

2025 学年第一学期七年级数学学科阶段诊断测评

(考试时间 60 分钟, 满分 100 分)

一、选择题: 本题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 在每小题给出的选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 下列关于分式的判断, 正确的是 ()

- A. 当 $x = 2$ 时, $\frac{x+1}{x-2}$ 的值为 0;
B. 当 $x \neq 3$ 时, $\frac{x-3}{x}$ 有意义;
C. 无论 x 为何值, $\frac{3}{x+1}$ 的值不可能是正整数
D. 无论 x 为何值, $\frac{1}{x^2+1}$ 总有意义

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了分式有意义的条件及分式值为零的条件, 理解这两个条件是关键; 根据分式有意义的条件及分式值为零的条件去判断即可.

【详解】解: A、当 $x = 2$ 时, 分式无意义, 故判断错误;

B、当 $x \neq 0$ 时, $\frac{x-3}{x}$ 有意义, 故判断错误;

C、当 $x = 0$ 时, $\frac{3}{x+1}$ 的值是正整数 3, 故判断错误;

D、由于 $x^2 + 1 > 0$, 则无论 x 为何值, $\frac{1}{x^2+1}$ 总有意义, 故判断正确;

故选: D.

2. 下列分式中, 是最简分式的是 ()

- A. $\frac{12x^2}{9x}$ B. $\frac{4xy}{3x^2}$ C. $\frac{x-1}{x^2-1}$ D. $\frac{x+1}{2x+1}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了最简分式, 解题关键是掌握最简分式的定义. 根据分子与分母没有公因式的分式, 即一个分式的分子与分母没有非零次的公因式时这个分式就被称为最简分式, 逐项判断即可.

【详解】解: A、 $\frac{12x^2}{9x} = \frac{4x}{3}$, 故原式不是最简分式, 不符合题意;

B、 $\frac{4xy}{3x^2} = \frac{4y}{3x}$, 故原式不是最简分式, 不符合题意;

C、 $\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x+1}$ ，故原式不是最简分式，不符合题意；

D、 $\frac{x+1}{2x+1}$ 无法化简，是最简分式，故符合题意；

故选：D.

3. 下列式子从左到右变形，正确的是（ ）

A. $\frac{y+1}{y-1} = \frac{(y+1)^2}{(y-1)(y+1)}$

B. $\frac{x+2}{y+2} = \frac{x}{y}$

C. $\frac{4x^2}{2xy} = \frac{2x}{y}$

D. $\frac{x}{y} = \frac{x^2}{y^2}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了分式的性质，分式的分子和分母同时乘以或除以一个不为0的数，分式的值不变. 根据分式的性质逐项进行判断即可.

【详解】解：A、当 $y \neq -1$ 时， $\frac{y+1}{y-1} = \frac{(y+1)^2}{(y-1)(y+1)}$ ，故本选项不符合题意；

B、 $\frac{x+2}{y+2} \neq \frac{x}{y}$ ，故本选项不符合题意；

C、 $\frac{4x^2}{2xy} = \frac{2x}{y}$ ，故本选项不符合题意；

D、 $\frac{x}{y} \neq \frac{x^2}{y^2}$ ，故本选项不符合题意；

故选：C.

4. 下列计算正确的是（ ）

A. $a^2 + a^2 = a^4$

B. $(-2a)^3 = -6a^3$

C. $3a^{-2} = \frac{1}{3a^2}$

D. $(-a)^3 \cdot (-a)^4 = -a^7$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了合并同类项、积的乘方、同底数幂的乘法、负整数指数幂，熟练掌握各运算法则是解题关键. 根据合并同类项、积的乘方、同底数幂的乘法、负整数指数幂法则逐项计算即可得.

