

期中试卷（拔尖卷）

（时间：90 分钟 分值：100 分）

一、选择题（本大题共 6 题，每题 3 分，满分 18 分）

1. 下列语句中正确的有（ ）个

(1) $-\frac{2^5 x^2 y^3}{3}$ 次数为 10 (2) 1 是整式 (3) 一个关于 x 的四次整式和一个关于 y 的五次整式相加，结果

是一定是一个五次整式 (4) 两个三次整式相加的结果可能是一个二次单项式

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】D

【解析】

【分析】根据单项式的次数，整式的定义，以及整式的加减逐一判断即可解答.

【详解】(1) $-\frac{2^5 x^2 y^3}{3}$ 的次数是 5 次，不是 10 次，不符合题意；

(2) 1 是整式，符合题意；

(3) 一个关于 x 的四次整式和一个关于 y 的五次整式相加，结果是一定是一个五次整式，符合题意；

(4) 两个三次整式相加的结果可能是一个二次单项式，符合题意；

故 (2) (3) (4) 正确，正确的个数为 3 个，

故选：D

【点睛】本题考查了单项式的次数，整式的定义，以及整式的加减，解题关键是熟练掌握整式加减后的次数不大于整式加减前的最高次数.

2. 下列从左到右变形，是因式分解的是（ ）

A. $a(2a^2 + 5ab - b^2) = 2a^3 + 5a^2b - ab^2$

B. $(x + 5y)(x - 5y) = x^2 - 25y^2$

C. $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

D. $2x^2 - 3x + 1 = x(2x - 3 + 1)$

【答案】C

【解析】

【分析】根据因式分解的定义逐个判断即可.

【详解】解: A. 从左到右的变形属于整式乘法, 不属于因式分解, 故本选项不符合题意;

B. 从左到右的变形属于整式乘法, 不属于因式分解, 故本选项不符合题意;

C. 从左到右的变形属于因式分解, 故本选项符合题意;

D. $2x^2 - 3x + 1 = (2x - 1)(x - 1)$, 故本选项不符合题意;

故选: C.

【点睛】本题考查了因式分解的定义, 能熟记因式分解的定义是解此题的关键, 注意: 把一个整式化成几个整式的积的形式, 叫因式分解.

3. 下列乘法中, 能应用平方差公式的是 ()

A. $(x - y)(y - x)$

B. $(2x - 3y)(3x + 2y)$

C. $(-x - y)(x + y)$

D. $(-2x - 3y)(3y - 2x)$

【答案】D

【解析】

【分析】根据平方差公式的形式判断即可;

【详解】 $(x - y)(y - x) = -(x - y)^2$, 故 A 不符合题意;

$(2x - 3y)(3x + 2y)$ 不能用平方差公式, 故 B 不符合题意;

$(-x - y)(x + y) = -(x + y)^2$, 故 C 不符合题意;

$(-2x - 3y)(3y - 2x) = 4x^2 - 9y^2$, 故 D 符合题意;

故选 D.

【点睛】本题主要考查了平方差公式的应用, 准确分析判断是解题的关键.

4. 已知 $2a - b = 5$, 则 $4a^2 - 6a + 3b - 4ab + b^2$ 的值为 ()

A. 10

B. 14

C. 16

D. 18

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了代数式求值、完全平方公式, 熟记完全平方公式是解题关键. 将所求式子利用完全平方公式转化为 $(4a^2 - 4ab + b^2) - (6a - 3b)$, 代入计算即可得.

【详解】解: $\because 2a - b = 5$,

$\therefore 4a^2 - 6a + 3b - 4ab + b^2 = (4a^2 - 4ab + b^2) - (6a - 3b)$

$$= (2a-b)^2 - 3(2a-b)$$

$$= 5^2 - 3 \times 5$$

$$= 10.$$

故选：A.

5. 下列整式中，与 $-3x+y$ 相乘的结果是 $-3x^2+10xy-3y^2$ 的整式是 ()

A. $x+3y$

B. $x-3y$

C. $3x+y$

D. $3x-y$

【答案】B

【解析】

【分析】用 $-3x+y$ 分别乘以各项的整式进行判断即可.

