

2025-2026 学年七年级数学上学期第一次月考卷

提升卷·全解全析

(考试时间: 100 分钟 试卷满分: 150 分)

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。
4. 测试范围: 沪教版五四制 2024 七年级上册 10.1~11.2。

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 共 24 分. 下列各题四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题卡的相应位置上.)

1. 下列各式: $-\frac{1}{2}mn$, m , 8 , $\frac{1}{a}$, x^2+2x+6 , $\frac{2x-y}{5}$, $\frac{x^2+4y}{\pi}$, $y^3-5y+\frac{1}{y}$, 其中整式有 ()
- A. 3 个 B. 4 个 C. 5 个 D. 6 个

【答案】D

【分析】本题考查了整式的定义.

根据整式的定义 (分母不含字母的单项式或整式), 逐一判断各代数式是否为整式.

【详解】解: $-\frac{1}{2}mn$: 分母为数字 2, 是单项式, 属于整式;

m : 是单项式, 属于整式;

8 : 常数项, 是单项式, 属于整式;

$\frac{1}{a}$: 分母含字母 a , 不属于整式;

x^2+2x+6 : 是整式, 属于整式;

$\frac{2x-y}{5}$: 分母为数字 5, 属于整式;

$\frac{x^2+4y}{\pi}$: 分母为常数 π , 属于整式;

$y^3-5y+\frac{1}{y}$: 含分母 y 的项 $\frac{1}{y}$, 不属于整式.

综上, 整式有 6 个,

故选 D.

2. 下列计算正确的是 ()

A. $a^2 \cdot a^5 = a^{10}$

B. $(a^2)^5 = a^7$

C. $(-3a^2b)^2 = 9a^4b$

D. $(-2xy^2) \cdot 3x^2y = -6x^3y^3$

【答案】D

【分析】本题考查幂的运算性质，包括同底数幂的乘法、幂的乘方、积的乘方以及单项式的乘法，利用幂的运算性质，逐一验证各选项的正确性.

【详解】解：A、同底数幂相乘，底数不变，指数相加，应为 $a^2 \cdot a^5 = a^7$ ，该选项错误，不符合题意；

B、幂的乘方，底数不变，指数相乘，应为 $(a^2)^5 = a^{10}$ ，该选项错误，不符合题意；

C、积的乘方，需将每个因式分别平方，应为 $(-3a^2b)^2 = 9a^4b^2$ ，该选项错误，不符合题意；

D、单项式相乘，系数相乘，同底数幂相乘， $(-2xy^2) \cdot 3x^2y = -6x^3y^3$ ，该选项正确，符合题意；

故选：D.

3. 下列说法正确的是 ()

A. $-\frac{\pi xy^2}{2}$ 系数是 $-\frac{1}{2}$

B. $\frac{3}{2}$ 是零次单项式

C. $2^3 a^2 b$ 的次数是 6 次

D. $4x^2 - 3x + 1$ 是二次三项式且一次项系数为 3

【答案】B

【分析】本题考查了单项式的系数与次数，整式的次数与项数，根据单项式的系数与次数及整式的次数与项数的概念，即可判断答案.

【详解】解：A、 $-\frac{\pi xy^2}{2}$ 系数是 $-\frac{\pi}{2}$ ，原说法错误，不符合题意；

B、 $\frac{3}{2}$ 是零次单项式，原说法正确，符合题意；

C、 $2^3 a^2 b$ 的次数是 3 次，原说法错误，不符合题意；

D、 $4x^2 - 3x + 1$ 是二次三项式且一次项系数为 -3，原说法错误，不符合题意.

故选：B.

4. 下列各组中的两项，不是同类项的是 ()

A. $2x^2y$ 与 $-2x^2y$

B. x^3 与 $3x^2$

C. $-3ab^2c^3$ 与 $0.6c^3b^2a$

D. 1 与 $\frac{1}{8}$

【答案】B

【分析】本题考查了同类项的定义：所含字母相同，并且相同字母的指数也相同的项叫同类项。首先确定各选项里的两个单项式的字母部分是否相同；接下来看相同字母的指数是否相同，即可作出判断。

