

2025-2026 学年七年级数学上学期期中模拟卷

强化卷·考试版

(考试时间: 100 分钟 试卷满分: 150 分)

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。
4. 测试范围: 沪教版 2024 五四制七年级上册第 10 章~12 章。

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 共 24 分. 下列各题四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题卡的相应位置上.)

1. 下列代数式中, 单项式的个数是 ()

① $2x-3y$; ② $\frac{x}{y}$; ③ $\frac{x}{2}$; ④ $-a$; ⑤ $\frac{2}{x+1}$; ⑥ $\frac{1}{\pi}$; ⑦ $-7x^2y$; ⑧ 1.

A. 3 个 B. 4 个 C. 5 个 D. 6 个

【答案】 C

【分析】 此题考查单项式的定义: 单独的数字或字母, 或数字与字母的乘积是单项式, 熟记定义是解题的关键. 根据定义逐个判断解答即可.

【详解】 解: 所给代数式中, 是单项式的有: ③ $\frac{x}{2}$; ④ $-a$; ⑥ $\frac{1}{\pi}$; ⑦ $-7x^2y$; ⑧ 1, 共 5 个.

故选: C.

2. 下列计算正确的是 ()

A. $a^8 \div a = a^9$ B. $2a + a = 2a^2$ C. $-a^3 \cdot 3a^4 = -3a^7$ D. $(2ab^2)^3 = 6a^3b^6$

【答案】 C

【分析】 本题主要考查了整式运算, 熟练掌握相关运算法则是解题关键. 根据同底数幂的除法、合并同类项法则、单项式乘以单项式法则、积的乘方运算法则, 逐项分析判断即可.

【详解】 解: A. $a^8 \div a = a^7$, 故原运算错误, 不符合题意;

B. $2a + a = 3a$, 故原运算错误, 不符合题意;

C. $-a^3 \cdot 3a^4 = -3a^7$, 选项正确, 符合题意;

D. $(2ab^2)^3 = 8a^3b^6$, 故原运算错误, 不符合题意.

故选: C.

3. 下列说法正确的是 ()

A. $\frac{-2vt}{3}$ 的系数是 -2

B. 3^2ab^3 的次数是 6 次

C. $\frac{x+y}{5}$ 是整式

D. x^2+x-1 的次数是 1

【答案】C

【分析】本题主要考查了单项式的次数、系数的定义, 整式的定义, 解题的关键在于能够熟知相关定义: 表示数或字母的积的式子叫做单项式, 单独的一个数或一个字母也是单项式, 单项式中数字因数叫做这个单项式的系数, 所有字母的指数之和叫做单项式的次数; 几个单项式的和的形式叫做整式; 根据这些知识判断即可.

【详解】解: A、 $\frac{-2vt}{3}$ 的系数是 $-\frac{2}{3}$, 原说法错误, 不符合题意;

B、 3^2ab^3 的次数是 $3+1=4$ 次, 原说法错误, 不符合题意;

C、 $\frac{x+y}{5}$ 是整式, 原说法正确, 符合题意;

D、 x^2+x-1 的次数是 2, 原说法错误, 不符合题意;

故选: C.

4. 下列各式中, 去括号或添括号正确的是 ()

A. $a^2-(2a-b+c)=a^2-2a-b+c$

B. $a-3x+2y-1=a+(-3x+2y-1)$

C. $3x-[5x-(2x-1)]=3x-5x-2x+1$

D. $-2x-y-a+1=-(2x-y)+(a-1)$

【答案】B

【分析】根据整式的去括号、添括号法则逐项判断即可得.

【详解】解: A、 $a^2-(2a-b+c)=a^2-2a+b-c$, 则此项错误;

B、 $a-3x+2y-1=a+(-3x+2y-1)$, 则此项正确;

C、 $3x-[5x-(2x-1)]=3x-5x+(2x-1)=3x-5x+2x-1$, 则此项错误;

D、 $-2x-y-a+1=-(2x+y)-(a-1)$, 则此项错误;

故选: B.

【点睛】 本题考查了整式的去括号、添括号，熟练掌握整式的去括号、添括号法则是解题关键.

5. 下列等式中，从左向右的变形为因式分解的是 ()

A. $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$

B. $a^2(a-1) = a^3 - a^2$

C. $a^2 - 2a - 1 = a(a-2) - 1$

D. $(a-3)(a+3) = a^2 - 9$

【答案】 A

【分析】 本题考查了因式分解，根据因式分解的定义“把一个整式化为几个整式的积的形式，这种变形叫做把这个整式因式分解，也叫分解因式”进行判断即可得.