【详解】 $(x+3y)(-3x+y) = -3x^2 - 8xy + 3y^2$,

∴ 选项 A 不符合题意;

∴ $(x-3y)(-3x+y) = -3x^2 + 10xy - 3y^2$,

∴ 选项 B 符合题意;

∴ $(3x+y)(-3x+y) = -9x^2 + y^2$,

∴ 选项 C 不符合题意;

∴ $(3x-y)(-3x+y) = -9x^2 + 6xy - y^2$,

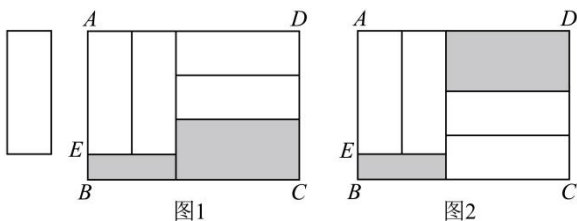
∴ 选项 D 不符合题意;

故选：B.

【点睛】本题考查了整式乘整式的计算能力，关键是能准确运用计算法则进行正确地计算.

6. 如图，将 4 张形状、大小完全相同的小长方形纸片分别以图 1、图 2 的方式放入长方形 $ABCD$ 中，

若图 1 中的阴影部分周长比图 2 的阴影部分周长少 1，则图中 BE 的长为 ()



A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. 2

【答案】B

二、填空题（本大题共 12 题，每题 2 分，满分 24 分）

7. 单项式 $\frac{(-xy^2)^3}{4\pi}$ 的系数是_____，次数是_____.

【答案】 ①. $-\frac{1}{4\pi}$ ②. 9

【解析】

【分析】先根据积的乘方将分子化简，根据单项式的系数与次数的定义即可求解. 单项式中的数字因数称这个单项式的系数；一个单项式中，所有字母的指数的和叫做这个单项式的次数.

【详解】解：单项式 $\frac{(-xy^2)^3}{4\pi} = -\frac{x^3y^6}{4\pi}$ 的系数是 $-\frac{1}{4\pi}$ ，次数是 9，

故答案为： $-\frac{1}{4\pi}$ ，9.

【点睛】本题考查了积的乘方，单项式的系数与次数的定义，掌握单项式的系数与次数的定义是解题的关键.

8. 已知 $3x^{2a+3}y^{4b-5}$ 与 $-3x^{a+4}y^{b+1}$ 是同类项，则 $a+b=$ _____.

【答案】 3

【解析】

【分析】本题考查同类项定义，一元一次方程，解题的关键是根据同类项定义列出一元一次方程并正确解方程. 本题由同类项的含义可得 $2a+3=a+4$ ， $4b-5=b+1$ ，再解方程可得答案.

【详解】解： $\because 3x^{2a+3}y^{4b-5}$ 与 $-3x^{a+4}y^{b+1}$ 是同类项，

$$\therefore 2a+3=a+4, \quad 4b-5=b+1,$$

解得： $a=1$ ， $b=2$ ，

$$\therefore a+b=3,$$

故答案为： 3

9. 整式 $6x^2+5y-xy$ 与整式 $-8xy+3x^2-y$ 的差是_____.

【答案】 $3x^2+6y+7xy$

【解析】

【分析】根据题意列出整式相减的式子，再去括号，合并同类项即可.

【详解】解： $(6x^2+5y-xy)-(-8xy+3x^2-y)$

$$= 6x^2+5y-xy+8xy-3x^2+y$$

$$= 3x^2+6y+7xy.$$

故答案为: $3x^2 + 6y + 7xy$.

【点睛】 本题考查的是整式的加减, 熟知整式的加减实质上就是合并同类项是解答此题的关键.

10. 若 $(5x - 3b)(ax + 1) = 20x^2 - 7x - c$, 则 $(a + c)^b =$ _____.

【答案】 7

【解析】

【分析】 根据等式中等号两边同类项的系数相等求出 a 、 b 、 c 的值, 然后代入计算即可.

【详解】 解: $\because (5x - 3b)(ax + 1) = 5ax^2 + (5 - 3ab)x - 3b$,

$$\therefore 5a = 20, \quad 5 - 3ab = -7, \quad 3b = c,$$

解得 $a = 4$,

把 $a = 4$ 代入得: $5 - 3 \times 4b = -7$,

$$\therefore b = 1,$$

$$\therefore c = 3 \times 1 = 3,$$

$$\therefore (a + c)^b = (4 + 3)^1 = 7^1 = 7,$$

故答案为: 7.

【点睛】 本题考查了整式乘整式, 运用相关法则正确计算是解题的关键.

11. 计算 $(0.04)^{2003} \times [(-5)^{2003}]^2 =$ _____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 首先逆用幂的乘方运算将式子转化成 $(0.04)^{2003} \times [(-5)^2]^{2003}$ 然后逆用积的乘方运算法则求解即可.

$$\text{【详解】 } (0.04)^{2003} \times [(-5)^{2003}]^2$$

$$= (0.04)^{2003} \times [(-5)^2]^{2003}$$

$$= (0.04 \times 25)^{2003}$$

$$= 1^{2003}$$

$$= 1.$$

【点睛】 此题考查了幂的乘方运算和积的乘方运算的逆用, 解题的关键是熟练掌握幂的乘方运算和积的乘方运算的逆用法则.