【详解】解：A、 $a^2 + a^2 = 2a^2$ ，则此项错误，不符合题意；

B、 $(-2a)^3 = -8a^3$ ，则此项错误，不符合题意；

C、 $3a^{-2} = \frac{3}{a^2}$ ，则此项错误，不符合题意；

D、 $(-a)^3 \cdot (-a)^4 = -a^3 \cdot a^4 = -a^7$ ，则此项正确，符合题意；

故选：D.

5. 下列各式中，是分式方程的是（ ）

A. $\frac{16x}{25} = \frac{1}{\pi}$

B. $\frac{2}{x} = \frac{1}{2}$

C. $\frac{x+y}{4} - \frac{1}{9} = 0$

D. $\frac{2}{x} + \frac{2x}{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查分式方程的识别，解题的关键是掌握分式方程的定义：分母里含有未知数的方程叫做分式方程，注意：仅仅是字母不行，必须是表示未知数的字母。据此解答即可

【详解】解：A. $\frac{16x}{25} = \frac{1}{\pi}$ 是一元一次方程，故此选项不符合题意；

B. $\frac{2}{x} = \frac{1}{2}$ 是分式方程，故此选项符合题意；

C. $\frac{x+y}{4} - \frac{1}{9} = 0$ 是一元一次方程，故此选项不符合题意；

D. $\frac{2}{x} + \frac{2x}{3}$ 是代数式，故此选项不符合题意。

故选：B.

6. 某班组织学生参加植树活动，第一组植树 12 棵，第二组比第一组多 6 人，植树 36 棵，结果两组平均每人植树的棵树相等。设第一组学生有 x 人，则可列方程为（ ）

A. $\frac{12}{x} = \frac{36}{x-6}$

B. $\frac{12}{x} = \frac{36}{x+6}$

C. $\frac{36}{x} = \frac{12}{x+6}$

D. $\frac{36}{x} = \frac{12}{x-6}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查分式方程的应用，根据题干中的等量关系列式即可。

【详解】解：根据两组平均每人植树的棵树相等可得， $\frac{12}{x} = \frac{36}{x+6}$ 。

故选：B.

二、填空题：本题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分.

7. 在多项式 $2-4x^2+x-3x^3$ 中，二次项的系数等于_____.

【答案】 -4

【解析】

【分析】 本题考查多项式中的项，单项式的系数，根据多项式中的每一个单项式为多项式的项，单项式中的数字因式为单项式的系数，进行作答即可.

【详解】解： $2-4x^2+x-3x^3$ 中的二次项为 $-4x^2$ ， $-4x^2$ 的系数为： -4；

故答案为： -4.

8. 若单项式 $23x^2y^n$ 与 $-2x^my^3$ 的和仍是单项式，则 mn 等于_____.

【答案】 6

【解析】

【分析】 本题考查合并同类项，根据单项式的和仍为单项式，得到两个单项式是同类项，进而求出 m, n 的值，再进行乘法运算即可.

【详解】解： 由题意，得： 单项式 $23x^2y^n$ 与 $-2x^my^3$ 是同类项，

$$\therefore m=2, n=3,$$

$$\therefore mn=2 \times 3=6;$$

故答案为： 6.

9. 当 x _____ 时，分式 $\frac{x^2+1}{2x-7}$ 有意义.

【答案】 $\neq \frac{7}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查的是分式有意义，解题的关键是明确分式有意义的条件是分母不等于 0.

【详解】解： 由题意得： $2x-7 \neq 0$ ，解得： $x \neq \frac{7}{2}$ ，

故答案为： $\neq \frac{7}{2}$.

10. 当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 分式 $\frac{x^2-9}{x-3}$ 的值为零.

【答案】 -3

【解析】

【分析】 本题考查了分式的值为零, 根据分子的值等于 0 且分母的值不等于 0 解答即可求解, 掌握分式的值为零的条件是解题的关键.

【详解】 解: $\because$ 分式 $\frac{x^2-9}{x-3}$ 的值为零,

$$\therefore x^2 - 9 = 0 \text{ 且 } x - 3 \neq 0,$$

解得 $x = -3$,

故答案为: -3 .