【详解】解：A. $2x^2y$ 与 $-2x^2y$ ，两个单项式均含有字母 x 、 y ，且 x 、 y 的指数分别相同，是同类项，故本选项不合题意；

B. x^3 与 $3x^2$ ，两个单项式都含有字母 x ，但 x 的指数不相同，故不是同类项，故本选项符合题意；

C. $-3ab^2c^3$ 与 $0.6c^3b^2a$ ，两个单项式都含有字母 a 、 b 、 c ，且 a 、 b 、 c 的指数分别相同，是同类项，故本选项不合题意；

D. 1 与 $\frac{1}{8}$ 都是常数项，是同类项，故本选项不合题意。

故选：B。

5. 若 $x^2 - (k+1)x + 9$ 是一个完全平方式，则 k 的值一定为（ ）

A. 5

B. 7 或 -5

C. ± 5

D. 5 或 -7

【答案】D

【分析】此题考查了完全平方式，熟练掌握完全平方公式是解本题的关键。利用完全平方公式的结构特征判断即可确定出 k 的值。

【详解】解：由题意得， $x^2 - (k+1)x + 9 = x^2 \pm 6x + 9 = (x \pm 3)^2$ ，

$\therefore k+1 = \pm 6$ ，

解得： $k = 5$ 或 -7 ，

故选：D。

6. 根据 $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ ， $(x-1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1$ ， $(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) = x^4 - 1$ ，的规律，则可以得出 $2^{2024} + 2^{2023} + 2^{2022} + \cdots + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$ 的结果可以表示为（ ）

A. $2^{2024} - 1$

B. $2^{2025} - 1$

C. $2^{2023} - 1$

D. $2^{2025} + 1$

【答案】B

【分析】本题考查了整式乘以整式规律性问题，解题关键是掌握整式乘以整式计算方法。

先根据规律得出 $(x-1)(x^{2024} + \cdots + x^2 + x + 1) = x^{2025} - 1$ ，再代入 $x = 2$ ，求得 $2^{2024} + 2^{2023} + 2^{2022} + \cdots + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$ 的结果。

【详解】解：根据 $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ ， $(x-1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1$ ， $(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) = x^4 - 1$ ，，

$$(x-1)(x^{2024} + \cdots + x^2 + x + 1) = x^{2025} - 1,$$

当 $x = 2$ 时,

$$(2-1)(2^{2024} + \cdots + 2^2 + 2 + 1) = 2^{2024} + \cdots + 2^2 + 2 + 1 = 2^{2025} - 1,$$

故选: B.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 共 48 分.)

7. 去括号: $4x^3 - (-3x^2 + 2x - 1) =$ _____.

【答案】 $4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

【分析】 根据去括号法则进行计算即可得解.

【详解】 解: $4x^3 - (-3x^2 + 2x - 1) = 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1,$

故答案为: $4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$.

【点睛】 本题主要考查了去括号, 注意括号前面是“-”的, 去掉括号和前面的“-”, 括号里面各项要变号是解题的关键.

8. 计算 $(6ab^2 - 4a^2b) \cdot 3ab$ 的结果是_____.

【答案】 $18a^2b^3 - 12a^3b^2$

【分析】 本题考查整式的乘法运算, 涉及整式乘以单项式、单项式乘以单项式及同底数幂的乘法运算法则等知识, 熟练掌握整式的乘法运算法则是解决问题的关键.

【详解】 解: $(6ab^2 - 4a^2b) \cdot 3ab$

$$= 6ab^2 \cdot 3ab - 4a^2b \cdot 3ab$$

$$= 18a^2b^3 - 12a^3b^2,$$

故答案为: $18a^2b^3 - 12a^3b^2$.

9. 计算: $(-2x - y)^2 =$ _____.

【答案】 $4x^2 + 4xy + y^2$

【分析】 根据完全平方公式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 进行求解即可.

【详解】 解: $(-2x - y)^2 = (2x + y)^2 = 4x^2 + 4xy + y^2,$

故答案为: $4x^2 + 4xy + y^2$.

【点睛】 本题主要考查了完全平方公式, 熟练掌握完全平方公式是解题的关键.

10. 将 $-2x^5y^5 - 3xy^4 - 3y + \frac{1}{2}x^2y^3$ 按字母 x 的升幂排列是_____.

【答案】 $-3y - 3xy^4 + \frac{1}{2}x^2y^3 - 2x^5y^5$

【分析】 本题主要考查整式的次数，理解和掌握整式的次数是解题的关键。根据 x 的升幂排列，即按照 0 次，1 次，2 次，3 次的方式排列，排列时带着系数及符号。

【详解】 $-2x^5y^5 - 3xy^4 - 3y + \frac{1}{2}x^2y^3$
 $= -3y - 3xy^4 + \frac{1}{2}x^2y^3 - 2x^5y^5,$

故答案为: $-3y - 3xy^4 + \frac{1}{2}x^2y^3 - 2x^5y^5$.