12. 已知 $x = 2^n + 3$, $y = 4^n + 5$, 用含字母 x 的代数式表示 y , 则 $y =$ _____

【答案】 $(x-3)^2 + 5$

【解析】

【分析】 先根据题意求出 $x-3=2^n$ ，接着变形 $4^n = (2^2)^n = (2^n)^2 = (x-3)^2$ ，将 $x-3=2^n$ 整体代入即可得到答案.

【详解】 解： $\because x=2^n+3$,

$$\therefore x-3=2^n,$$

$$\therefore 4^n = (2^2)^n = (2^n)^2,$$

$$\therefore 4^n = (2^n)^2 = (x-3)^2,$$

$$\therefore y = 4^n + 5 = (x-3)^2 + 5,$$

故答案为： $(x-3)^2 + 5$.

【点睛】 本题主要考查了幂的乘方的逆运算，熟知幂的乘方的逆运算是解题的关键.

13. 计算： $(2a-b+3c)(-2a-b-3c) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $b^2 - 4a^2 - 12ac - 9c^2$

【解析】

【分析】 本题考查了完全平方公式和平方差公式，利用平方差公式化简，再利用完全平方公式展开即可得到结果，能熟练理解和灵活运用完全平方公式是解题的关键.

【详解】 原式 $= [-b + (2a+3c)][-b - (2a+3c)]$,

$$= (-b)^2 - (2a+3c)^2,$$

$$= b^2 - (4a^2 + 12ac + 9c^2),$$

$$= b^2 - 4a^2 - 12ac - 9c^2.$$

故答案为： $b^2 - 4a^2 - 12ac - 9c^2$

14. 因式分解 $x^2 + mx - 12 = (x+p)(x+q)$ ，其中 m 、 p 、 q 都为整数，则这样的 m 的最大值是_____

【详解】 解： $\because x^2 + mx - 12 = (x+p)(x+q)$,

$$\therefore x^2 + mx - 12 = x^2 + (p+q)x + pq$$

$$\therefore -12 = (-1) \times 12 = (-12) \times 1 = (-2) \times 6 = (-6) \times 2 = (-3) \times 4 = (-4) \times 3,$$

$$-1+12=11, -12+1=-11, -2+6=4, -6+2=-4, -3+4=1, -4+3=-1$$

∴ m 的最大值为 11

15. 在对某二次三项式进行因式分解时, 甲同学因为看错了一次项系数而将其分解为 $2(x-1)(x-9)$, 乙同学因为看错了常数项而将其分解为 $2(x-2)(x-4)$, 请写出正确的因式分解的结果_____

【答案】 $2(x-3)^2$

【解析】

【分析】 根据乘法和因式分解的关系, 排除甲乙看错的项, 得到原二次三项式, 再因式分解即可.

【详解】 ∵ $2(x-1)(x-9)=2x^2-20x+18$,

$$2(x-2)(x-4)=2x^2-12x+16.$$

∴ 甲同学因为看错了一次项系数,

∴ 整式的二次项和常数项分别是 $2x^2$ 、18.

∴ 乙同学因为看错了常数项,

∴ 整式的二次项和一次项分别是 $2x^2$ 、 $-12x$,

所以该二次三项式为: $2x^2-12x+18$.

$$2x^2-12x+18$$

$$=2(x^2-6x+9)$$

$$=2(x-3)^2$$

故答案为: $2(x-3)^2$.

【点睛】 本题考查了因式分解和整式乘法的关系及整式的因式分解. 根据题意, 确定原来的二次三项式是解答本题的关键.

16. $2x+3$ _____ 整式 $2x^4-5x^3-10x^2+15x+18$ 的因式 (填“是”或“不是”)

【答案】 是

【解析】

【分析】 假设 $2x+3$ 是整式 $2x^4-5x^3-10x^2+15x+18$ 的因式, 则只需将整式 $2x^4-5x^3-10x^2+15x+18$ 进行分组, $2x^4-5x^3-10x^2+15x+18$ 可写成 $2x^4+3x^3-8x^3-12x^2+2x^2+3x+12x+18$, 此时两两一组分解因式即可得到结果.