11. 计算: $\frac{2a(x-y)}{9b} \cdot \frac{3b^3}{a^2(y-x)^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{2b^2}{3a(x-y)}$

【解析】

【分析】 本题考查了分式的乘法, 熟练掌握分式的乘法法则是解题关键. 根据分式的乘法法则计算即可得.

【详解】 解: 原式 $= \frac{2a(x-y)}{9b} \cdot \frac{3b^3}{a^2(x-y)^2}$

$$= \frac{2b^2}{3a(x-y)},$$

故答案为: $\frac{2b^2}{3a(x-y)}.$

12. 计算: $\frac{2}{x^2-4} - \frac{x}{4-x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】

$$\frac{1}{x-2}$$

【解析】

【分析】 本题考查了分式的加减, 解题的关键是先将两个分式的分母化为相同形式, 再进行分子的加减运算, 最后化简.

【详解】解： $\frac{2}{x^2-4} - \frac{x}{4-x^2}$

$$= \frac{2}{x^2-4} + \frac{x}{x^2-4}$$

$$= \frac{2+x}{x^2-4}$$

$$= \frac{2+x}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \frac{1}{x-2}$$

故答案为： $\frac{1}{x-2}$.

13. 将 $-5xy^{-1}(x-y)^{-2}$ 写成只含正整数指数幂的形式：_____.

【答案】 $-\frac{5x}{y(x-y)^2}$

【解析】

【分析】 本题考查了负整数指数幂. 根据负整数指数幂与正整数指数幂互为倒数, 可得答案.

【详解】解： $-5xy^{-1}(x-y)^{-2}$

$$= -\frac{5x}{y(x-y)^2},$$

故答案为： $-\frac{5x}{y(x-y)^2}$.

14. 将代数式 $\frac{3z}{(x+y)^2}$ 化成不含分母的形式是_____.

【答案】 $3z(x+y)^{-2}$

【解析】

【分析】 本题考查了负整数指数幂： $a^{-p} = \frac{1}{a^p} (a \neq 0)$ ；逆用负整数指数幂的法则即可求解.

【详解】解： $\frac{3z}{(x+y)^2} = 3z(x+y)^{-2}$;

故答案为： $3z(x+y)^{-2}$.

15. 计算： $x^{-3} \cdot x^2 =$ _____.

【答案】

$$x^{-1}$$

【解析】

【分析】 本题考查了同底数幂的乘法，根据指数法则，同底数幂相乘，底数不变，指数相加，即可求解.

【详解】 解: $x^{-3} \cdot x^2 = x^{-3+2} = x^{-1}$,

故答案为: x^{-1} .

16. 计算: $xy(x^{-1} + y^{-1}) =$ _____.

【答案】 $y + x$

【解析】

【分析】 本题考查了负整数指数幂、分式的乘法. 直接利用乘法分配律化简，再利用同底数幂的乘法法则计算，进而得出答案.

【详解】 解: $xy(x^{-1} + y^{-1}) = xy \cdot x^{-1} + xy \cdot y^{-1}$

$$= y \cdot x^{1-1} + x \cdot y^{1-1}$$

$$= y + x.$$

故答案为: $y + x$.

17. 如果关于 x 的分式方程 $\frac{1}{x+2} = \frac{a}{x-1}$ 的解是 $x = 2$ ，那么 a 的值是 _____.

【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程的解，把 $x = 2$ 代入分式方程中，即可求得 a 的值.

【详解】 解: $\because$ 关于 x 的分式方程 $\frac{1}{x+2} = \frac{a}{x-1}$ 的解是 $x = 2$,

$$\therefore \frac{1}{2+2} = \frac{a}{2-1},$$

$$\text{解得: } a = \frac{1}{4},$$

故答案为: $\frac{1}{4}$.

