

2025 学年第一学期七年级数学学科期中试卷

(考试时间: 90 分钟 试卷满分: 100 分)

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 2 分, 共 12 分. 下列各题四个选项中, 有且只有一个选项是正确的)

1. 下列结论中, 正确的是 ()

A. 单项式 $\frac{3xy^2}{7}$ 的系数是 3, 次数是 2

B. 单项式 $-xy^2z$ 的系数是 -1 , 次数是 4

C. 单项式 m 的次数是 1, 没有系数

D. 多项式 $2x^3 + x^2y^2 + 3$ 是三次三项式

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了整式的相关概念, 解决本题的关键是根据相关的概念逐一判断即可.

根据多项式的概念以及单项式系数、次数的定义对各选项分析判断即可得解.

【详解】 解: A、单项式 $\frac{3xy^2}{7}$ 的系数是 $\frac{3}{7}$, 次数是 3, 该选项错误, 不符合题意;

B、单项式 $-xy^2z$ 的系数是 -1 , 次数是 4, 该选项正确, 符合题意;

C、单项式 m 的次数是 1, 系数是 1, 该选项错误, 不符合题意;

D、多项式 $2x^3 + x^2y^2 + 3$ 是四次三项式, 该选项错误, 不符合题意;

故选 B.

2. 如果 A 、 B 都是关于 x 的单项式, 且 $A \cdot B$ 是一个八次单项式, $A - B$ 是一个五次多项式, 那么 $A + B$ 的次数 ().

A. 一定是五次

B. 一定是八次

C. 一定是三次

D. 无法确定

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了整式的加减, 单项式乘单项式, 利用单项式乘单项式, 单项式的加减运算来判断即可.

【详解】 解: $\because A \cdot B$ 是一个八次单项式,

$\therefore$ 单项式 A 、 B 次数之和是 8,

$\because A - B$ 是一个五次多项式,

$\therefore$ 单项式 A 、 B 有一个是五次单项式,

$\therefore$ 单项式 A 、 B 一个是五次单项式, 一个是三次单项式,

$\therefore A+B$ 的次数是五次.

故选: A.

3. 若 $a^m = 4$, $a^n = 8$, 则 $a^{3m-2n} =$ ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了逆用同底数幂除法法则和幂的乘方的运算法则, 先逆用同底数幂除法法则、然后再运用幂的乘方的运算法则将 a^{3m-2n} 化成含有 a^m 和 a^n 的形式, 然后代入即可解答.

【详解】 解: $a^{3m-2n} = a^{3m} \div a^{2n} = (a^m)^3 \div (a^n)^2 = 4^3 \div 8^2 = 1$,

故选: B.

4. 在边长为 a 的正方形中剪去一个边长为 b 的小正方形 ($a > b$, 如图 1), 把余下部分沿虚线剪开拼成一个长方形 (如图 2), 根据两个图形中阴影部分的面积相等, 可以验证公式 ()

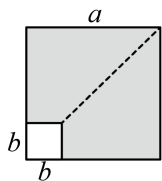


图1

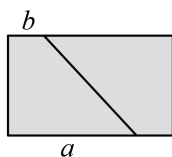


图2

A. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

B. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

C. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

D. $a(a-b) = a^2 + ab$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了平方差公式的几何解释, 正确理解公式是解题的关键.

【详解】 解: 图 1 阴影部分的面积为两个正方形的面积差, 即 $a^2 - b^2$,

图 2 是长为 $a+b$, 宽为 $a-b$ 的长方形, 此时长方形的面积为 $(a+b)(a-b)$,

根据面积相等的性质, 得 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$,

即: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$,

故选: C.

5. 下列因式分解正确的是 ()

A. $12abc - 3bc^2 = 3b(4ac - c^2)$

B. $(a-b)^2 + 4ab = (a-2b)^2$

C. $3ax^2 - 3ay^2 = 3a(x^2 - y^2)$

D. $(x-4)(x+1) + 3x = (x+2)(x-2)$

【答案】D

【解析】

【分析】依据因式分解的法则，先提取最大的公因式，然后再作进一步分解，并将因式分解到不能再分解为止.

【详解】A、 $12abc - 3bc^2 = 3bc(4a - c^2)$ ，此选项错误，不符合题意；

B、 $(a-b)^2 + 4ab = (a+b)^2$ ，此选项错误，不符合题意；

C、 $3ax^2 - 3ay^2 = 3a(x^2 - y^2) = 3a(x+y)(x-y)$ ，此选项错误，不符合题意；

D、 $(x-4)(x+1) + 3x = (x+2)(x-2)$ ，此选项正确，符合题意.

故选：D.