11. 已知关于 x, y 的单项式 $-3\pi x^{2b+1}y^2$ 与 $\frac{10xy^3}{7}$ 的次数相同，则 $b =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$ / 0.5

【分析】 本题考查了单项式的次数计算，根据题意列出方程计算即可。

【详解】 解：由题意可知： $2 + 2b + 1 = 1 + 3$,

解得： $b = \frac{1}{2}$.

故答案为: $\frac{1}{2}$.

12. 若 $x + y = 3$, $x - y = 7$, 则 $x^2 - y^2$ 的值为_____.

【答案】 21

【分析】 本题考查了平方差公式的应用，解题的关键是掌握平方差公式 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, 并利用已知条件直接代入计算。

观察到所求代数式 $x^2 - y^2$ 可根据平方差公式分解为 $(x + y)(x - y)$, 而题目中已给出 $x + y = 3$ 和 $x - y = 7$, 将这两个值代入分解后的式子即可求出结果。

【详解】 解：根据平方差公式 $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$,

已知 $x + y = 3, x - y = 7$,

则 $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 3 \times 7 = 21$.

故答案为: 21.

13. 老师在黑板上书写了一个正确的演算过程，随后用手掌捂住了一个整式，形式

如  $-(2x^2 - 2x + 1) = -x^2 - 4x - 3$: 则所捂住的整式是_____.

【答案】 $x^2 - 6x - 2$

【分析】 先根据题意列出算式, 然后根据整式加减运算法则进行计算即可.

【详解】 解: 根据题意得, 所捂住的整式是:

$$-x^2 - 4x - 3 + (2x^2 - 2x + 1)$$

$$= -x^2 - 4x - 3 + 2x^2 - 2x + 1$$

$$= x^2 - 6x - 2.$$

故答案为: $x^2 - 6x - 2$.

【点睛】 本题主要考查了整式加减的应用, 解题的关键是熟练掌握整式加减运算法则, 准确计算.

14. 计算: $\left(-\frac{3}{4}\right)^{2024} \times \left(\frac{4}{3}\right)^{2025} =$ _____.

【答案】 $\frac{4}{3}$

【分析】 本题主要考查了积的乘方的逆运算和同底数幂乘法的逆运算, 先把原式变形为 $\left(-\frac{3}{4}\right)^{2024} \times \left(\frac{4}{3}\right)^{2024} \times \frac{4}{3}$, 再利用积的乘方的逆运算法则计算即可.

【详解】 解: $\left(-\frac{3}{4}\right)^{2024} \times \left(\frac{4}{3}\right)^{2025}$

$$= \left(-\frac{3}{4}\right)^{2024} \times \left(\frac{4}{3}\right)^{2024} \times \frac{4}{3}$$

$$= \left(-\frac{3}{4} \times \frac{4}{3}\right)^{2024} \times \frac{4}{3}$$

$$= (-1)^{2024} \times \frac{4}{3}$$

$$= 1 \times \frac{4}{3}$$

$$= \frac{4}{3},$$

故答案为: $\frac{4}{3}$.

15. 在数学课上, 小明计算 $(x+2)(x-\blacksquare)$ 时, 已正确得出结果, 但课后不小心将第二个括号中的常数染黑了, 若结果中不含有一次项, 则被染黑的常数为_____.

【答案】 2

【分析】 设被染黑的常数为 a , 利用乘法公式展开 $(x+2)(x-a)$, 根据一次项系数为 0 即可求出 a 的值.

【详解】 解: 设被染黑的常数为 a ,

$$\text{则 } (x+2)(x-a) = x^2 - ax + 2x - 2a = x^2 + (2-a)x - 2a,$$

$\therefore$ 结果中不含有一次项,

$$\therefore 2-a=0,$$

$$\therefore a=2,$$

故答案为: 2.

【点睛】 本题考查整式乘以整式, 解题的关键是掌握整式乘以整式的运算法则, 本题也可以通过平方差公式快速求解.

16. 若 $A = -y^2 + 4x - 3$, $B = x^2 + 2x + 2y$, 则 A _____ B . (填写“>”或“<”或“=”)

【答案】 <

【分析】 本题考查了整式的加减, 完全平方公式的运用, 列式得到 $B - A = (x-1)^2 + (y+1)^2 + 1 > 0$, 从而得出结果.

$$\text{【详解】 } \because B - A = (x^2 + 2x + 2y) - (-y^2 + 4x - 3)$$

$$= x^2 - 2x + y^2 + 2y + 3$$

$$= (x-1)^2 + (y+1)^2 + 1 > 0,$$

$$\therefore A < B.$$

故答案为: <.