18. 如果关于 x 的方程 $\frac{1}{x-3} = 3 - \frac{k}{3-x}$ 有增根，那么 $k =$ _____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 本题考查分式方程的增根，解题的关键是掌握解决分式方程增根问题的步骤：①化分式方程为整式方程；②让最简公分母为0确定增根；③把增根代入整式方程即可求得相关字母的值．据此解答即可．

【详解】 解：在方程两边同乘以 $(x-3)$ 得： $1=3(x-3)+k$ ，

$\therefore$ 分式方程的解是增根，

$$\therefore x-3=0,$$

解得： $x=3$ ，

把 $x=3$ 代入 $1=3(x-3)+k$ 得： $1=3\times(3-3)+k$ ，

解得： $k=1$ ．

故答案为：1．

三、简答题 (19 题到 23 题每题 6 分，24 题 10 分，共 40 分)

19. 计算： $\left(\frac{3x}{4y}\right)^2 \div \left(-\frac{3x}{2y}\right)^3$

【答案】 $-\frac{y}{6x}$

【解析】

【分析】 本题主要考查分式的乘方及除法运算，熟练掌握各个运算是解题的关键；先算乘方，然后再进行分式的除法运算即可．

【详解】 解：原式 $= \frac{9x^2}{16y^2} \div \left(-\frac{27x^3}{8y^3}\right)$

$$= -\frac{9x^2}{16y^2} \times \frac{8y^3}{27x^3}$$
$$= -\frac{y}{6x}.$$

20. 计算： $\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b} + \frac{2b}{a^2-b^2}$

【答案】 0

【解析】

【分析】 本题主要考查分式的运算，熟练掌握分式的运算是解题的关键；因此此题可根据分式的加法运算

进行求解即可.

【详解】解：原式 $= \frac{a-b}{a^2-b^2} - \frac{a+b}{a^2-b^2} + \frac{2b}{a^2-b^2}$

$$= \frac{a-b-a-b+2b}{a^2-b^2}$$
$$= 0.$$

21. 计算: $\left(a-1-\frac{3}{a+1}\right) \div \frac{a^2-4a+4}{a+1}$

【答案】 $\frac{a+2}{a-2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查分式的运算，熟练掌握分式的运算是解题的关键；因此此题可根据分式的混合运算进行求解即可.

【详解】解：原式 $= \left(\frac{a^2-1}{a+1} - \frac{3}{a+1}\right) \div \frac{(a-2)^2}{a+1}$

$$= \frac{a^2-4}{a+1} \div \frac{(a-2)^2}{a+1}$$
$$= \frac{(a+2)(a-2)}{a+1} \times \frac{a+1}{(a-2)^2}$$
$$= \frac{a+2}{a-2}.$$

22. 计算: $x^{-1}y^{-1} \div (x^{-1}-y^{-1})$

【答案】 $\frac{1}{y-x}$

【解析】

【分析】 本题主要考查分式的除法及负指数幂，熟练掌握各个运算是解题的关键；因此此题可根据分式的除法及负指数幂进行求解即可.

【详解】解：原式 $= \frac{1}{xy} \div \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$

$$= \frac{1}{xy} \div \frac{y-x}{xy}$$

$$= \frac{1}{y-x}.$$

23. 解方程: $\frac{2-x}{3x-1} + \frac{7}{1-3x} = 1$

【答案】

$$x = -1$$

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程的解法，解题的关键是掌握解分式方程的解法.

【详解】 解: $\frac{2-x}{3x-1} + \frac{7}{1-3x} = 1$

方程两边同时乘以 $3x-1$ ，得 $2-x-7=3x-1$ ，

解这个整式方程，得 $x=-1$ ，

经检验: $x=-1$ 是原分式方程的解.

24. 某服装店购进一批甲、乙两种款型 T 恤衫，甲种款型共用了 7000 元，乙种款型共用了 5000 元，甲种款型的件数是乙种款型件数的 2 倍，甲种款型每件件的进价比乙种款型每件件的进价少 30 元.