【详解】 解： A. $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$ ，是因式分解，选项说法正确，符合题意；

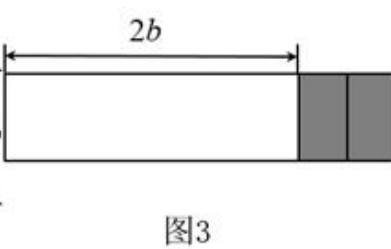
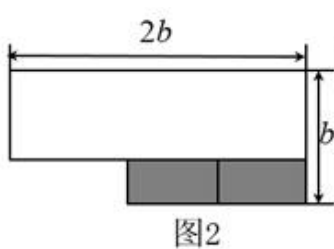
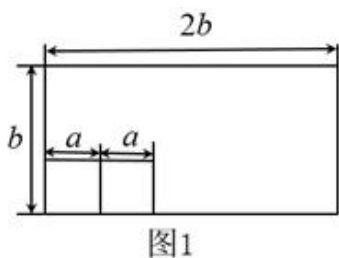
B. $a^2(a-1) = a^3 - a^2$ ，右边不是整式的积的形式，不是因式分解，选项说法错误，不符合题意；

C. $a^2 - 2a - 1 = a(a-2) - 1$ ，右边不是整式的积的形式，不是因式分解，选项说法错误，不符合题意；

D. $(a-3)(a+3) = a^2 - 9$ ，右边不是整式的积的形式，不是因式分解，选项说法错误，不符合题意；

故选： A .

6. 如图 1，在长为 $2b$ ，宽为 b 的长方形中去掉两个边长为 a 的小正方形得到图 2. 然后将图 2 中的阴影部分剪下，并将剪下的阴影部分从中间剪开，得到两个形状，大小完全相同的小长方形，将这两个小长方形与剩下的图形拼成如图 3 中的长方形，上述操作能够验证的等式是 ()



A. $(a+2b)^2 = a^2 + 4ab + 4b^2$

B. $(b-a)(2b+2a) = 2b^2 - 2a^2$

C. $(2b-a)^2 = 4b^2 - 4ab + a^2$

D. $a(2b-a) = 2ab - a^2$

【答案】 B

【分析】 根据图 1 易得去掉两个边长为 a 的小正方形的面积为 $2b^2 - 2a^2$ ，然后根据图 3 可得新的长方形的面积为 $(b-a)(2b+2a)$ ，进而问题可求解.

【详解】 解： 由图 1 得： 去掉两个边长为 a 的小正方形的面积为 $2b^2 - 2a^2$ ，
由图 3 得： 新的长方形的面积为 $(b-a)(2b+2a)$ ，

∴能够验证的等式为 $(b-a)(2b+2a) = 2b^2 - 2a^2$;

故选 B.

【点睛】 本题主要考查乘法公式与图形的关系，熟练掌握乘法公式是解题的关键.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 共 48 分.)

7. 合并同类项: $-3xy + 4xy =$ _____.

【答案】 xy / yx

【分析】 该题主要考查了合并同类项，解题的关键是掌握合并同类项法则.

根据合并同类项法则求解即可.

【详解】 解: $-3xy + 4xy = xy$,

故答案为: xy .

8. 单项式 $-\frac{a^2bc}{2}$ 的次数是_____, 系数是_____.

【答案】 4 $-\frac{1}{2}$

【分析】 利用单项式的次数与系数的定义求解即可.

【详解】 单项式 $-\frac{a^2bc}{2}$ 的次数是 4, 系数是 $-\frac{1}{2}$.

故答案为: 4, $-\frac{1}{2}$.

【点睛】 此题考查了单项式，解题的关键是熟记单项式的次数与系数的定义.

9. 计算: $(4x-3)(x+2) =$ _____.

【答案】 $4x^2 + 5x - 6$

【分析】 本题主要考查了整式的乘法运算，熟练掌握整式乘以整式法则是解题的关键.

根据整式与整式乘法法则计算，再去括号合并同类项即可.

【详解】 解: $(4x-3)(x+2) = 4x^2 + 8x - 3x - 6 = 4x^2 + 5x - 6$,

故答案为: $4x^2 + 5x - 6$.