17. 对 a, b 定义一种新运算: $a*b = a^2 + ab - b$. 如: $(-m)*(-2) = (-m)^2 + (-m) \times (-2) - (-2) = m^2 + 2m + 2$. 计算: $(-mn)*[mn*(-n)] =$ _____.

【答案】 $-m^3n^3 + m^2n^3 - n$

【分析】 本题主要考查了单项式乘以整式, 先根据新定义计算出 $mn*(-n) = m^2n^2 - mn^2 + n$, 再根据新定义计算可得 $(-mn)*[mn*(-n)] = (-mn)^2 + (-mn)(m^2n^2 - mn^2 + n) - (m^2n^2 - mn^2 + n)$, 据此计算求解即可.

$$\text{【详解】 解: } mn*(-n)$$

$$= (mn)^2 + mn \cdot (-n) - (-n)$$

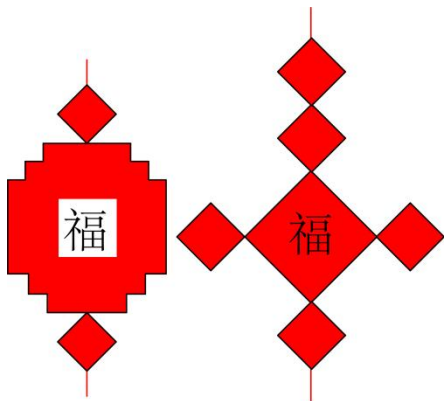
$$= m^2n^2 - mn^2 + n,$$

$$\therefore (-mn)*[mn*(-n)]$$

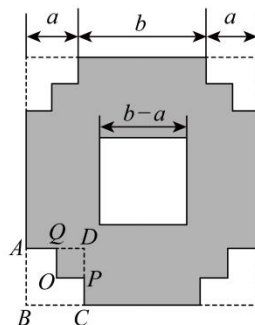
$$\begin{aligned}
 &= (-mn)^2 + (-mn) \cdot (m^2n^2 - mn^2 + n) - (m^2n^2 - mn^2 + n) \\
 &= m^2n^2 - m^3n^3 + m^2n^3 - mn^2 - m^2n^2 + mn^2 - n \\
 &= -m^3n^3 + m^2n^3 - n,
 \end{aligned}$$

故答案为: $-m^3n^3 + m^2n^3 - n$.

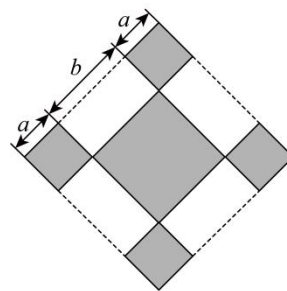
18. 图 1 为两位同学自制的“福”字中国结, 其中主体部分 (图 2、图 3 阴影部分) 均由边长为 $(2a+b)$ 的大正方形红布裁剪而成, 图 2、图 3 空白部分为裁前掉部分. 图 2 的四个角落图形相同, 其中四边形 $ABCD$ 和 $OPDQ$ 分别是边长为 a 和 $\frac{a}{2}$ 的正方形, 中间处是边长为 $(b-a)$ 的正方形, 图 3 阴影部分是由四块边长为 a 的正方形和一块边长为 b 的正方形组成, 且图 2 和图 3 两块阴影部分的面积都是 60, 则未裁剪前大正方形红布的面积为_____.



(图1)



(图2)



(图3)

【答案】100

【分析】本题考查了正方形面积的计算以及代数式的化简与求值, 解题的关键是根据图形中阴影部分的构成列出面积关系式, 再结合已知条件联立求解.

由图 2 阴影面积列出方程, 化简得 $ab = 10$; 由图 3 阴影面积为 $4a^2 + b^2 = 60$; 将上述结果代入大正方形面积公式 $(2a+b)^2$, 计算得 100.

【详解】根据图 2 所示的阴影部分面积为 60 可得:

$$(2a+b)^2 - 4a^2 + 4 \times \left(\frac{a}{2}\right)^2 - (b-a)^2 = 60,$$

展开化简: $(4a^2 + 4ab + b^2) - 3a^2 - (b^2 - 2ab + a^2) = 60,$

$$4a^2 + 4ab + b^2 - 3a^2 - b^2 + 2ab - a^2 = 60,$$

$$6ab = 60, \text{ 则 } ab = 10.$$

根据图 3 所示的阴影部分面积为 60 可得: $4a^2 + b^2 = 60$.