【详解】 $2x^4-5x^3-10x^2+15x+18$,

$$=2x^4+3x^3-8x^3-12x^2+2x^2+3x+12x+18,$$

$$= x^3(2x+3) - 4x^2(2x+3) + x(2x+3) + 6(2x+3),$$

$$= (2x+3)(x^3 - 4x^2 + x + 6),$$

$\therefore 2x+3$ 是整式 $2x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 15x + 18$ 的因式.

故答案为: 是

【点睛】 本题主要考查因式分解的应用, 掌握分组分解法是解题的关键.

17. 若 $a = (-1)^{2022}$, $b = 2021 \times 2023 - 2022^2$, $c = 8^{2022} \times (-0.125)^{2023}$, 则 a 、 b 、 c 的大小关系是_____ (用 “>” 连接).

【答案】 $a > c > b$

【解析】

【分析】 根据有理数的乘方, 平方差公式以及积的乘方进行计算求得 a 、 b 、 c 的值, 即可求解.

【详解】 解: $a = (-1)^{2022} = 1$,

$$b = 2021 \times 2023 - 2022^2 = (2022-1)(2022+1) - 2022^2 = 2022^2 - 1 - 2022^2 = -1,$$

$$c = 8^{2022} \times (-0.125)^{2023} = -8^{2022} \times \left(\frac{1}{8}\right)^{2022} \times \frac{1}{8} = -\frac{1}{8},$$

$$\therefore -1 < -\frac{1}{8} < 1.$$

$$\therefore a > c > b.$$

故答案为: $a > c > b$.

【点睛】 本题考查了有理数的乘方, 平方差公式以及积的乘方, 有理数的大小比较, 掌握以上知识是解题的关键.

18. 若 $S = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{2021^2}\right) \left(1 - \frac{1}{2022^2}\right)$, 则 S 的值为_____.

【答案】 $\frac{2023}{4044}$

【解析】

【分析】 先根据平方差公式进行分解, 再计算能约分的直接约分即可.

【详解】 解: $S = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{2021^2}\right) \left(1 - \frac{1}{2022^2}\right)$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 + \frac{1}{3}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{2022}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2022}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \dots \times \frac{2021}{2022} \times \frac{2023}{2022} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{2023}{2022} \\
&= \frac{2023}{4044}.
\end{aligned}$$

故答案为: $\frac{2023}{4044}$.

【点睛】本题考查平方差公式的应用，有理数的混合运算，解题关键是巧用平方差公式达到简化计算的目的.

三、简答题

19. 计算:

$$(1) (-2x^2y)^3 + (-x^3)^2(-y)^2y$$

【答案】 $-7x^6y^3$

【解析】

【分析】先运算积的乘方、幂的乘方，同底数幂相乘，再合并同类项，即可作答.

【详解】解: $(-2x^2y)^3 + (-x^3)^2(-y)^2y = -8x^6y^3 + x^6y^3 = -7x^6y^3$.

【点睛】本题考查了积的乘方、幂的乘方，同底数幂相乘等运算法则，难度较小，正确掌握相关性质内容是解题的关键.

$$(2) (2a-5b) \cdot (3a^2-2ab+b^2)$$

【答案】 $6a^3-19a^2b+12ab^2-5b^3$

【解析】

【分析】根据整式乘以整式的法则，可表示为 $(a+b)(m+n) = am+an+bm+bn$ ，进行计算即可.

$$\begin{aligned}
&\text{【详解】解: } (2a-5b) \cdot (3a^2-2ab+b^2) \\
&= 2a \cdot (3a^2-2ab+b^2) - 5b \cdot (3a^2-2ab+b^2) \\
&= 6a^3-4a^2b+2ab^2 - (15a^2b-10ab^2+5b^3) \\
&= 6a^3-4a^2b+2ab^2-15a^2b+10ab^2-5b^3 \\
&= 6a^3-19a^2b+12ab^2-5b^3.
\end{aligned}$$

【点睛】本题主要考查了整式乘整式的运算，整式与整式相乘，先用一个整式的每一项乘另外一个整式的每一项，再把所得的积相加.

$$(3) (x+2y)(y-2)+(2y-4x)(y+1).$$

【答案】 $4y^2 - 3xy - 6x - 2y$

【解析】

【分析】 根据整式乘以整式的计算法则计算即可.

【详解】解: $(x+2y)(y-2)+(2y-4x)(y+1)$

$$= xy - 2x + 2y^2 - 4y + 2y^2 + 2y - 4xy - 4x$$

$$= 4y^2 - 3xy - 2y - 6x.$$

【点睛】 本题考查了整式的乘除, 熟练掌握整式乘以整式运算法则是解题的关键.