10. 把整式 $32x^3y - \frac{4}{5}y^2 + \frac{1}{3}xy - 12x^2$ 按照字母 x 降幂排列: _____.

【答案】 $32x^3y - 12x^2 + \frac{1}{3}xy - \frac{4}{5}y^2$

【详解】 试题解析: 整式按某个字母降幂排列，则该字母的幂按从大到小的顺序排列. 从而，整式

$32x^3y - \frac{4}{5}y^2 + \frac{1}{3}xy - 12x^2$ 按照字母 x 降幂排列, 得 $32x^3y - 12x^2 + \frac{1}{3}xy - \frac{4}{5}y^2$.

11. 分解因式: $2a^3b^2 - 3a^2b^2 =$ _____.

【答案】 $a^2b^2(2a-3)$

【分析】 此题主要考查了提取公因式法分解因式, 正确找出公因式是解题关键. 直接提取公因式 a^2b^2 , 进而分解因式得出答案.

【详解】 解: 原式 $= a^2b^2(2a-3)$.

故答案为: $a^2b^2(2a-3)$.

12. 计算: $(-6a^3b + 3a) \div 3a =$ _____.

【答案】 $-2a^2b + 1$

【分析】 此题主要考查整式的除法, 解题的关键是熟知整式除以单项式的运算法则. 根据整式除以单项式的运算法则即可求解.

【详解】 解: $(-6a^3b + 3a) \div 3a = -2a^2b + 1$.

故答案为: $-2a^2b + 1$.

13. 已知 $3a^{m+1}b^4$ 与 $-5a^5b^{n-1}$ 是同类项, 则 $\frac{1}{2}m + n =$ _____.

【答案】 7

【分析】 本题考查了同类项的知识, 根据同类项: 所含字母相同, 相同字母的指数也相同, 即可得出 m 、 n 的值, 代入计算即可得出答案, 熟练掌握同类项的定义是解此题的关键.

【详解】 解: $\because 3a^{m+1}b^4$ 与 $-5a^5b^{n-1}$ 是同类项,

$\therefore m+1=5, \quad n-1=4,$

$\therefore m=4, \quad n=5,$

$\therefore \frac{1}{2}m + n = \frac{1}{2} \times 4 + 5 = 7,$

故答案为: 7.

14. 在横线上填入适当的整式: $(-r-2)(\text{_____}) = r^2 - 4$.

【答案】 $-r+2$

【分析】 本题考查平方差公式, 根据平方差公式填空即可.

【详解】 解: $(-r)^2 = r^2, \quad 2^2 = 4,$

根据 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$,

可知: $(-r-2)(-r+2)=r^2-4$,

故答案为: $-r+2$.

15. 已知一个整式与 $3x^2-4x-5$ 的和是 $4-2x^2$, 则这个整式是_____.

【答案】 $-5x^2+4x+9$

【分析】 本题主要考查了整式的加减计算, 根据加减法互为逆运算, 只需要计算出 $(4-2x^2)-(3x^2-4x-5)$ 的结果即可得到答案.

【详解】 解: $(4-2x^2)-(3x^2-4x-5)$

$$=4-2x^2-3x^2+4x+5$$

$$=-5x^2+4x+9,$$

$\therefore$ 整式 $-5x^2+4x+9$ 与 $3x^2-4x-5$ 的和是 $4-2x^2$,

故答案为: $-5x^2+4x+9$.

16. 若关于 x 的整式 $x^2-(2-m)x+64$ 是某个关于 x 的整式的平方, 则 $m=_____$.

【答案】 -14 或 18

【分析】 本题主要考查了完全平方式, 根据题意可知两平方项为 $x^2, 8^2$, 则一次项为 $\pm 2 \cdot x \cdot 8$, 据此求解即可.

【详解】 解: $\because$ 关于 x 的整式 $x^2-(2-m)x+64$ 是某个关于 x 的整式的平方,

$$x^2-(2-m)x+64=x^2-(2-m)x+8^2,$$

$$\therefore -(2-m)x=\pm 2 \cdot x \cdot 8,$$

$$\therefore m-2=\pm 16,$$

$$\therefore m=18 \text{ 或 } m=-14,$$

故答案为: -14 或 18 .

17. $(x^2-ax+2)(x+1)$ 展开后不含 x 的一次项, 则 $a=_____$.