【点睛】本题考查了因式分解，解题的关键是掌握因式分解的步骤，即先提取最大的公因式，并将因式分解到再不能分解为止.

6. 在日常生活中如取款、上网等都需要密码. 有一种用“因式分解”法产生的密码，方便记忆. 原理是如对于多项式 $x^4 - y^4$ ，因式分解的结果是 $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$ ，若取当 $x=9$ ， $y=9$ 时，则各个因式的值是 $x-y=0$ ， $x+y=18$ ， $x^2+y^2=162$ ，于是就可以把“018162”作为一个六位数的密码，对于多项式 $4x^3 - xy^2$ 取 $x=11$ ， $y=10$ 时，用上述方法产生的密码不可能是（ ）

A. 113212

B. 111232

C. 123211

D. 123011

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了因式分解的应用，用提取公因式法和平方差公式因式分解，熟练掌握用提取公因式法和平方差公式因式分解是解题的关键. 根据题中范例的提示，先提取公因式，再运用平方差公式因式分解，得到 $x(2x-y)(2x+y)$ ，可得到六种密码排列，即可判断答案.

【详解】解：∵ $4x^3 - xy^2 = x(4x^2 - y^2) = x(2x-y)(2x+y)$ ，且 $x=11$ ， $y=10$ ，

∴ 各个因式的值是 $x=11$ ， $2x-y=12$ ， $2x+y=32$ ，

∴ 组成的密码应包含 11，12，32，

∴ 组成的密码共有 6 种：111232，113212，121132，123211，321112，321211，

∴ 不能组成的密码为 123011.

故选：D.

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 2 分，共 24 分.）

7. $\frac{1}{8}\pi x^2$ 的系数是_____.

【答案】 $\frac{1}{8}\pi$

【解析】

【分析】根据单项式系数的定义来选择，单项式中数字因数叫做单项式的系数.

【详解】解： $\frac{1}{8}\pi x^2$ 的系数是 $\frac{1}{8}\pi$ ，

故答案为： $\frac{1}{8}\pi$.

【点睛】本题考查单项式的系数，知道单项式中数字因数是单项式的系数是解题的关键.

8. 已知单项式 $3a^m b^2$ 与 $-\frac{2}{3}a^4 b^{n-1}$ 的差是单项式，那么 $m+n=$ _____.

【答案】 7

【解析】

【分析】本题考查整式的加减运算法则，解题的关键是熟练运用整式的加减运算法则，本题属于基础题型. 根据合并同类项的法则即可求出答案.

【详解】解：由题意可知： $m=4, n-1=2$

∴ $m=4, n=3$

∴ $m+n=7$

故答案为： 7.

9. 如果整式 A 与整式 B 的和为一个数值 a ，我们称 A, B 为数 a 的“友好整式”. 例如： $x-4$ 和 $-x+5$ 为数 1 的“友好整式”； $2ab+3$ 和 $-2ab+4$ 为数 7 的“友好整式”. 若关于 x 的整式 $4x^2-kx+6$ 与 $-4x^2-3x+k-1$ 为数 n 的“友好整式”，则 n 的值为 ____.

【答案】 2

【解析】

【分析】根据“友好”整式的含义，把关于 x 的整式 $4x^2-kx+6$ 与 $-4x^2-3x+k-1$ 相加其和为数 n ，则含 x

的项均相互抵消，由此即可求得 n 的值.

【详解】 $\because$ 关于 x 的整式 $4x^2 - kx + 6$ 与 $-4x^2 - 3x + k - 1$ 为数 n 的“友好整式”

$$\therefore 4x^2 - kx + 6 + (-4x^2 - 3x + k - 1) = n$$

$$\text{即 } (-k-3)x + 5 + k = n$$

$$\therefore -k-3=0$$

$$\therefore k=-3$$

$$\therefore n=5-3=2$$

故答案为：2

【点睛】本题是新定义问题，考查了多项式的加法运算，理解材料中的新定义是解题的关键.

10. 已知 $x^2 - 2ax + 9$ 是完全平方式，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 ± 3

【解析】

【分析】将代数式化为完全平方和常数项的形式，令常数项为 0 求 a ;

【详解】解：原式 $= x^2 - 2ax + a^2 - a^2 + 9 = (x - a)^2 - a^2 + 9$,

令 $-a^2 + 9 = 0$ ，解得： $a = \pm 3$,

故答案为： ± 3

【点睛】本题考查完全平方公式的运用，牢记完全平方公式 $(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$ 是解题关键.

11. 要使多项式 $(2x + p)(x - 2)$ 不含 x 的一次项，则 p 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】4

【解析】

【分析】本题主要考查了多项式乘法中的无关型问题，根据多项式乘以多项式的计算法则求出 $(2x + p)(x - 2)$ 的结果，再根据多项式 $(2x + p)(x - 2)$ 不含 x 的一次项，即含 x 的一次项系数为 0 进行求解即可.