∴大正方形面积: $(2a+b)^2 = 4a^2 + 4ab + b^2 = (4a^2 + b^2) + 4ab = 60 + 4 \times 10 = 100$.

故答案为: 100.

三、解答题: (本大题共 10 题, 共 78 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.)

19. 计算:

$$(1) (-3a^2b)^3 - (2a^3)^2 \cdot (-b)^3 + 3a^6b^3;$$

$$(2) 2x(x-4) - (2x-3)(x+2).$$

【答案】(1) $-20a^6b^3$

(2) $-9x+6$

【分析】此题考查了积的乘方和幂的乘方, 单项式乘以整式和整式乘以整式, 解题的关键是掌握以上运算法则.

(1) 首先计算积的乘方和幂的乘方, 然后合并即可;

(2) 首先计算单项式乘以整式和整式乘以整式, 然后合并即可.

【详解】(1) 解: $(-3a^2b)^3 - (2a^3)^2 \cdot (-b)^3 + 3a^6b^3$

$$= -27a^6b^3 - 4a^6 \cdot (-b^3) + 3a^6b^3$$
$$= -27a^6b^3 + 4a^6b^3 + 3a^6b^3$$
$$= -20a^6b^3;$$

(2) 解: $2x(x-4) - (2x-3)(x+2)$

$$= 2x^2 - 8x - 2x^2 + 3x - 4x + 6$$
$$= -9x + 6.$$

20. 利用简便方法 (公式) 计算:

(1) $2023 \times 2025 - 2024^2$;

(2) 199^2 .

【答案】(1) -1

(2) 39601

【分析】本题考查平方差公式, 完全平方公式, 乘法公式的应用:

(1) 根据平方差公式进行计算, 即可求解;

(2) 原式化为 $(200-1)^2$ ，根据完全平方公式进行计算即可求解.

【详解】(1) 解: $2023 \times 2025 - 2024^2 = (2024-1) \times (2024+1) - 2024^2 = 2024^2 - 1 - 2024^2 = -1$.

(2) 解: $199^2 = (200-1)^2 = 200^2 - 2 \times 200 \times 1 + 1^2 = 40000 - 400 + 1 = 39601$.

21. 化简求值:

(1) $(a-3b)^2 - (2b-a)(a+2b)$, 其中, $a=1$, $b=-1$;

(2) 已知 $a^2 + a = 1$, 求代数式 $(a+1)^2 + (a+2)(a-2)$ 的值.

【答案】(1) $2a^2 - 6ab + 5b^2$, 13

(2) $2a^2 + 2a - 3$, -1

【分析】本题考查了整式的化简求值, 解题的关键是熟练掌握平方差公式和完全平方公式.

(1) 先根据平方差公式, 完全平方公式, 合并同类项法则化简, 然后把 a 、 b 的值代入计算即可;

(2) 先根据完全平方公式, 平方差公式, 合并同类项法则化简, 然后把 $a^2 + a = 1$ 整体代入计算即可.

【详解】(1) 解: $(a-3b)^2 - (2b-a)(a+2b)$

$$= a^2 - 6ab + 9b^2 - (4b^2 - a^2)$$

$$= a^2 - 6ab + 9b^2 - 4b^2 + a^2$$

$$= 2a^2 - 6ab + 5b^2,$$

当 $a=1$, $b=-1$ 时, 原式 $= 2 \times 1^2 - 6 \times 1 \times (-1) + 5 \times (-1)^2 = 13$;

(2) 解: $(a+1)^2 + (a+2)(a-2)$

$$= a^2 + 2a + 1 + a^2 - 4$$

$$= 2a^2 + 2a - 3,$$

$$\because a^2 + a = 1,$$

$$\therefore 2a^2 + 2a = 2,$$

$$\therefore \text{原式} = 2 - 3 = -1.$$

22. 已知 $A = b^2 + a^2 - 5ab$, $B = a^2 + 2b^2 - 8ab$,

(1) 化简: $2A - B$;

(2) 当 $a=3, b=2$ 时, 求 $2A - B$ 值.

【答案】(1) $a^2 - 2ab$

(2) -3

【分析】此题考查了整式的加减—化简求值，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

(1) 把 A 与 B 代入 $2A-B$ 中，去括号合并即可得到结果；

(2) 把 a 与 b 的值代入 (1) 化简结果中计算即可求出值.

【详解】(1) 解： $\because A=b^2+a^2-5ab, B=a^2+2b^2-8ab,$

$$\therefore 2A-B=2(b^2+a^2-5ab)-(a^2+2b^2-8ab)$$

$$=2b^2+2a^2-10ab-a^2-2b^2+8ab$$

$$=a^2-2ab;$$

(2) 当 $a=3, b=2$ 时, $2A-B=a^2-2ab=3^2-2\times 3\times 2=9-12=-3$.