【答案】 2

【分析】 本题考查了整式乘以整式, 将原式展开后按照 x 的降幂排列, 由整式不含 x 的一次项得出其系数为 0 可得答案, 熟练掌握法则是解题的关键.

【详解】 解: $(x^2-ax+2)(x+1)$

$$= x^3 - ax^2 + 2x + x^2 - ax + 2$$

$$= x^3 + (1-a)x^2 + (2-a)x + 2,$$

$\therefore$ 不含 x 的一次项,

$$\therefore 2-a=0, \text{ 解得 } a=2,$$

故答案为: 2.

18. 定义: 如果一个正整数能表示为两个正整数 m, n 的平方差, 且 $m-n=2$, 则称这个正整数为“智慧优数”. 例如, 当 $m=3, n=1$ 时, $8=3^2-1^2$, 8 是一个智慧优数, 若将智慧优数从小到大排列, 第 2024 个智慧优数是_____.

【答案】 8100

【分析】 本题主要考查了因式分解的应用, 数字类的规律探索, 利用平方差公式求出 $m^2-n^2=4(n+1)$, 据此得到 $4(n+1)$ 是从 8 开始且能被 4 整除的正整数, 再把 $n=2024$ 代入 $4(n+1)$ 中, 计算出对应的结果即可得到答案.

【详解】 解: $\because m-n=2$,

$$\therefore m=n+2,$$

$$\therefore m^2-n^2=(n+2+n)(n+2-n)=4(n+1),$$

$\therefore m, n$ 都是正整数,

$\therefore n+1$ 是大于等于 2 的正整数,

$\therefore 4(n+1)$ 是从 8 开始且能被 4 整除的正整数,

$$\therefore \text{第 } 2024 \text{ 个智慧优数是 } 4 \times (2024+1) = 8100,$$

故答案为: 8100.

三、解答题: (本大题共 11 题, 共 78 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.)

19. 计算:

$$(1) (a+6)(a-2) - a(a+3).$$

$$(2) (-3x)^2 \cdot x^2 + (-x)^3 \cdot x + (-x)^4.$$

【答案】 (1) $a-12$

(2) $9x^4$

【分析】 本题考查了整式的混合运算，积的乘方运算，解题关键是掌握上述知识点并能运用求解.

(1) 利用整式乘以整式，单项式乘以整式法则展开，先合并同类项即可；

(2) 先利用积的乘方运算，同底数幂相乘计算，再合并同类项即可.

【详解】 (1) 解: $(a+6)(a-2)-a(a+3)$

$$= a^2 + 6a - 2a - 12 - a^2 - 3a$$

$$= a - 12;$$

(2) $(-3x)^2 \cdot x^2 + (-x)^3 \cdot x + (-x)^4$

$$= 9x^2 \cdot x^2 - x^3 \cdot x + x^4$$

$$= 9x^4 - x^4 + x^4$$

$$= 9x^4.$$

20. 计算:

(1) $(x+y-2)(x-y+2)$;

(2) $(2x-1)(2x+1)(4x^2+1)$.

【答案】 (1) $x^2 - y^2 + 4y - 4$;

(2) $16x^4 - 1$.

【分析】 本题主要考查了平方差公式和完全平方公式，熟练掌握平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 和完全平方公式 $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ 的应用是解题的关键.

(1) 把式子变形为 $[x+(y-2)][x-(y-2)]$ ，利用平方差公式展开，再利用完全平方公式化简.

(2) 先利用平方差公式计算 $(2x-1)(2x+1)$ ，再将结果与 $(4x^2+1)$ 利用平方差公式计算.

【详解】 (1) 解: $(x+y-2)(x-y+2)$

$$= [x+(y-2)][x-(y-2)]$$

$$= x^2 - (y-2)^2$$

$$= x^2 - (y^2 - 4y + 4)$$

$$= x^2 - y^2 + 4y - 4;$$

$$\begin{aligned}
 & \text{(2) 解: } (2x-1)(2x+1)(4x^2+1) \\
 &= [(2x)^2-1^2](4x^2+1) \\
 &= (4x^2-1)(4x^2+1) \\
 &= (4x^2)^2-1^2 \\
 &= 16x^4-1.
 \end{aligned}$$