【详解】解： $(2x + p)(x - 2)$

$$= 2x^2 + px - 4x - 2p$$

$$= 2x^2 + (p - 4)x - 2p,$$

$\because$ 多项式 $(2x + p)(x - 2)$ 不含 x 的一次项，

$$\therefore p - 4 = 0,$$

$$\therefore p = 4,$$

故答案为：4.

12. 一个长方形的面积为 $6a^2 - 2ab^2$ ，其中一边长为 $2a$ ，则长方形的另一边长为_____.

【答案】 $3a - b^2$

【解析】

【分析】 本题考查了整式的除法，解题的关键是 $(6a^2 - 2ab^2) \div 2a$ 的正确计算.

【详解】 解： $\because$ 一个长方形的面积为 $6a^2 - 2ab^2$ ，一边长为 $2a$ ，

$$\therefore \text{它的另一边长为：} (6a^2 - 2ab^2) \div 2a = 3a - b^2,$$

故答案为： $3a - b^2$.

13. 我国宋朝数学家杨辉在他的著作《详解九章算术》中提出下表，此表揭示了（ n 为非负整数）展开式的各项系数的规律，例如：

$$(a+b)^0 = 1; \text{ 它只有一项，系数为 } 1;$$

$$(a+b)^1 = a+b, \text{ 它有两项，系数分别为 } 1, 1;$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \text{ 它有三项，系数分别为 } 1, 2, 1;$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \text{ 它有四项；系数分别为 } 1, 3, 3, 1;$$

根据以上规律， $(a+b)^6$ 展开式各项系数的和等于_____.

		1		
	1		1	
1	1	2	1	
1	3	3	1	

【答案】 64

【解析】

【分析】 此题考查完全平方公式的应用，能根据已知算式得出规律是解题的关键. 根据已知算式得出规律，再求出即可.

【详解】 解： 由题意可得：

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5,$$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6,$$

$$\therefore 1+6+15+20+15+6+1=64,$$

故答案为：64.

14. 因式分解： $a^2(x-y) + (y-x) =$ _____.

【答案】 $(x-y)(a-1)(a+1)$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解，解题的关键是找公因式，注意分解到不能再分解为止.

先将 $y-x$ 转化为 $-(x-y)$ ，然后提取公因式 $(x-y)$ ，再对 a^2-1 应用平方差公式因式分解.

$$\text{【详解】解： } a^2(x-y) + (y-x)$$

$$= a^2(x-y) - (x-y)$$

$$= (x-y)(a^2-1)$$

$$= (x-y)(a-1)(a+1)$$

故答案为： $(x-y)(a-1)(a+1)$.

15. 已知二次三项式 x^2-4x+m 有一个因式是 $(x-3)$ ，则 m 值为_____.

【答案】 3

【解析】

【分析】 根据二次三项式 x^2-4x+m 有一个因式是 $(x-3)$ ，且

$$x^2-4x+m = x^2-3x-x+m = x(x-3)-(x-m), \text{ 即可得到 } m \text{ 的值.}$$

【详解】解： $\because$ 二次三项式 x^2-4x+m 有一个因式是 $(x-3)$ ，

$$x^2-4x+m = x^2-3x-x+m = x(x-3)-(x-m),$$

$$\therefore x-m = x-3,$$

$$m = 3,$$

故答案为 3.

【点睛】 本题考查分组分解法因式分解，解题的关键是凑因式 $(x-3)$.

16. 甲乙两人完成因式分解 $x^2 + ax + b$ 时，甲看错了 a 的值，分解的结果是 $(x+6)(x-2)$ ，乙看错了 b 的值，分解结果为 $(x-8)(x+4)$ ，那么 $x^2 + ax + b$ 分解因式正确的结果为_____.

【答案】 $(x-6)(x+2)$

【解析】

【分析】 本题考查十字相乘法进行因式分解，根据甲、乙看错的情况下得出 a 、 b 的值，进而再利用十字相乘法分解因式即可，掌握十字相乘法的使用方法是得出答案的关键.

