

2025 学年第一学期七年级数学期中阶段检测

(时间 90 分钟, 满分 100 分)

一、选择题 (每题 2 分, 满分 12 分)

1. 下列说法正确的是 ()

A. $-\frac{ab^3}{5}$ 不是整式

B. $\frac{6m^2n}{7}$ 的系数是 6, 次数是 3

C. $x^4 + y^2 - 3$ 是六次三项式

D. 1 是单项式, $t-1$ 是多项式

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查整式、单项式和多项式的概念, 根据定义逐一判断各选项: 整式是单项式和多项式的统称; 单项式是数或字母的积, 单独的数或字母也是单项式, 系数是数字因数, 次数是字母指数之和; 多项式是几个单项式的和, 次数是最高次项的次数, 熟练掌握相关定义是解此题的关键.

【详解】解: A、 $-\frac{ab^3}{5}$ 是单项式, 属于整式, 故 A 错误, 不符合题意;

B、 $\frac{6m^2n}{7}$ 的系数是 $\frac{6}{7}$, 次数是 3, 故 B 错误, 不符合题意;

C、 $x^4 + y^2 - 3$ 的最高次项是 x^4 , 次数为 4, 因此是四次三项式, 故 C 错误, 不符合题意;

D、1 是单独的数, 是单项式; $t-1$ 是多项式, 故 D 正确, 符合题意;

故选: D.

2. 下列运算正确的是 ()

A. $a + a = a^2$

B. $a \cdot a = 2a$

C. $(2a)^3 = 8a^3$

D. $(-a^2)^3 = a^6$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了整式运算, 熟练掌握相关运算法则是解题关键. 根据整式加法法则、单项式乘以单项式法则以及积的乘方运算法则逐项分析判断即可.

【详解】解: A. $a + a = 2a$, 故本选项运算错误, 不符合题意;

B. $a \cdot a = a^2$, 故本选项运算错误, 不符合题意;

C. $(2a)^3 = 8a^3$, 本选项运算正确, 符合题意;

D. $(-a^2)^3 = -a^6$, 故本选项运算错误, 不符合题意.

故选: C.

3. 如果 $x^{m+n} = 4, x^n = \frac{1}{2}$, 那么 x^{2m} 的值是 ()

A. 4

B. 8

C. 64

D. 16

【答案】C

【解析】

【分析】逆用同底数幂乘法、幂的乘方公式, 将式子进行变形是关键.

【详解】因为 $x^{m+n} = 4, x^n = \frac{1}{2}$

所以 $x^{m+n} = x^m \cdot x^n = 4$

所以 $x^m \times \frac{1}{2} = 4$

所以 $x^m = 8$

所以 $x^{2m} = (x^m)^2 = 64$

故选: C

【点睛】考核知识点: 同底数幂乘法、幂的乘方. 运用同底数幂乘法、幂的乘方法则将式子适当变形是关键.

4. 以下能用平方差公式的是 ()

A. $(2a+b)(a-2b)$

B. $(a-b)(b-a)$

C. $(a-b)(-a-b)$

D. $(a+b)(-a-b)$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了平方差公式, 掌握平方差公式的特点: 两数的和与这两个数的差的积, 是解决问题的关键.

利用平方差公式的特点, 对每个选项进行分析, 即可得出答案.

【详解】A、 $(2a+b)(a-2b)$, 不能用平方差公式, 故此选项不符合题意;

B、 $(a-b)(b-a)$, 不能用平方差公式, 故此选项不符合题意;

C、 $(a-b)(-a-b) = -(a-b)(a+b)$, 能用平方差公式, 故此选项符合题意;

D、 $(a+b)(-a-b) = -(a+b)(a+b)$ ，不能用平方差公式，故此选项不符合题意；

故选 C.

5. 下列各式中，分解因式正确的是 ()

A. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

B. $m^3 - m^2 + m = m(m^2 - m)$

C. $x^2 - \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

D. $x^2 + 2x - 3 = x(x+2) - 3$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查因式分解，根据因式分解的概念和方法，逐一进行判断即可.

【详解】 解： A 选项是多项式的乘法，不是因式分解，错误；

B 选项分解时，漏项，应为 $m^3 - m^2 + m = m(m^2 - m + 1)$ ，错误；

C 选项分解正确；

D 选项的结果没有化成整式乘积的形式，也不是因式分解，错误.

故选 C.

6. 若 $a = 2020 \times 2021 + 1$ ， $b = 2020^2 - 2020 \times 2021 + 2021^2$ ，在下列判断结果正确的是 ()

A. $a < b$

B. $a = b$

C. $a > b$

D. 无法判断

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据完全平方公式的变形，将 b 化简，进而与 a 比较即可求解

【详解】 $a = 2020 \times 2021 + 1$,

$$b = 2020^2 - 2020 \times 2021 + 2021^2$$

$$= (2020 - 2021)^2 + 2020 \times 2021$$

$$= 2020 \times 2021 + 1,$$

故 $a = b$.