21. 因式分解

$$(1) 9(m+n)^2 - 3(m-n)(m+n).$$

$$(2) -4x^3 + 16x^2 - 16x.$$

$$(3) x^2 - 9y^2 + 9 - 6x.$$

$$(4) (x^2 - 4x)^2 - 8(x^2 - 4x) - 48.$$

$$\text{【答案】 (1) } 6(m+n)(m+2n)$$

$$(2) -4x(x-2)^2$$

$$(3) (x-3+3y)(x-3-3y)$$

$$(4) (x-6)(x+2)(x-2)^2$$

【分析】 本题主要考查了解因式：

(1) 先提取公因式 $3(m+n)$ ，再合并同类项后提取公因数 2 分解因式即可；

(2) 先提取公因式 $-4x$ ，再利用平方差公式分解因式即可；

(3) 利用平方差公式和完全平方公式分解因式即可；

(4) 先把 $(x^2 - 4x)$ 看做一个整体利用十字相乘法分解因式，再利用完全平方公式和十字相乘法进一步分解因式即可。

$$\begin{aligned}
 & \text{【详解】 (1) 解: } 9(m+n)^2 - 3(m-n)(m+n) \\
 &= 3(m+n)[3(m+n) - (m-n)] \\
 &= 3(m+n)(3m+3n-m+n) \\
 &= 3(m+n)(2m+4n)
 \end{aligned}$$

$$= 6(m+n)(m+2n);$$

(2) 解: $-4x^3 + 16x^2 - 16x$

$$= -4x(x^2 - 4x + 4)$$

$$= -4x(x-2)^2;$$

(3) 解: $x^2 - 9y^2 + 9 - 6x$

$$= (x^2 - 6x + 9) - 9y^2$$

$$= (x-3)^2 - 9y^2$$

$$= (x-3+3y)(x-3-3y);$$

(4) 解: $(x^2 - 4x)^2 - 8(x^2 - 4x) - 48$

$$= (x^2 - 4x - 12)(x^2 - 4x + 4)$$

$$= (x-6)(x+2)(x-2)^2.$$

22. 先化简, 再求值 $[(x+2y)^2 - (x+y)(3x-y) - 5y^2] \div 2x$, 其中 $x = -2, y = \frac{1}{2}$

【答案】 $-x + y; \frac{5}{2}$

【分析】 本题考查整式的混合运算, 化简求值, 先进行完全平方公式和整式乘整式的运算, 再合并同类项计算括号内, 再进行整式除以单项式的运算, 然后代入值计算即可.

【详解】 解: $[(x+2y)^2 - (x+y)(3x-y) - 5y^2] \div 2x$

$$= (x^2 + 4xy + 4y^2 - 3x^2 - 2xy + y^2 - 5y^2) \div 2x$$

$$= (-2x^2 + 2xy) \div 2x$$

$$= -x + y;$$

当 $x = -2, y = \frac{1}{2}$ 时,

$$\text{原式} = -(-2) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

23. 已知 $3^a = 4, 3^b = 10, 3^c = 16$.

(1) 求 3^{a+b} 的值;

(2) 求 3^{2a-c} 的值.

【答案】(1)40

(2)1

【分析】本题考查了幂的运算公式的逆用，能熟练利用幂的运算公式的逆用进行求解是解题的关键.

(1) 由同底数幂的乘法公式逆用得 $3^{a+b} = 3^a \cdot 3^b$ ，即可求解；

(2) 由幂的乘方及同底数幂的除法公式逆用得 $3^{2a-c} = (3^a)^2 \div 3^c$ ，即可求解；

【详解】(1) 解： $\because 3^a = 4, 3^b = 10$ ，

$$\therefore 3^{a+b} = 3^a \cdot 3^b$$

$$= 4 \times 10$$

$$= 40;$$

(2) 解： $\because 3^a = 4, 3^c = 16$ ，

$$\therefore 3^{2a-c} = (3^a)^2 \div 3^c$$

$$= 4^2 \div 16$$

$$= 1.$$

24. 已知 $a+b=5, ab=4$ ，求

(1) $a^2 + b^2$ ；

(2) $(a-b)^2 + 5$

【答案】(1)17

(2)14

【分析】本题考查了完全平方公式，用公式法解因式，解决本题的关键是熟记完全平方公式.

(1) 根据 $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ ，即可解答；

(2) 根据 $(a-b)^2 + 5 = a^2 + b^2 - 2ab + 5$ ，即可解答.