【详解】 解：因式分解 $x^2 + ax + b$ 时，

∵ 甲看错了 a 的值，分解的结果是 $(x+6)(x-2)$ ，

$$\therefore b = 6 \times (-2) = -12,$$

又∵ 乙看错了 b 的值，分解的结果为 $(x-8)(x+4)$ ，

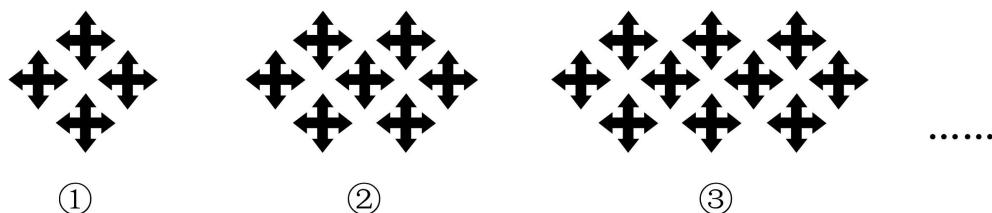
$$\therefore a = -8 + 4 = -4,$$

$$\therefore \text{原二次三项式为 } x^2 - 4x - 12,$$

$$\text{因此, } x^2 - 4x - 12 = (x-6)(x+2),$$

故答案为： $(x-6)(x+2)$.

17. 云南少数民族服饰以其精美的花纹和艳丽的色彩越来越受到追求独立与个性的设计师的喜爱. 某民族服饰的花边均是由若干个  平移形成的有规律的图案，如图，第①个图案由 4 个  组成，第②个图案由 7 个  组成，第③个图案由 10 个  组成，...，按此规律排列下去，第 n 个图案中的  个数为_____.



【答案】 $3n + 1$

【解析】

【分析】 根据所给图形总结规律即可.

【详解】 解：∵ 第 1 个图案由 4 个基础图形组成，

第 2 个图案由 7 个基础图形组成，即 $7 = 4 + 3 = 4 + 3 \times 1$ ，

第3个图案由10个基础图形组成, $10 = 4 + 3 + 3 = 4 + 3 \times 2$,

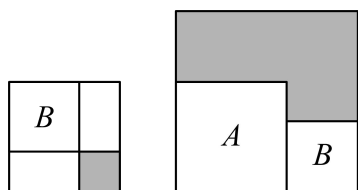
...

$\therefore$ 第 n 个图案中基础图形的个数为: $4 + 3(n-1) = 3n + 1$,

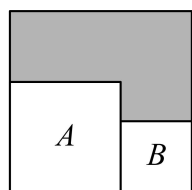
故答案为: $3n + 1$.

【点睛】 本题主要考查图形的变化规律, 解答的关键是发现基础图形数量的变化规律.

18. 有两个正方形 A , B , 现将 B 放在 A 的内部得图①, 将 A , B 并列放置后构造新的正方形得图②. 若图①和图②中阴影部分的面积分别为4和18, 则图②所示的大正方形的面积为_____.



图①



图②

【答案】 40

【解析】

【分析】 本题考查了完全平方公式的应用, 设正方形 A 的边长为 a , 正方形 B 的边长为 b , 由面积得 $a^2 - b^2 - 2b(a-b) = 4$, $(a+b)^2 - a^2 - b^2 = 18$, 整理得 $a^2 - 2ab + b^2 = 4$, $a^2 + b^2 = 22$, 即可求解; 掌握 $a^2 + b^2$ 、 ab 、 $a \pm b$ 三者之间的关系是解题的关键.

【详解】 解: 设正方形 A 的边长为 a , 正方形 B 的边长为 b ,

由图①得: $a^2 - b^2 - 2b(a-b) = 4$,

$$\therefore a^2 - b^2 - 2ab + 2b^2 = 4,$$

$$\therefore a^2 - 2ab + b^2 = 4,$$

由图②得: $(a+b)^2 - a^2 - b^2 = 18$,

$$\therefore a^2 + 2ab + b^2 - a^2 - b^2 = 18,$$

$$\therefore 2ab = 18,$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 22,$$

$\therefore$ 图②所示的大正方形的面积:

$$(a+b)^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

$$=18+22$$

$$=40,$$

故答案为：40.

三、解答题：(本大题共 9 题，第 19 题 8 分，第 20-第 21 题每题 4 分，第 22 题 12 分，第 23-25 题每题 6 分，第 26 题 8 分，第 27 题 10 分；共 64 分)

19. 计算：

$$(1) \frac{1-3m}{2} - \frac{2m+5}{3} + \frac{3-2m}{4};$$

$$(2) (-4x^2y^3)\left(\frac{1}{8}xyz\right) \div \left(-\frac{1}{2}xy^2\right)^2.$$

【答案】(1) $-\frac{5}{12} - \frac{8}{3}m$

(2) $-2xz$

【解析】

【分析】此题考查了整式的混合运算，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

(1) 原式根据整式的加减运算法则化简合并同类项即可.