(1) 甲、乙两种款型的 T 恤衫分别购进多少件?

(2) 甲、乙两种款型 T 恤衫均按照进价提高 $m\%$ 标价出售，要使销售完后利润总和等于 4800 元，求 m 的值.

【答案】 (1)

甲种款型的 T 恤衫购进 100 件，乙种款型的 T 恤衫购进 50 件

(2)

40

【解析】

【分析】 本题考查分式方程的应用，一元一次方程的应用，解题的关键是理解题意，找到题目蕴含的相等关系，并据此列出方程求解.

(1) 设乙种款型的 T 恤衫购进 x 件，则甲种购进 $2x$ 件，根据甲种款型每件件的进价比乙种款型每件件的进价少 30 元，列出方程即可求解;

(2) 先计算出甲乙两种款型的进价，根据利润公式列出方程即可求解.

【小问 1 详解】

解: 设乙种款型的 T 恤衫购进 x 件，则甲种购进 $2x$ 件，

根据题意, 得 $\frac{5000}{x} - \frac{7000}{2x} = 30$,

解得 $x = 50$,

经检验: $x = 50$ 是原分式方程的解,

$$2x = 2 \times 50 = 100 \text{ (件)},$$

答: 甲种款型的 T 恤衫购进 100 件, 乙种款型的 T 恤衫购进 50 件;

【小问 2 详解】

解: 甲种款型的进价为 $\frac{7000}{100} = 70$ 元, 乙种款型的进价为 $\frac{5000}{50} = 100$ 元,

根据题意, 得 $100 \times 70 \times m\% + 50 \times 100 \times m\% = 4800$,

解得 $m = 40$,

答: 要使销售完后利润总和等于 4800 元, m 的值为 40.

25. 拓广探索:

若 x 满足 $(9-x)(x-4) = 4$, 求 $(9-x)^2 + (x-4)^2$ 的值.

解: 设 $9-x = a$, $x-4 = b$,

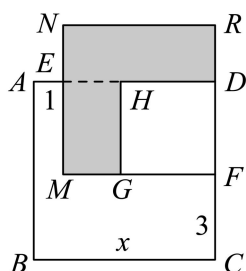
$$\text{则 } (9-x)(x-4) = ab = 4, \quad a+b = (9-x) + (x-4) = 5,$$

$$\therefore (9-x)^2 + (x-4)^2 = a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 5^2 - 2 \times 4 = 17.$$

请仿照上面的方法求解问题:

(1) 若 x 满足 $(5-x)(x-2) = 2$, 求 $(5-x)^2 + (x-2)^2$ 的值.

(2) 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 x , E 、 F 分别是 AD 、 DC 上的点, 且 $AE = 1$, $CF = 3$, 长方形 $EMFD$ 的面积是 48, 分别以 MF 、 DF 为边作正方形, 求阴影部分的面积.



【答案】(1) 5

(2) 28

【解析】

【分析】 本题考查了完全平方公式、平方差公式的应用, 解题的关键是理解题意, 掌握完全平方公式与平

方差公式之间的转换.

(1) 设 $5-x=a$, $x-2=b$, 根据题意进行计算即可得;

(2) 根据题意可得, $MF=x-1$, $FD=x-3$, 设 $x-1=a$, $x-3=b$, 长方形 $EMFD$ 的面积 $ab=(x-1)(x-3)=48$, $a-b=(x-1)-(x-3)=2$, 即可得出 $a+b=14$, 则

$S_{\text{阴}}=(x-1)^2-(x-3)^2=a^2-b^2$ 即可得出答案.