【详解】(1) 解： $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

$$= 5^2 - 2 \times 4$$

$$= 17;$$

(2) 解： $(a-b)^2 + 5 = a^2 + b^2 - 2ab + 5$

$$= 17 - 2 \times 4 + 5$$

$$= 14.$$

25. 一位同学做一道题：已知两个整式 A 、 B ，计算 $A-B$ 的结果为 $2x^2 - 5x + 5$ ，已知 $B = x^2 + 3x - 2$.

(1)用含有 x 的式子表示 A ;

(2) $3B - A$.

【答案】(1) $3x^2 - 2x + 3$

(2) $11x - 9$

【分析】本题主要考查了整式的加减，熟练掌握合并同类项法则是解题关键.

(1) 直接利用已知结合整式的加减运算法则得出 A 即可;

(2) 直接利用整式的加减运算法则得出答案.

【详解】(1) 解: $\because A - B$ 的结果为 $2x^2 - 5x + 5$, $B = x^2 + 3x - 2$,

$$\therefore A = 2x^2 - 5x + 5 + (x^2 + 3x - 2)$$

$$= 2x^2 - 5x + 5 + x^2 + 3x - 2$$

$$= 3x^2 - 2x + 3;$$

(2) 解: $3B - A$

$$= 3(x^2 + 3x - 2) - (3x^2 - 2x + 3)$$

$$= 3x^2 + 9x - 6 - 3x^2 + 2x - 3$$

$$= 11x - 9.$$

26. 甲、乙二人共同计算 $2(x+a)(x+b)$, 由于甲把第一个整式中 a 前面的符号抄成了“-”, 得到的结果为

$2x^2 + 4x - 30$; 由于乙漏抄了 2, 得到的结果为 $x^2 + 8x + 15$.

(1)求 a, b 的值;

(2)求出正确的结果.

【答案】(1)3, 5

(2) $2x^2 + 16x + 30$

【分析】本题考查整式乘以整式, 整式的混合运算和解二元一次方程组等知识点, 能正确根据整式的运算法则进行化简是解题的关键.

(1) 根据已知得出算式 $2(x-a)(x+b)$ 和 $(x+a)(x+b)$, 再根据整式的运算法则进行化简, 得出 a, b 的方程组, 解得即可;

(2) 根据整式的运算法则求出即可.

【详解】(1) $\because$ 甲把第一个整式中 a 前面的符号抄成了“-”, 得到的结果为 $2x^2 + 4x - 30$,

$$\therefore 2(x-a)(x+b)$$

$$= 2x^2 + 2bx - 2ax - 2ab$$

$$= 2x^2 + (2b - 2a)x - 2ab$$

$$= 2x^2 + 4x - 30,$$

$$\therefore 2b - 2a = 4, \text{ 即 } b - a = 2,$$

$$\because \text{乙漏抄了 } 2, \text{ 得到的结果为 } x^2 + 8x + 15,$$

$$\therefore (x + a)(x + b)$$

$$= x^2 + bx + ax + ab$$

$$= x^2 + (a + b)x + ab$$

$$= x^2 + 8x + 15,$$

$$\therefore a + b = 8,$$

$$\text{解方程组 } \begin{cases} b - a = 2 \\ a + b = 8 \end{cases} \text{ 得: } \begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \end{cases},$$

$$\text{即 } a = 3, \quad b = 5;$$

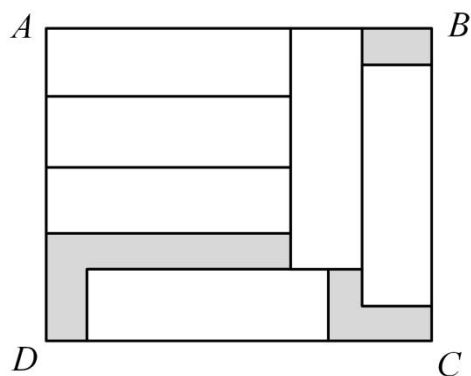
$$(2) \quad 2(x + 3)(x + 5)$$

$$= 2(x^2 + 5x + 3x + 15)$$

$$= 2(x^2 + 8x + 15)$$

$$= 2x^2 + 16x + 30.$$

27. 如图, 在长方形 $ABCD$ 中, 放入 6 个形状和大小都相同的小长方形, 已知小长方形的长为 a , 宽为 b .