(2) 原式先利用幂的乘方与积的乘方运算法则计算，再利用单项式乘除单项式法则计算即可求出值.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned} \text{解: } & \frac{1-3m}{2} - \frac{2m+5}{3} + \frac{3-2m}{4} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2}m - \frac{2}{3}m - \frac{5}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}m \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{3} + \frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{3}{2}m - \frac{2}{3}m - \frac{1}{2}m\right) \\ &= -\frac{5}{12} - \frac{8}{3}m; \end{aligned}$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned} \text{解: } & (-4x^2y^3)\left(\frac{1}{8}xyz\right) \div \left(-\frac{1}{2}xy^2\right)^2 \\ &= (-4x^2y^3)\left(\frac{1}{8}xyz\right) \div \left(\frac{1}{4}x^2y^4\right) \\ &= \left(-\frac{1}{2}x^3y^4z\right) \div \left(\frac{1}{4}x^2y^4\right) \end{aligned}$$

$$= -2xz.$$

20. 运用乘法公式计算: $(3x + 2y - 2)(-2 - 3x - 2y)$.

【答案】 $-9x^2 - 12xy - 4y^2 + 4$

【解析】

【分析】 本题考查整式的混合运算, 平方差公式和完全平方公式, 熟练掌握相关运算法则是解题的关键. 将原式变形后先利用平方差公式, 再利用完全平方公式计算即可.

【详解】 解: $(3x + 2y - 2)(-2 - 3x - 2y)$

$$= [-2 + (3x + 2y)][-2 - (3x + 2y)]$$

$$= (-2)^2 - (3x + 2y)^2$$

$$= 4 - (9x^2 + 12xy + 4y^2)$$

$$= -9x^2 - 12xy - 4y^2 + 4.$$

21. 用简便方法计算: $\frac{1}{4} \times 4.16^2 - 4 \times 0.54^2$

【答案】

3.16

【解析】

【分析】 本题考查了平方差公式的应用, 解题的关键是根据积的乘方逆用将原式变形为

$$\left(\frac{1}{2} \times 4.16\right)^2 - (2 \times 0.54)^2.$$

【详解】 解: $\frac{1}{4} \times 4.16^2 - 4 \times 0.54^2$

$$= \left(\frac{1}{2} \times 4.16\right)^2 - (2 \times 0.54)^2$$

$$= 2.08^2 - 1.08^2$$

$$= (2.08 + 1.08) \times (2.08 - 1.08)$$

$$= 3.16 \times 1$$

$$= 3.16.$$

22. 因式分解

$$(1) 9m^2n(x-3y)+n(3y-x);$$

$$(2) (x^2+x)^2-18(x^2+x)+72;$$

$$(3) a^{n+2}-18a^n+81a^{n-2} \quad (n \text{ 为大于 } 2 \text{ 的正整数}).$$

【答案】 (1) $n(x-3y)(3m-1)(3m+1)$

$$(2) (x+3)(x-2)(x+4)(x-3)$$

$$(3) a^{n-2}(a-3)^2(a+3)^2$$

【解析】

【分析】 本题考查了提公因式法和公式法进行因式分解，一个多项式有公因式首先提取公因式，然后再用其他方法进行因式分解，同时因式分解要彻底，直到不能再分解为止，熟练掌握完全平方公式和平方差公式是解题的关键.

(1) 原式先变形，再提取公因式 $n(x-3y)$ ，然后利用平方差公式分解即可；

(2) 先将原式变形为 $(x^2+x)^2-18(x^2+x)+81-9$ ，然后利用完全平方公式和平方差公式分解即可；

(3) 先提取公因式 a^{n-2} ，再利用完全平方公式和平方差公式分解即可.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } 9m^2n(x-3y)+n(3y-x)$$

$$= 9m^2n(x-3y)-n(x-3y)$$

$$= n(x-3y)(9m^2-1)$$

$$= n(x-3y)(3m-1)(3m+1);$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } (x^2+x)^2-18(x^2+x)+72$$

$$= (x^2+x)^2-18(x^2+x)+81-9$$

$$= (x^2+x-9)^2-9$$

$$= (x^2+x-9+3)(x^2+x-9-3)$$

$$= (x^2+x-6)(x^2+x-12)$$

$$= (x+3)(x-2)(x+4)(x-3);$$

【小问 3 详解】

$$\text{解: } a^{n+2} - 18a^n + 81a^{n-2}$$

$$= a^{n-2}(a^4 - 18a^2 + 81)$$

$$= a^{n-2}(a^2 - 9)^2$$

$$= a^{n-2}(a-3)^2(a+3)^2.$$

23. 已知 $A = 3a^2b - 2ab^2 + abc$ ，晓风错将“ $2A - B$ ”看成“ $2A + B$ ”，算得结果

$$C = 4a^2b - 3ab^2 + 4abc.$$

(1) 计算 B 的表达式；

(2) 求正确的结果的表达式；

(3) 晓华说 (2) 中的结果的大小与 c 的取值无关，对吗？若 $a = \frac{1}{8}$ ， $b = \frac{1}{5}$ ，求 (2) 中代数式的值.