20. 分解因式: (1) $a^2(a+2b) - ab(-4b-2a).$

【答案】 $a(a+2b)^2$

【解析】

【分析】 先去括号, 然后合并同类项, 再提取公因式, 最后再利用完全平方公式逆运算.

【详解】解: $a^2(a+2b) - ab(-4b-2a)$

$$= a^3 + 2a^2b + 4ab^2 + 2a^2b$$

$$= a^3 + 4a^2b + 4ab^2$$

$$= a(a^2 + 4ab + 4b^2)$$

$$= a(a+2b)^2$$

【点睛】 本题考查了因式分解, 掌握提公因式法和公式法因式分解是解题关键.

(2) $(x^2 - 1)^2 - x^2 - 5$

【答案】 $(x-2)(x+2)(x^2+1)$

【解析】

【分析】 先运用完全平方差公式去括号, 然后合并同类项, 再运用十字相乘法分解因式, 最后运用平方差公式得到最后结果.

【详解】解: $(x^2 - 1)^2 - x^2 - 5$

$$= x^4 - 2x^2 + 1 - x^2 - 5$$

$$= x^4 - 3x^2 - 4$$

$$= (x^2 - 4)(x^2 + 1)$$

$$= (x - 2)(x + 2)(x^2 + 1)$$

【点睛】 本题考查分解因式，熟练掌握完全平方公式、十字相乘法以及平方差公式是解题关键.

$$(3) \quad 4x^3 - 2x^2 - 9xy^2 - 3xy$$

$$\text{【答案】 } x(2x + 3y)(2x - 3y - 1)$$

【解析】

【分析】 本题考查的是整式的因式分解，掌握分组分解因式是解本题的关键；本题先分成 2 组分别提公因式 x ，再进一步的提公因式分解因式即可.

$$\text{【详解】 解： } 4x^3 - 2x^2 - 9xy^2 - 3xy$$

$$= x(4x^2 - 9y^2) - x(2x + 3y)$$

$$= x(2x + 3y)(2x - 3y) - x(2x + 3y)$$

$$= x(2x + 3y)(2x - 3y - 1);$$

$$(4) \quad (x^2 - 4x + 2)(x^2 - 4x + 5) + 2$$

$$\text{【答案】 } (x - 1)(x - 3)(x - 2)^2$$

【解析】

【分析】 本题考查的是因式分解，掌握利用公式法与十字乘法分解因式是解本题的关键，本题先把 $x^2 - 4x$ 看作为整体，计算乘法运算，再利用十字乘法与公式法分解因式即可.

$$\text{【详解】 解： } (x^2 - 4x + 2)(x^2 - 4x + 5) + 2$$

$$= (x^2 - 4x)^2 + 7(x^2 - 4x) + 12$$

$$= (x^2 - 4x + 3)(x^2 - 4x + 4)$$

$$= (x - 1)(x - 3)(x - 2)^2.$$

$$(5) \quad x^2 - \frac{13}{6}x + 1$$

$$\text{【答案】 } \frac{1}{6}(2x - 3)(3x - 2)$$

【解析】

【分析】先提取公因式后，再利用十字相乘法进行分解即可.

【详解】解： $x^2 - \frac{13}{6}x + 1$
 $= \frac{1}{6}(6x^2 - 13x + 6)$
 $= \frac{1}{6}(2x - 3)(3x - 2)$

【点睛】此题考查了因式分解，熟练掌握十字相乘法是解题的关键.

21. 简便计算： $22^2 + 44 \times 18 + 18^2 + 19\frac{3}{4} \times 20\frac{1}{4}$;

【答案】 $1999\frac{15}{16}$

【解析】

【分析】本题主要考查了完全平方公式和平方差公式，把前三项用完全平方公式计算，后两项先变形为

$\left(20 - \frac{1}{4}\right) \times \left(20 + \frac{1}{4}\right)$ ，再利用平方差公式计算，最后计算加减法即可得到答案.

【详解】解： $22^2 + 44 \times 18 + 18^2 + 19\frac{3}{4} \times 20\frac{1}{4}$
 $= 22^2 + 2 \times 22 \times 18 + 18^2 + \left(20 - \frac{1}{4}\right) \times \left(20 + \frac{1}{4}\right)$
 $= (22 + 18)^2 + 20^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2$
 $= 40^2 + 400 - \frac{1}{16}$
 $= 1600 + 400 - \frac{1}{16}$
 $= 2000 - \frac{1}{16}$
 $= 1999\frac{15}{16}$.