23. 已知 $x+y=5, xy=4$.

(1) 求 $3(x-y)^2$ 的值;

(2) 求 x^2+y^2 的值.

【答案】(1)27

(2)17

【分析】本题考查了完全平方公式的变形应用，掌握公式的特征并灵活运用是关键；

(1) 由 $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$ ，整体代入即可求解；

(2) 由 $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$ ，整体代入即可求解；

【详解】(1) 解： $\because (x-y)^2=(x+y)^2-4xy$

$$\therefore 3(x-y)^2=3(x+y)^2-12xy$$

$$=3\times 5^2-12\times 4$$

$$=27;$$

(2) 解： $\because (x+y)^2=x^2+y^2+2xy,$

$$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$$

$$=5^2-2\times 4$$

$$=17.$$

24. 关于 x 的代数式 $(mx-2)(2x+1)+x^2+n$ 化简后不含 x^2 的项和常数项. 分别求 m, n 的值;

【答案】 $m=-\frac{1}{2}, n=2$

【分析】本题主要考查了整式乘法中的无关型问题，先根据整式乘以整式的计算法则去括号，然后合并同类项，再根据不含有 x^2 项和常数项得到 $2m+1=0$ ， $n-2=0$ ，解之即可得到答案.

【详解】解： $(mx-2)(2x+1)+x^2+n$

$$= 2mx^2 - 4x + mx - 2 + x^2 + n$$

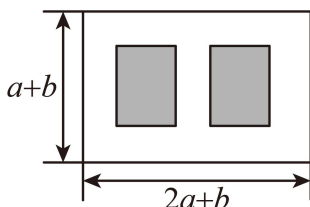
$$= (2m+1)x^2 + (m-4)x - 2 + n,$$

$\because$ 关于 x 的代数式 $(mx-2)(2x+1)+x^2+n$ 化简后不含有 x^2 项和常数项，

$$\therefore 2m+1=0, \quad n-2=0,$$

$$\therefore m = -\frac{1}{2}, \quad n = 2.$$

25. 如图，在某高铁站广场前有一块长为 $2a+b$ ，宽为 $a+b$ 的长方形空地，计划在中间留两个长方形喷泉池（图中阴影部分），两个长方形喷泉池及周边留有宽度为 b 的人行通道.



(1) 求这两个长方形喷泉池的总面积（用代数式表示）；

(2) 当 $a=200, b=100$ 时，求这两个长方形喷泉池的总面积.

【答案】(1) $2(a-b)^2$ （或 $2a^2 - 4ab + 2b^2$ ）

(2) 20 000

【分析】本题考查整式的混合运算，结合已知条件列得正确的算式是解题的关键.

(1) 根据题意求得两个长方形喷泉池的长与宽的和，然后计算两个长方形喷泉池的面积即可；

(2) 将已知数值代入(1)中求得的代数式中计算即可.

【详解】(1) 解：由题意可得两个长方形喷泉池的长为 $(a+b-2b)$ ，它们宽的和为 $(2a+b-3b)$ ，

$$\text{则 } (a+b-2b)(2a+b-3b)$$

$$= (a-b)(2a-2b)$$

$$= 2(a-b)^2$$

$$= 2a^2 - 4ab + 2b^2,$$

即这两个长方形喷泉池的总面积为 $2a^2 - 4ab + 2b^2$ ；

(2) 当 $a = 200, b = 100$ 时,

$$\begin{aligned} & 2a^2 - 4ab + 2b^2 \\ &= 2 \times 200^2 - 4 \times 200 \times 100 + 2 \times 100^2 \\ &= 80000 - 80000 + 20000 \\ &= 20000, \end{aligned}$$

即这两个长方形喷泉池的总面积为 20000.

26. 若 $a^m = a^n$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1, m, n$ 是正整数), 则 $m = n$. 利用上面的结论解决下面的问题:

(1) 如果 $2 \times (2^2)^x \times (2^x)^3 = 2^{21}$, 求 x 的值;

(2) 如果 $3^{a+2} \cdot 6^{a+2} = 18^{2a-4}$, 求 a 的值.

【答案】(1) $x = 4$

(2) $a = 6$

【分析】本题考查幂的运算, 熟练掌握幂的相关运算法则, 正确的列出方程是解题的关键.