【答案】(1) $-2a^2b + ab^2 + 2abc$

(2) $8a^2b - 5ab^2$

(3) 结果的大小与 c 的取值无关，0

【解析】

【分析】本题主要考查整式的加减，涉及的知识有：去括号、合并同类项，熟练掌握运算法则是解题的关键；

(1) 由 $2A + B = C$ 得 $B = C - 2A$ ，将 C 、 A 代入计算可得；

(2) 将 A 、 B 代入 $2A - B$ 计算即可；

(3) 由化简后的代数式中无字母 c 可知其值与 c 无关，将 a 、 b 的值代入计算即可.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } \because 2A + B = C$$

$$\therefore B = C - 2A$$

$$= 4a^2b - 3ab^2 + 4abc - 2(3a^2b - 2ab^2 + abc)$$

$$= 4a^2b - 3ab^2 + 4abc - 6a^2b + 4ab^2 - 2abc$$

$$= -2a^2b + ab^2 + 2abc.$$

故 B 的表达式为 $-2a^2b + ab^2 + 2abc$.

【小问 2 详解】

解: $2A - B = 2(3a^2b - 2ab^2 + abc) - (-2a^2b + ab^2 + 2abc)$

$$= 6a^2b - 4ab^2 + 2abc + 2a^2b - ab^2 - 2abc$$

$$= 8a^2b - 5ab^2.$$

故正确的结果的表达式为 $8a^2b - 5ab^2$.

【小问 3 详解】

解: 由 (2) 得 $2A - B = 8a^2b - 5ab^2$

$\therefore$ 代数式中无字母 c

$\therefore$ 其值与 c 无关是对的

将 $a = \frac{1}{8}$, $b = \frac{1}{5}$ 代入得:

$$2A - B = 8a^2b - 5ab^2 = 8 \times \left(\frac{1}{8}\right)^2 \times \left(\frac{1}{5}\right) - 5 \times \left(\frac{1}{8}\right) \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{40} - \frac{1}{40} = 0.$$

24. 先化简, 再求值: $[(m+n)(m-n) - (m-2n)^2] \div (-2n)$, 其中 $m=1, n=2$.

【答案】 $\frac{5}{2}n - 2m, 3$

【解析】

【分析】根据完全平方公式、平方差公式、多项式除以单项式可以化简题目中的式子, 然后将 m, n 的值代入化简后的式子即可解答本题.

【详解】解: $[(m+n)(m-n) - (m-2n)^2] \div (-2n)$

$$= (m^2 - n^2 - m^2 - 4n^2 + 4mn) \div (-2n)$$

$$= (-5n^2 + 4mn) \div (-2n)$$

$$= \frac{5}{2}n - 2m$$

当 $m=1, n=2$ 时, 原式 $= \frac{5}{2} \times 2 - 2 \times 1 = 3$.

【点睛】本题考查整式的混合运算-化简求值, 解答本题的关键是明确整式化简求值的方法.

25. 阅读下列两则材料, 解决问题:

材料一: 比较 3^{22} 和 4^{11} 的大小.

解： $\because 4^{11} = (2^2)^{11} = 2^{22}$ ，且 $3 > 2$

$\therefore 3^{22} > 2^{22}$ ，即 $3^{22} > 4^{11}$

小结：指数相同的情况下，通过比较底数的大小，来确定两个幂的大小

材料二：比较 2^8 和 8^2 的大小

解： $\because 8^2 = (2^3)^2 = 2^6$ ，且 $8 > 6$

$\therefore 2^8 > 2^6$ ，即 $2^8 > 8^2$

小结：底数相同的情况下，通过比较指数的大小，来确定两个幂的大小

【方法运用】

(1) 比较 3^{44} 、 4^{33} 、 5^{22} 的大小

(2) 比较 81^{31} 、 27^{41} 、 9^{61} 的大小

(3) 已知 $a^2 = 2$ ， $b^3 = 3$ ，比较 a 、 b 的大小

【答案】(1) $3^{44} > 4^{33} > 5^{22}$

(2) $81^{31} > 27^{41} > 9^{61}$

(3) $a < b$

【解析】

【分析】本题考查幂的乘方与积的乘方、有理数大小比较，解答本题的关键是明确有理数大小的比较方法.