故选： B.

【点睛】 本题考查了完全平方公式的变形，掌握完全平方公式的变形是解题的关键.

二、填空题 (每题 2 分，满分 24 分)

7. 一个长方形的面积为 $(6ab^2 - 4a^2b)$ ，一边长为 $2a$ ，则它的另一边长为_____.

【答案】 $3b^2 - 2ab$

【解析】

【分析】 本题主要考查了多项式除以单项式，根据长方形面积公式，用长方形的面积除以一长边即可得到答案.

【详解】 解： $(6ab^2 - 4a^2b) \div 2a = 3b^2 - 2ab$,

$\therefore$ 它的另一边长为 $3b^2 - 2ab$,

故答案为： $3b^2 - 2ab$.

8. 计算： $(x+2y)\left(\frac{1}{2}x-y\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{2}x^2 - 2y^2$

【解析】

【分析】 题目主要考查多项式乘以多项式的运算，熟练掌握运算是解题关键；
根据多项式乘以多项式法则计算即可.

【详解】 解： $(x+2y)\left(\frac{1}{2}x-y\right)$

$$= \frac{1}{2}x^2 - xy + xy - 2y^2$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 2y^2 ,$$

故答案为： $\frac{1}{2}x^2 - 2y^2$.

9. 把多项式 $6x^2y - 2xy - 5x^3y^2 + 3y^4 - 4x^4$ 按字母 x 的升幂排列是_____.

【答案】 $3y^4 - 2xy + 6x^2y - 5x^3y^2 - 4x^4$

【解析】

【分析】 本题考查了将多项式按每个字母升幂（降幂）排列.
根据升幂排列的定义，我们把多项式的各项按照 x 的指数从小到大的顺序排列起来即可.

【详解】 把多项式 $6x^2y - 2xy - 5x^3y^2 + 3y^4 - 4x^4$ 按字母 x 的升幂排列是 $3y^4 - 2xy + 6x^2y - 5x^3y^2 - 4x^4$

故答案为： $3y^4 - 2xy + 6x^2y - 5x^3y^2 - 4x^4$.

10. 已知 $A+B = -3x^2 - 5x - 1$, $A-C = -2x + 3x^2 - 5$, 则 $B+C = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-6x^2 - 3x + 4$

【解析】

【分析】 直接根据已知条件进行整理即可求解.

【详解】 $\because A + B = -3x^2 - 5x - 1, A - C = -2x + 3x^2 - 5,$

$$\therefore A + B - (A - C) = -3x^2 - 5x - 1 - (-2x + 3x^2 - 5),$$

$$\therefore B + C = -3x^2 - 5x - 1 + 2x - 3x^2 + 5,$$

$$\therefore B + C = -6x^2 - 3x + 4.$$

故答案为: $-6x^2 - 3x + 4$.

【点睛】 本题考查了整式的加减, 利用整式的加减运算化简求值.

11. 若 $(2x-3)(5-2x) = ax^2 + bx + c$, 则 $a + b + c =$ _____ ;

【答案】 -3.

【解析】

【分析】 由多项式乘以多项式的运算法则, 可求得 $(2x-3)(5-2x) = -4x^2 + 16x - 15$, 又由 $(2x-3)(5-2x) = ax^2 + bx + c$, 即可求得 a, b, c 的值, 继而求得答案.

【详解】 $\because (2x-3)(5-2x) = 10x - 4x^2 - 15 + 6x = -4x^2 + 16x - 15,$

$$(2x-3)(5-2x) = ax^2 + bx + c,$$

$$\therefore a = -4, b = 16, c = -15,$$

$$\therefore a + b + c = -3.$$

故答案为-3.

【点睛】 此题考查多项式乘多项式, 解题关键在于掌握运算法则.

12. 已知 $2x - 3y - 2 = 0$, 则 $(10^x)^2 \div (10^y)^3 =$ _____.

【答案】 100

【解析】

【分析】 本题主要考查了幂的乘方计算, 同底数幂除法计算, 先根据题意得到 $2x - 3y = 2$, 再根据幂的乘方计算和同底数幂除法计算法则得到 $(10^x)^2 \div (10^y)^3 = 10^{2x-3y}$, 据此求解即可.

【详解】 解: $\because 2x - 3y - 2 = 0,$

$$\therefore 2x - 3y = 2$$

$$\therefore (10^x)^2 \div (10^y)^3$$

$$= 10^{2x} \div 10^{3y}$$

$$= 10^{2x-3y}$$

$$= 10^2$$

$$= 100,$$

故答案为：100.