(1) 先将等式左边化为底数为 2 的同底数幂的运算, 根据题干给的结论得到关于 x 的方程, 进行求解即可;

(2) 逆用积的乘方法则, 再根据题干给的结论进行求解即可.

【详解】(1) 解: 因为 $2 \times (2^2)^x \times (2^x)^3 = 2^{21}$,

$$\text{所以 } 2^{1+2x+3x} = 2^{21},$$

$$\text{即 } 1+2x+3x=21,$$

$$\text{解得: } x=4;$$

(2) 解: 因为 $3^{a+2} \cdot 6^{a+2} = 18^{2a-4}$,

$$\text{所以 } (3 \times 6)^{a+2} = 18^{2a-4},$$

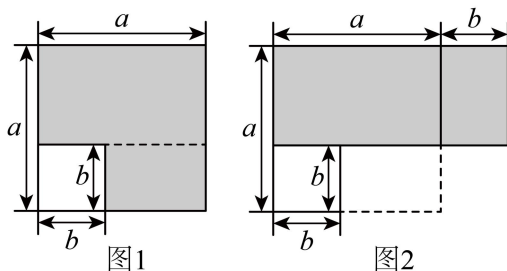
$$\text{所以 } 18^{a+2} = 18^{2a-4},$$

$$\text{所以 } a+2=2a-4,$$

$$\text{解得: } a=6.$$

27. 综合与实践

【观察】如图①, 从边长为 a 的大正方形中剪掉一个边长为 b ($b < a$) 的小正方形, 将阴影部分沿虚线剪开, 拼成如图②的长方形.



【总结】

(1) 请你分别表示出这两个图形中的阴影部分的面积:

图①: _____;

图②: _____;

(2) 比较两图中阴影部分的面积, 可以得到乘法公式: _____;

【应用】请应用这个公式计算: $(2a+b-c)(2a-b+c)$;

【拓展】计算 $(2+1) \times (2^2+1) \times (2^4+1) \times (2^8+1) \times \dots \times (2^{32}+1) + 1$ 的结果的个位数字为_____.

【答案】总结: (1) $a^2 - b^2$, $(a+b)(a-b)$; (2) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$; 应用: $4a^2 - b^2 + 2bc - c^2$; 拓展: 6

【分析】本题考查了利用平方差公式计算, 平方差公式与几何图形, 数字类规律探索, 解题关键是掌握题意根据面积相等得出平方差公式, 利用平方差公式求解.

(1) 根据图写出阴影部分的面积即可;

(2) 利用两个面积相等列式即可; 利用探究中的公式计算即可; 算式乘以 $(2-1)$, 再利用探究中的公式计算即可.

【详解】(1) 解: 图①阴影部分的面积为两个正方形的面积差, 即 $a^2 - b^2$; 图②的阴影部分为长为 $(a+b)$, 宽为 $(a-b)$ 的矩形, 其面积为 $(a+b)(a-b)$.

故答案为: $a^2 - b^2$, $(a+b)(a-b)$;

(2) 由图①与图②的面积相等, 可以得到乘法公式, $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$,

故答案为: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$;

[应用] $(2a+b-c)(2a-b+c)$

$$= (2a)^2 - (b-c)^2$$

$$= 4a^2 - b^2 + 2bc - c^2$$

[拓展] $(2+1) \times (2^2+1) \times (2^4+1) \times (2^8+1) \times \dots \times (2^{32}+1) + 1$

$$\begin{aligned}
&= (2-1)(2+1) \times (2^2+1) \times (2^4+1) \times (2^8+1) \times \dots \times (2^{32}+1) + 1 \\
&= (2^2-1) \times (2^2+1) \times (2^4+1) \times (2^8+1) \times \dots \times (2^{32}+1) + 1 \\
&= (2^4-1) \times (2^4+1) \times (2^8+1) \times \dots \times (2^{32}+1) + 1 \\
&= (2^8-1) \times (2^8+1) \times \dots \times (2^{32}+1) + 1 \\
&= (2^{16}-1) \times (2^{16}+1) \times (2^{32}+1) + 1 \\
&= (2^{32}-1) \times (2^{32}+1) + 1 \\
&= 2^{64} - 1 + 1 \\
&= 2^{64}
\end{aligned}$$

$$\because 2^1 = 2, \quad 2^2 = 4, \quad 2^3 = 8, \quad 2^4 = 16, \quad 2^5 = 32, \quad \dots$$

以 2, 4, 8, 16, 四个为一个循环,

$$64 \div 4 = 16,$$

$\therefore 2^{64}$ 与 2^4 的末位数相同, 即为 6.