(1) 根据 $3^{44} = (3^4)^{11} = 81^{11}$ ， $4^{33} = (4^3)^{11} = 64^{11}$ ， $5^{22} = (5^2)^{11} = 25^{11}$ ，再比较底数的大小即可；

(2) 根据 $81^{31} = (3^4)^{31} = 3^{124}$ ， $27^{41} = (3^3)^{41} = 3^{123}$ ， $9^{61} = (3^2)^{61} = 3^{122}$ ，再比较底数的大小即可；

(3) 根据 $(a^2)^3 = a^6 = 8$ ， $(b^3)^2 = b^6 = 9$ ，即可得出结论.

【小问 1 详解】

解： $\because 3^{44} = (3^4)^{11} = 81^{11}$ ，

$4^{33} = (4^3)^{11} = 64^{11}$ ，

$5^{22} = (5^2)^{11} = 25^{11}$ ，

$\therefore 81 > 64 > 25$ ，

$\therefore 81^{11} > 64^{11} > 25^{11}$ ，

即 $3^{44} > 4^{33} > 5^{22}$;

【小问 2 详解】

解: $\because 81^{31} = (3^4)^{31} = 3^{124}$,

$27^{41} = (3^3)^{41} = 3^{123}$,

$9^{61} = (3^2)^{61} = 3^{122}$,

$\therefore 124 > 123 > 122$,

$\therefore 3^{124} > 3^{123} > 3^{122}$,

即 $81^{31} > 27^{41} > 9^{61}$;

【小问 3 详解】

解: $\because (a^2)^3 = a^6 = 8$, $(b^3)^2 = b^6 = 9$,

又 $\because 8 < 9$,

$\therefore a < b$.

26. 阅读下列材料:

【材料一】在因式分解中, 把多项式中某些部分看作一个整体, 用一个新的字母代替 (即换元), 不仅可以简化要分解的多项式的结构, 而且能使式子的特点更加明显, 便于观察如何进行因式分解, 这种方法就是换元法.

对于 $(x^2 + 5x + 2)(x^2 + 5x + 3) - 12$.

解法一: 设 $x^2 + 5x = y$, 则原式 $= (y + 2)(y + 3) - 12 = y^2 + 5y - 6$

$= (y + 6)(y - 1) = (x^2 + 5x + 6)(x^2 + 5x - 1) = (x + 2)(x + 3)(x^2 + 5x - 1)$;

解法二: 设 $x^2 + 2 = m$, $5x = n$, 则原式 $= (m + n)(m + n + 1) - 12 = (m + n)^2 + (m + n) - 12$

$= (m + n + 4)(m + n - 3) = (x^2 + 5x + 6)(x^2 + 5x - 1) = (x + 2)(x + 3)(x^2 + 5x - 1)$.

【材料二】将 $2a - 3ab - 4 + 6b$ 因式分解.

解法一: 原式 $= (2a - 3ab) - (4 - 6b) = a(2 - 3b) - 2(2 - 3b) = (2 - 3b)(a - 2)$;

解法二: 原式 $= (2a - 4) - (3ab - 6b) = 2(a - 2) - 3b(a - 2) = (a - 2)(2 - 3b)$

对项数较多的多项式无法直接进行因式分解时, 我们可以将多项式分为若干组, 再利用提公因式法、公式

法达到因式分解的目的，这就是因式分解的分组分解法.

请按照上面介绍的方法解决下列问题:

(1) 因式分解: $(x^2 - 4x + 1)(x^2 - 4x + 7) + 9$;

(2) 因式分解: $(x + y - 2xy)(x + y - 2) + (xy - 1)^2$;

【答案】 (1)

$$(x-2)^4$$

(2)

$$(x-1)^2(1-y)^2$$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解，解题的关键正确理解题意，注意换元法和分组分解法的正确运用.

(1) 解法一: $x^2 - 4x = y$ ，原式化为 $(y+1)(y+7)+9$ ，因式分解即可；解法二: 设 $x^2 + 1 = m, -4x = n$ ，原式化为 $(m+n)(m+n+6)+9$ ，因式分解即可；

(2) 设 $x + y = m, xy = n$ ，原式化为 $(m+n)(m+n+6)+9$ ，因式分解即可，注意 $(x + y - xy - 1)^2$ 的分组分解应用.