四、解答题

22. 已知 $4^{2x} \cdot 5^{2x+1} - 4^{2x+1} \cdot 5^{2x} = 20^{3x-4}$ ，求 x 的值；

【答案】 $x=4$

【解析】

【分析】根据积的乘方的逆运算即可解得.

【详解】解： $4^{2x} \cdot 5^{2x+1} - 4^{2x+1} \cdot 5^{2x} = 20^{3x-4}$

$$4^{2x} \times 5^{2x} \times 4^{2x} \times 5^{2x} = 20^{3x-4}$$

$$20^{2x} \times 5 - 4 \times 20^{2x} = 20^{3x-4}$$

$$20^{2x} = 20^{3x-4}$$

$$2x = 3x - 4$$

$$x = 4$$

【点睛】此题考查了积的乘方的逆运算，题解的关键是转化成同底数.

23. 先化简后求值: $(2x^{n+2} - 4x^{n+1} + 2x^n) \div (-6x^n)$, 其中 $x = \frac{8}{5}$ (n 是正整数).

【答案】 $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}, -\frac{3}{25}$

【解析】

【分析】此题考查了多项式除以单项式的化简求值，解题的关键是掌握以上运算法则.

首先计算多项式除以单项式，然后将 $x = \frac{8}{5}$ 代入求解即可.

【详解】 $(2x^{n+2} - 4x^{n+1} + 2x^n) \div (-6x^n)$

$$= -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$\because x = \frac{8}{5}$$

$$\therefore \text{原式} = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{8}{5}\right)^2 + \frac{2}{3} \times \frac{8}{5} - \frac{1}{3} = -\frac{3}{25}.$$

24. 已知 $A = 3x^2 + ax - 3y + 2$, $B = bx^2 - \frac{2}{3}x - 2y + 4$, 且 A 与 B 的 3 倍的差的值与 x 的取值无关, 求代数

式 $-ab \left[a + \frac{1}{2}(4b - a + 6) \right] - 3 \left(2ab^2 - \frac{1}{6}a^2b - \frac{1}{3}ab \right)$ 的值.

【答案】 20

【解析】

【分析】根据题意先计算 $A - 3B$, 根据 $A - 3B$ 与 x 的取值无关, 求得 a, b 的值, 然后根据整式的乘法化简代数式, 将 a, b 的值代入进行计算即可求解.

【详解】解: $\because A - 3B$

$$= 3x^2 + ax - 3y + 2 - 3 \left(bx^2 - \frac{2}{3}x - 2y + 4 \right)$$

$$= 3x^2 + ax - 3y + 2 - 3bx^2 + 2x + 6y - 12$$

$$= (3-3b)x^2 + (a+2)x + 3y - 10,$$

$\therefore A-3B$ 与 x 的取值无关,

$$\therefore 3-3b=0, a+2=0,$$

解得 $a=-2, b=1$;

$$-ab \left[a + \frac{1}{2}(4b-a+6) \right] - 3 \left(2ab^2 - \frac{1}{6}a^2b - \frac{1}{3}ab \right)$$

$$= -ab \left(\frac{1}{2}a + 2b + 3 \right) - 6ab^2 + \frac{1}{2}a^2b + ab$$

$$= -\frac{1}{2}a^2b - 2ab^2 - 3ab - 6ab^2 + \frac{1}{2}a^2b + ab$$

$$= -8ab^2 - 2ab;$$

当 $a=-2, b=1$ 时,

$$-8ab^2 - 2ab = -8 \times (-2) \times 1^2 - 2 \times (-2) \times 1$$

$$= 16 + 4$$

$$= 20.$$

【点睛】 本题考查了整式的加减运算，整式的乘法运算，化简求值，正确的计算是解题的关键.

25. 甲、乙两人共同计算一道整式: $(x+a)(2x+b)$. 由于甲抄错了 a 的符号, 得到的结果是 $2x^2 - 7x + 3$,

乙漏抄了第二个整式中 x 的系数, 得到的结果是 $x^2 + 2x - 3$. 求 $(a-b)(-2a-b)$ 的值.

【答案】 -20

【解析】

【分析】 按甲乙错误的说法计算得出的系数的数值求出 a, b 的值, 将 a, b 的值代入 $(a-b)(-2a-b)$, 即可求解.