故答案为: 6.

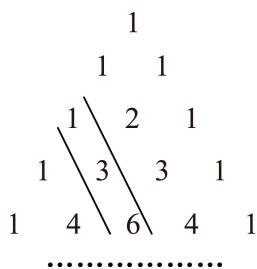
28. 我国南宋时期有一位杰出的数学家杨辉, 如图所示的图表是他在《详解九章算术》中记载的“杨辉三角”.

第一行	1	$(a+b)^0 = 1$	
第二行	1 1	$(a+b)^1 = a+b$	各项系数和为 $1+1=2$
第三行	1 2 1	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	各项系数和为 $1+2+1=4$
第四行	1 3 3 1	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	各项系数和为 $1+3+3+1=8$
.....			

此图揭示了 $(a+b)^n$ (n 为非负整数) 的展开式的项数及各项系数的有关规律, 请根据上述规律, 解决以下问题:

(1) 整式 $(a+b)^7$ 展开式共有 _____ 项, 第二项的系数为 _____, 各项系数和为 _____;

(2) 如图, 在“杨辉三角”中, 选取部分数 1, 3, 6,, 记 $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 6$ 请完成下列问题:



①计算 $a_3 + a_{26}$;

②计算 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{50}}$;

③请直接写出 $a_{2026} - a_{2024}$ 的值.

【答案】 (1)8, 7, 128

(2)①357; ② $\frac{100}{51}$; ③4051

【分析】 本题考查数字变化类，整式的乘法；

(1) 根据“杨辉三角”中第三行中的数据，将 $(a+b)^n$ 展开后，各项的系数和所呈现的规律进行计算即可.

(2) ①根据规律得出 $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ，进而将 $n=3, 26$ 代入进行计算即可求解；

②将已知式子裂项为 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{50}} = \frac{2}{1 \times 2} + \frac{2}{2 \times 3} + \cdots + \frac{2}{50 \times 51}$ ，即可求解；

③根据 $a_{2026} - a_{2024} = \frac{1}{2} [2026 \times (2026+1) - 2024 \times (2024+1)]$ 进行计算即可求解.

【详解】 (1) 根据“杨辉三角”可知，

第2行， $(a+b)^1$ 展开后，各项的系数和为 2^1 ，

第3行， $(a+b)^2$ 展开后，各项的系数和为 $1+2+1=4=2^2$ ，

第4行， $(a+b)^3$ 展开后，各项的系数和为 $1+3+3+1=8=2^3$ ，

第5行， $(a+b)^4$ 展开后，各项的系数和为 $1+4+6+4+1=16=2^4$ ，

第6行， $(a+b)^5$ 展开后，各项的系数和为 $1+5+10+10+5+1=32=2^5$ ，

第7行， $(a+b)^6$ 展开后，各项的系数依次为1、6、15、20、15、6、1，各项的系数和为

$1+6+15+20+15+6+1=64=2^6$

第8行， $(a+b)^7$ 展开后，各项的系数依次为1、7、21、35、35、21、7、1

各项的系数和为 $1+7+21+35+35+21+7+1=128=2^7$

$(a+b)^n$ 展开后，各项的系数和为 2^n ，

∴ 整式 $(a+b)^7$ 展开式共有 8 项，第二项的系数为 7，各项系数和为 128；

故答案为：8，7，128.

(2) ①由题意得： $a_1 = 1$ 、 $a_2 = 1+2=3$ 、 $a_3 = 1+2+3=6$

$$\therefore a_n = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\therefore a_3 + a_{26} = \frac{3 \times (3+1)}{2} + \frac{26 \times (26+1)}{2} = 6 + 351 = 357$$

②由题意得： $a_1 = 1$ 、 $a_2 = 1+2=3$ 、 $a_3 = 1+2+3=6$

$$\therefore a_n = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{50}} = \frac{2}{1 \times 2} + \frac{2}{2 \times 3} + \cdots + \frac{2}{50 \times 51}$$

$$= 2 \left(\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{50 \times 51} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{50} - \frac{1}{51} \right)$$

$$= 2 \left(1 - \frac{1}{51} \right)$$

$$= 2 \times \frac{50}{51}$$

$$= \frac{100}{51}$$

$$\textcircled{3} a_{2026} - a_{2024} = \frac{1}{2} [2026 \times (2026+1) - 2024 \times (2024+1)]$$

$$= \frac{1}{2} (2026^2 + 2026 - 2024^2 - 2024)$$

$$= \frac{1}{2} [(2026+2024) \times 2 + 2]$$

$$= 4051$$