(1) 用含 a , b 的代数式表示长方形 $ABCD$ 的长 AB 、宽 AD ;

(2) 用含 a , b 的代数式表示阴影部分的面积.

【答案】 (1) $AB = a + 2b$, $AD = a + b$

(2) $a^2 - 3ab + 2b^2$

【分析】(1) 由图可得： $AB = a + b + b = a + 2b$ $AD = a + b$ ，即可得到答案；

(2) 由 $S_{\text{阴影}} = S_{\text{长方形}ABCD} - 6S_{\text{小长方形}}$ ，进行计算即可得到答案.

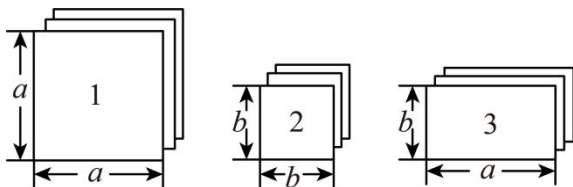
【详解】(1) 解：由图形得： $AB = a + 2b$ ， $AD = a + b$ ；

(2) 解：由图可知：

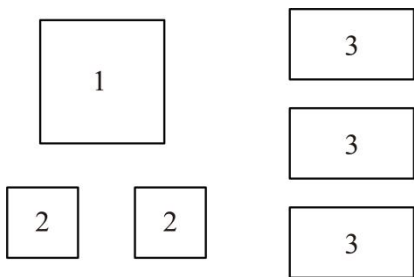
$$S_{\text{阴影}} = S_{\text{长方形}ABCD} - 6S_{\text{小长方形}} = (a+b)(a+2b) - 6ab = a^2 + 2ab + ab + 2b^2 - 6ab = a^2 - 3ab + 2b^2.$$

【点睛】本题考查了列代数式，整式的混合运算，认真观察图形，正确得出长方形 $ABCD$ 的长 AB 、宽 AD 是解题的关键.

28. 有足够多的长方形和正方形卡片，如下图：



(1) 如果选取 1 号、2 号、3 号卡片分别为 1 张、2 张、3 张，可拼成一个长方形（不重叠无缝隙），请画出这个长方形的草图，并运用拼图前后面积之间的关系说明这个长方形的代数意义.



(2) 小明想用类似方法解释整式乘法 $(a+3b)(2a+b) = 2a^2 + 7ab + 3b^2$ ，那么需用 2 号卡片_张，3 号卡片_张；

(3) 如果要拼成一个长为 $(3a+b)$ ，宽为 $(a+2b)$ 的大长方形，则需要 1 号卡片_张.

【答案】(1) 长方形见解析， $a^2 + 3ab + 2b^2 = (a+b)(a+2b)$

(2) 3, 7

(3) 3

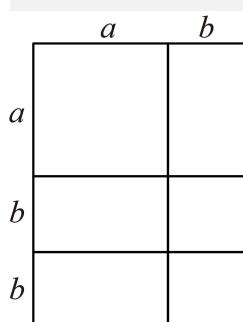
【分析】本题考查了整式乘法与几何图形，根据图形面积相等建立等量关系是解题关键.

(1) 画出长方形可知长方形的长为 $(a+2b)$ ，宽为 $(a+b)$ ，根据拼成的大长方形面积为 $a^2 + 3ab + 2b^2$ 即可求解；

(2) 根据 1 号正方形的面积为 a^2 ，2 号正方形的面积为 b^2 ，3 号长方形的面积为 ab 即可求解；

(3) 根据 $(3a+b)(a+2b) = 3a^2 + 7ab + 2b^2$ 即可求解;

【详解】(1) 解: 如图所示:



由图可知拼成的长方形的长为 $(a+2b)$, 宽为 $(a+b)$

$\therefore$ 大长方形的面积 $= (a+b)(a+2b)$

$\therefore$ 拼成的大长方形面积为 $a^2 + 3ab + 2b^2$

$\therefore$ 大长方形的代数意义为 $a^2 + 3ab + 2b^2 = (a+b)(a+2b)$

(2) 解: 1 号正方形的面积为 a^2 , 2 号正方形的面积为 b^2 , 3 号长方形的面积为 ab .

故根据 (1) 中的结论可知, 需要 2 号卡片 3 张, 3 号卡片 7 张.

故答案为: 3, 7

(3) 解: $\because (3a+b)(a+2b) = 3a^2 + 7ab + 2b^2$,

$\therefore$ 需要 1 号卡片 3 张.