【小问 1 详解】

解: 设 $5-x=a$, $x-2=b$,

则 $(5-x)(x-2)=ab=2$, $a+b=(5-x)+(x-2)=3$,

$\therefore (5-x)^2+(x-2)^2=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=3^2-2\times 2=5$;

【小问 2 详解】

$\therefore$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 x , $AE=1$, $CF=3$,

$\therefore MF=DE=x-1$, $FD=x-3$,

设 $x-1=a$, $x-3=b$,

则 $ab=(x-1)(x-3)=48$, $a-b=(x-1)-(x-3)=2$,

$\therefore (a+b)^2=(a-b)^2+4ab=2^2+4\times 48=196$,

$\therefore a+b=14$,

$\therefore S_{\text{阴}}=(x-1)^2-(x-3)^2=a^2-b^2=(a+b)(a-b)=14\times 2=28$,

$\therefore$ 阴影部分的面积为 28.

26. 我们定义: 如果两个分式 A 与 B 的差为常数, 且这个常数为正数, 那么称 A 是 B 的“雅中式”, 这个常数称为 A 关于 B 的“雅中值”.

例如分式 $A=\frac{2x}{x+1}$, $B=\frac{-2}{x+1}$, $A-B=\frac{2x}{x+1}-\frac{-2}{x+1}=\frac{2x+2}{x+1}=\frac{2(x+1)}{x+1}=2$, 则 A 是 B 的“雅中式”,

A 关于 B 的“雅中值”为 2.

(1) 已知分式 $C=\frac{1}{x+2}$, $D=\frac{x^2+5x+6}{x^2+4x+4}$, 判断 C 是否为 D 的“雅中式”, 若不是, 请说明理由; 若

是, 请求出 C 关于 D 的“雅中值”;

(2) 已知分式 $P=\frac{E}{9-x^2}$, $Q=\frac{2x}{3-x}$, P 是 Q 的“雅中式”, 且 P 关于 Q 的“雅中值”是 2, 那么 E 所

代表的代数式为_____；

(3) 在 (2) 的条件下，如果“雅中式” P 的值为整数，求所有符合条件的整数 x 的值.

【答案】(1) C 不是 D 的“雅中式”；

(2) $18+6x$

(3) 整数 x 的值为 0, 1, 2, 4, 5, 6, 9.

【解析】

【分析】 本题考查的是新定义情境下的分式的运算，分式的化简，分式的值，分式方程等知识，掌握以上知识是解题的关键.

(1) 先化简 D ，再计算 $C-D$ ，再根据“雅中值”的定义可得答案；

(2) 由定义可得： $\frac{E}{9-x^2}-\frac{2x}{3-x}=2$ ，整理可得： E 的表达式；

(2) 再化简 P ，根据 x 为整数，且“雅中式” P 的值也为整数，得到 $3-x$ 是 6 的因数，从而可得答案.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } \because D = \frac{x^2+5x+6}{x^2+4x+4} = \frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)^2} = \frac{x+3}{x+2}, \quad C = \frac{1}{x+2},$$

$$\therefore C-D = \frac{1}{x+2} - \frac{x+3}{x+2} = -\frac{x+2}{x+2} = -1,$$

$\therefore C$ 不是 D 的“雅中式”；

【小问 2 详解】

解: $\because P$ 关于 Q 的“雅中值”是 2，

$$\therefore P-Q=2,$$

$$\therefore \frac{E}{9-x^2} - \frac{2x}{3-x} = 2,$$

$$\therefore E-2x(3+x)=2(9-x^2),$$

$$\therefore E=18+6x;$$

故答案为: $18+6x$;

【小问 3 详解】

$$\text{解: 由 (2) 得 } P = \frac{18+6x}{9-x^2} = \frac{6(3+x)}{(3+x)(3-x)} = \frac{6}{3-x},$$

$\because x$ 为整数，且“雅中式” P 的值也为整数，

$\therefore 3-x$ 是 6 的因数,

$\therefore 3-x$ 可能是: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$,

$\therefore x$ 的值为: $-3, 0, 1, 2, 4, 5, 6, 9$.

$\because x \neq \pm 3$,

$\therefore x$ 的值为 $0, 1, 2, 4, 5, 6, 9$.