【小问 1 详解】

解: 解法一: $x^2 - 4x = y$ ，

$$\text{则原式} = (y+1)(y+7)+9,$$

$$= y^2 + 8y + 16$$

$$= (y+4)^2$$

$$= (x^2 - 4x + 4)^2$$

$$= (x-2)^4;$$

解法二: 设 $x^2 + 1 = m, -4x = n$ ，

$$\text{则原式} = (m+n)(m+n+6)+9,$$

$$= (m+n)^2 + 6(m+n) + 9$$

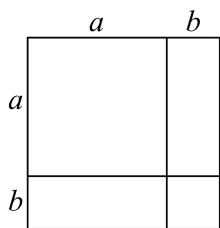
$$\begin{aligned}
&= (m+n+3)^2 \\
&= (x^2+1-4x+3)^2 \\
&= (x^2-4x+4)^2 \\
&= (x-2)^4;
\end{aligned}$$

【小问 2 详解】

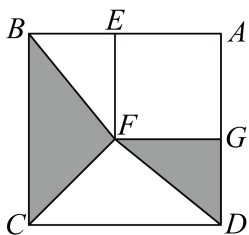
设 $x+y=m, xy=n$,

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= (m-2n)(m-2) + (n-1)^2 \\
&= m^2 - 2m - 2mn + 4n + n^2 - 2n + 1 \\
&= m^2 - 2m - 2mn + n^2 + 2n + 1 \\
&= m^2 - 2m - 2mn + (n+1)^2 \\
&= m^2 - 2m(n+1) + (n+1)^2 \\
&= (m-n-1)^2 \\
&= (x+y-xy-1)^2 \\
&= (x-1+y-xy)^2 \\
&= [(x-1)+y(1-x)]^2 \\
&= [(x-1)-y(x-1)]^2 \\
&= [(x-1)(1-y)]^2 \\
&= (x-1)^2(1-y)^2.
\end{aligned}$$

27. 阅读理解：我国著名数学家华罗庚曾说：“数缺形时少直观，形缺数时难入微，数形结合百般好，隔裂分家万事休。”数形结合是解决数学问题的重要思想方法，通过计算几何图形的面积可以验证一些代数恒等式.



图①



图②

(1) 如图①是一个大正方形被分割成了边长分别为 a 和 b 的两个正方形，长宽分别为 a 和 b 的两个长方形，利用这个图形可以验证公式_____，

利用上述公式解决问题：

【直接应用】

(2) 若 $xy = 2$ ， $x + y = 7$ ，则 $x^2 + y^2 =$ _____；

【类比应用】

(3) 若 $(20-x)(x-30) = 10$ ，求 $(20-x)^2 + (x-30)^2$ 的值；

【知识迁移】

(4) 将两个正方形 $ABCD$ ， $EFGA$ 如图，摆放，若两个正方形面积之和为 65， $BE = 3$ ，求图中阴影部分面积和。

【答案】(1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (2) 45 (3) 80 (4) $\frac{33}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查完全平方公式的应用，算术平方根，解题的关键是掌握完全平方公式的灵活运用。

(1) 从“整体”与“部分”分别用代数式表示图形的面积，再根据各个部分面积之间的和差关系即可得出答案；

(2) 根据 $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$ 整体代入计算即可；

(3) 利用完全平方公式的变形进行解答即可；

(4) 设正方形 $ABCD$ 的边长为 m ，正方形 $EFGA$ 的边长为 n ，由题意可得 $m^2 + n^2 = 65$ ， $m - n = 3$ ，先求出 $2mn = 56$ ，再求出 $m + n$ 的值，求出阴影部分的面积代入 $m + n$ 计算即可。

【详解】 解：(1) 图①从“整体上”看是边长为 $a+b$ 的正方形，因此面积为 $(a+b)^2$ ，拼成图①的四个部分的面积和为 $a^2 + 2ab + b^2$ ，所以 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ，

所以这个图形可以验证公式： $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ，

故答案为: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

$$(2) \text{ Q } xy = 2, x + y = 7,$$

$$\therefore x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 7^2 - 2^2 = 49 - 4 = 45,$$

故答案为: 45;

$$(3) \because (20-x)(x-30) = 10$$

$$\therefore (20-x)^2 + (x-30)^2$$

$$= [(20-x) + (x-30)]^2 - 2(20-x)(x-30)$$

$$= (-10)^2 - 2 \times 10$$

$$= 100 - 20$$

$$= 80;$$

(4) 设正方形 $ABCD$ 的边长为 m , 正方形 $EFGA$ 的边长为 n , 由题意可得,

$$m^2 + n^2 = 65, m - n = 3, \quad BE = DG = m - n = 3,$$

$$\therefore -2mn = (m-n)^2 - (m^2 + n^2)$$

$$\therefore -2mn = 3^2 - 65,$$

$$\therefore 2mn = 56,$$

$$\therefore (m+n)^2 = m^2 + n^2 + 2mn = 65 + 56 = 121, \quad m > 0, n > 0,$$

$$\therefore m + n = 11,$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot BE + \frac{1}{2} \cdot FG \cdot DG = \frac{1}{2} \times 3 \cdot m + \frac{1}{2} \times 3 \cdot n = \frac{3}{2} (m + n) = \frac{3}{2} \times 11 = \frac{33}{2}.$$