故答案为: 3

29. 【阅读材料】两个两位数相乘, 如果这两个因数的个位数字相同, 十位数字的和是 10, 该类乘法可以利用一种特殊的速算方法:

比如 $47 \times 67 = \underset{4 \times 6 + 7}{31} \underset{7 \times 7}{49}$, 它们乘积的前两位是 $4 \times 6 + 7 = 31$, 它们乘积的后两位是 $7 \times 7 = 49$, 所以 $47 \times 67 = 3149$.

又如 $13 \times 93 = \underset{1 \times 9 + 3}{12} \underset{3 \times 3}{09}$, 它们乘积的前两位是 $1 \times 9 + 3 = 12$, 它们乘积的后两位是 $3 \times 3 = 9$, 不足两位, 就将 9

写在个位, 十位上写 0, 所以 $13 \times 93 = 1209$.

该速算方法可以用我们所学的数学知识说明其合理性:

观察与归纳:

(1) 观察上述例子, 请归纳这种速算方法, 并以 86×26 为例说明;

推理与解释:

(2) 该速算方法可以将其用字母进行表示, 设其中一个因数的十位数字为 a , 个位数字是 b , (a 、 b 表示 1~9

的整数)

则该数可表示为 $10a+b$ ，另一因数可表示为_____，

用速算方法得到的结果可以表示为 $100[\quad]+b^2$ ，

请运用所学数学知识，说明满足条件的两个因数相乘所得结果一定与速算方法所得结果相同.

探索与推广：

(3)已知某宝藏的开锁密码 是一个自然数， $\quad +1$ 是一个正整数的平方， $\quad -88$ 是另一个正整数的平方. 你能凭借自己的智慧解开密码获取宝藏吗？（请简要说明你的解密过程和理由）



【答案】(1)归纳见解析； 2236

(2)见解析； $10(10-a)+b$ ； $a(10-a)+b$.

(3) 2024

【分析】本题考查了整式的乘法以及因式分解的应用，解二元一次方程组；

(1) 根据材料写出速算方法，并用速算方法计算 86×26 ，即可求解；

(2) 设其中一个因数的十位数字为 a ，个位数字是 b ，（ a 、 b 表示1~9的整数）则该数可表示为 $10a+b$ ，另一因数可表示为 $10(10-a)+b$ ，进而按照整式的乘法进行计算，最后根据因式分解得出结论；

(3) 设 $\quad +1=a^2$ ， $\quad -88=b^2$ ，得出 $a^2-b^2=89$ ，根据平方差公式因式分解得出 $(a+b)(a-b)=89$ ，进而求得 a, b 的值，即可求解.

【详解】(1) 解：这种速算方法是：将一因数的十位数字与另一个因数的十位数字加1的和相乘，所得的积作为计算结果的前两位，将两个因数的个位数字之积作为计算结果的后两位（数位不足的两位，用零补齐）

例如： 86×26

$$=100\times(8\times 2+6)+36$$

$$=2236$$

(2) 设其中一个因数的十位数字为 a ，个位数字是 b ，（ a 、 b 表示1~9的整数）

则该数可表示为 $10a+b$ ，另一因数可表示为 $10(10-a)+b$ ，

$$\therefore (10a+b) \times [10(10-a)+b]$$

$$= (10a+b)(100-10a+b)$$

$$= 1000a - 100a^2 + 10ab + 100b - 10ab + b^2$$

$$= 100(10a - a^2 + b) + b^2$$

$$= 100[a(10-a)+b] + b^2$$

$\therefore$ 满足条件的两个因数相乘所得结果一定与速算方法所得结果相同；

故答案为： $10(10-a)+b$ ； $a(10-a)+b$ 。

(3) 解：设 $+1 = a^2$ ， $-88 = b^2$

$$\therefore = a^2 - 1 = b^2 + 88$$

$$\therefore a^2 - b^2 = 89$$

$$\therefore (a+b)(a-b) = 89$$

$\because 89$ 是素数，

$$\therefore 89 = 1 \times 89,$$

$\because a, b$ 是正整数，

$$\therefore \begin{cases} a+b=89 \\ a-b=1 \end{cases}$$

解得： $\begin{cases} a=45 \\ b=44 \end{cases}$

$$\therefore = a^2 - 1 = 45^2 - 1 = 2024$$