【详解】 解: 甲抄错了 a 的符号的计算结果为: $(x-a)(2x+b) = 2x^2 + (-2a+b)x - ab = 2x^2 - 7x + 3,$

$$\therefore -2a+b=-7, ab=-3$$

乙漏抄了第二个整式中 x 的系数, 计算结果为: $((x+a)(x+b) = x^2 + (x+b)x + ab = x^2 + 2x - 3.$

$$\therefore a+b=2, ab=-3,$$

$$\therefore \begin{cases} -2a+b=-7 \\ a+b=2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a=3 \\ b=-1 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=3 \\ b=-1 \end{cases},$$

$$\therefore (a-b)(-2a-b) = -2a^2 - ab + 2ab + b^2 = -2a^2 + ab + b^2$$

$$\text{当 } a=3, b=-1 \text{ 时, 原式} = -2 \times 3^2 - 3 + 1 = -20$$

【点睛】此题考查了整式乘整式，解二元一次方程组，解题的关键是根据整式乘整式的运算法则分别进行计算.

26. 配方法是数学中非常重要的一种思想方法，它是指将一个式子或将一个式子的某一部分通过恒等变形化为完全平方式或几个完全平方式的和的方法. 这种方法常被用到代数式的变形中，并结合非负数的意义来解决问题.

定义：若一个整数能表示成 $a^2 + b^2$ (a, b 为整数) 的形式，则称这个数为“完美数”.

例如，5 是“完美数”，理由：因为 $5 = 1^2 + 2^2$ ，所以 5 是“完美数”.

解决问题：

(1) 已知 29 是“完美数”，请将它写成 $a^2 + b^2$ (a, b 为整数) 的形式：_____

(2) 若 $x^2 - 4x + 5$ 可配方成 $(x - m)^2 + n$ (m, n 为常数)，则 $mn =$ _____

(3) 探究问题：已知 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$ ，求 $x + y$ 的值.

【答案】(1) $29 = 5^2 + 2^2$

(2) 2 (3) $x + y = -1$

【解析】

【分析】(1) 把 29 分为两个整数的平方即可；

(2) 原式利用完全平方公式配方后，确定出 m 与 n 的值，即可求出 mn 的值；

(3) 已知等式利用完全平方公式配方后，根据非负数的性质求出 x 与 y 的值，即可求出 $x + y$ 的值.

【小问 1 详解】

根据题意得 $29 = 5^2 + 2^2$,

故答案为 $29 = 5^2 + 2^2$.

【小问 2 详解】

$$x^2 - 4x + 5$$

$$= x^2 - 4x + 4 + 1$$

$$= (x-2)^2 + 1,$$

$$\therefore m = 2, n = 1,$$

$$\therefore mn = 2.$$

故答案为 2.

【小问 3 详解】

$$\text{解: } (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 0$$

$$\text{又} \because (x-1)^2 \geq 0, (y+2)^2 \geq 0,$$

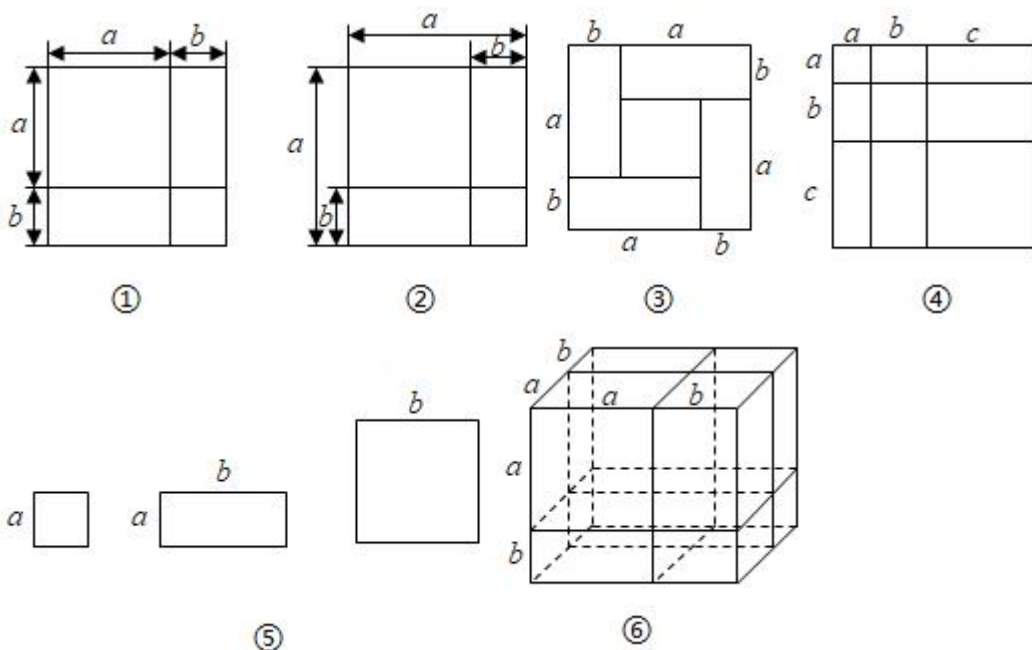
$$\therefore x-1=0, y+2=0,$$

$$\therefore x=1, y=-2,$$

$$\therefore x+y=-1.$$

【点睛】此题考查了配方法的应用，熟练掌握完全平方公式是解本题的关键.

