CBF$ 的一个外角,

$$\therefore \angle BFD = \angle CBE + \angle BCD = a + 2a = 3a ,$$

分三种情况:

当 $BD = BF$ 时,

$$\therefore \angle BDC = \angle BFD = 3a ,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle ABC = \angle BDC = 90^{\circ} - a ,$$

$$\therefore 90^{\circ} - a = 3a ,$$

$$\therefore a = 22.5^{\circ} ,$$

$$\therefore \angle A = \angle BCD = 2a = 45^{\circ} ;$$

当 $DB = DF$ 时,

$$\therefore \angle DBE = \angle BFD = 3a ,$$

$$\therefore \angle DBE = \angle ABC - \angle CBE = 90^{\circ} - a - a = 90^{\circ} - 2a ,$$

$$\therefore 90^{\circ} - 2a = 3a ,$$

$$\therefore a = 18^{\circ} ,$$

$$\therefore \angle A = \angle BCD = 2a = 36^{\circ} ;$$

当 $FB = FD$ 时,

$$\therefore \angle DBE = \angle BDF ,$$

$$\therefore \angle BDF = \angle ABC > \angle DBF ,$$

$$\therefore \text{不存在 } FB = FD ,$$

综上所述：如果 BDF 是等腰三角形， $\angle A$ 的度数为 45° 或 36° .