27. 阅读理解，解答下列问题：利用平面图形中面积的等量关系可以得到某些数学公式.



(1) 例如，根据下图①，我们可以得到两数和的平方公式： $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 根据图②能得到的数学公式是_____.

(2) 如图③，请写出 $(a+b)$ 、 $(a-b)$ 、 ab 之间的等量关系是_____.

(3) 利用 (2) 的结论，解决问题：已知 $x+y=8$ ， $xy=2$ ，求 $(x-y)^2$ 的值.

(4) 根据图④，写出一个等式：_____.

(5) 小明同学用图⑤中 x 张边长为 a 的正方形， y 张边长为 b 的正方形， z 张宽、长分别为 a 、 b 的长方形纸片，用这些纸片恰好拼出一个面积为 $(3a+b)(a+3b)$ 长方形，请画出图形，并指出 $x+y+z$ 的值.

类似地，利用立体图形中体积的等量关系也可以得到某些数学公式.

(6) 根据图⑥，写出一个等式：_____.

【答案】 (1) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; (2) $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$; (3) 56; (4) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$; (5) 画图见解析, 16; (6) $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$

【分析】 (1)由图②中各个部分面积之间的关系可得答案;

(2)根据图③中，大正方形的面积为 $(a+b)^2$ ，小正方形的面积为 $(a-b)^2$ ，每个长方形的面积为 ab ，由各个部分的面积之间的关系可得出答案;

(3)由公式变形 $(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy$ ，再整体代入计算即可;

(4)大正方形的面积可表示为 $(a+b+c)^2$ ，在分别表示出大正方形中 9 块的面积，可得答案;

(5)根据拼出一个面积为 $(3a+b)(a+3b)$ ，即为 $3a^2 + 3b^2 + 10ab$ ，因此 $x=3$ ， $y=3$ ， $z=10$ ，进而拼图即可;

(6)根据大正方体的体积为 $(a+b)^3$ ，以及 8 个“小块”的体积之间的关系得出结果即可.

【解析】 (1) 根据图②各个部分面积之间的关系可得:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

故答案为: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

(2) $\because$ 图③中，大正方形的面积为 $(a+b)^2$,

小正方形的面积为 $(a-b)^2$,

每个长方形的面积为 ab ,

$$\therefore (a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab,$$

故答案为: $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$;

(3) 利用 (2) 的结论,

$$\text{可知 } (x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy,$$

$$\because x+y=8, xy=2,$$

$$\therefore (x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy = 64 - 8 = 56;$$

(4) 根据图④,

大正方形的面积可表示为 $(a+b+c)^2$,

$\therefore$ 内部 9 块的面积分别为:

$$a^2, b^2, c^2, ab, ab, ac, ac, bc, bc,$$

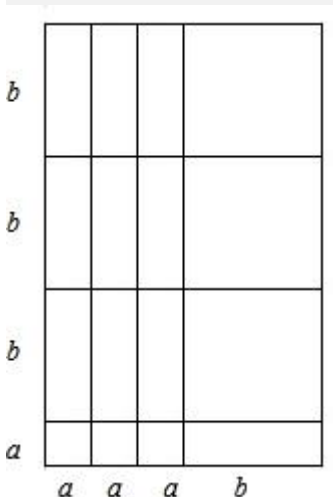
$$\therefore (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

故答案为: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;

$$(5) \because (3a+b)(a+3b) = 3a^2 + 3b^2 + 10ab,$$

$$\therefore x=3, y=3, z=10,$$

即需要 3 张边长为 a 的正方形, 3 张边长为 b 的正方形, 10 张宽、长分别为 a 、 b 的长方形纸片,
画图如下:



$$\therefore x+y+z=16;$$

(6) 根据图⑥,

大正方体的体积为 $(a+b)^3$,

分割成 8 个“小块”的体积分别为:

$$a^3, b^3, a^2b, a^2b, a^2b, ab^2, ab^2, ab^2,$$

$$\therefore (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$$

故答案为: $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$.

【点睛】 本题考查完全平方公式的几何背景、立方公式, 表示各个部分的面积和体积, 利用各个部分的面积或体积与整体的关系得出答案.