13. 若 $(x^2 - 2x + 4m)(x - 3)$ 中不含 x 的一次项，则 m 的值为__.

【答案】 $-\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了多项式乘以多项式，展开多项式，合并同类项，令一次项系数为零，解方程求 m 即可，熟练掌握运算是解此题的关键.

【详解】 解： $(x^2 - 2x + 4m)(x - 3)$

$$= x^2 \cdot x + x^2 \cdot (-3) - 2x \cdot x - 2x \cdot (-3) + 4m \cdot x + 4m \cdot (-3)$$

$$= x^3 - 3x^2 - 2x^2 + 6x + 4mx - 12m$$

$$= x^3 - 5x^2 + (6 + 4m)x - 12m$$

$\therefore$ 不含 x 的一次项，

$$\therefore \text{一次项系数 } 6 + 4m = 0,$$

$$\text{解得 } m = -\frac{3}{2}.$$

$$\text{故答案为： } -\frac{3}{2}.$$

14. 已知单项式 $-\frac{1}{2}x^{m+n}y^3$ 与 $-2xy^{n-1}$ 的和为单项式，则 $|m - n| = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 7

【解析】

【分析】 本题考查了已知同类项求指数中字母或代数式的值，由题意得 $-\frac{1}{2}x^{m+n}y^3$ 与 $-2xy^{n-1}$ 是同类项，

得 $m + n = 1, n - 1 = 3$ ，据此即可求解；

【详解】解：由题意得： $m+n=1, n-1=3$,

$$\therefore m=-3, n=4,$$

$$\therefore |m-n| = |-3-4| = 7,$$

故答案为： 7

15. 已知代数式 $x^2 - (m-2)x + 16$ 是一个完全平方式，则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 10 或 -6

【解析】

【分析】 本题考查了完全平方式，利用完全平方公式的结构特征计算即可求解，熟练掌握

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ 是解此题的关键.

【详解】解： $\because$ 代数式 $x^2 - (m-2)x + 16$ 是一个完全平方式， $x^2 - (m-2)x + 16 = x^2 - (m-2)x + 4^2$,

$$\therefore -(m-2) = \pm 2 \times 1 \times 4,$$

解得： $m=10$ 或 $m=-6$,

故答案为： 10 或 -6.

16. 计算： $0.125^{2025} \times (-64)^{1012} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{8}$

【解析】

【分析】 本题考查了幂的运算，解题的关键是掌握积的乘方的逆运算，根据积的乘方的逆运算计算即可.

【详解】解： $0.125^{2025} \times (-64)^{1012}$

$$= \frac{1}{8} \times \left[\left(\frac{1}{8} \right)^{2024} \times 8^{2024} \right]$$

$$= \frac{1}{8} \times \left(\frac{1}{8} \times 8 \right)^{2024}$$

$$= \frac{1}{8},$$

故答案为： $\frac{1}{8}$.

17. 阅读材料：①1的任何次幂都等于1；②-1的奇数次幂都等于-1；③-1的偶数次幂都等于1；④任何不等于零的数的零次幂都等于1，试根据以上材料探索使等式 $(2x+3)^{x+2016} = 1$ 成立的 x 的值为_____.

【答案】 -1 或 -2 或 -2016

【解析】

【分析】 根据 1 的乘方， -1 的乘方，非零的零次幂，可得答案.

【详解】 解：①当 $2x+3=1$ 时，解得： $x=-1$ ，

此时 $x+2016=2015$ ，则 $(2x+3)^{x+2016}=1^{2015}=1$ ，

所以 $x=-1$.

②当 $2x+3=-1$ 时，解得： $x=-2$ ，此时 $x+2016=2014$ ，

则 $(2x+3)^{x+2016}=(-1)^{2014}=1$ ，

所以 $x=-2$.

③当 $x+2016=0$ 时， $x=-2016$ ，此时 $2x+3=-4029$ ，

则 $(2x+3)^{x+2016}=(-4029)^0=1$ ，

所以 $x=-2016$.

综上所述，当 $x=-1$ ，或 $x=-2$ ，或 $x=-2016$ 时，代数式 $(2x+3)^{x+2016}$ 的值为 1 .

故答案为： -1 或 -2 或 -2016 .

【点睛】 本题考查的是乘方运算，特别是乘方的结果为 1 的情况，分类讨论的思想是解题的关键.

18. 已知 $(2026-a)(2024-a)=16$ ，那么 $(a-2025)^2=$ _____.

【答案】 17

【解析】

【分析】 本题考查了平方差公式的应用，求代数式的值，利用换元法，设 $t=a-2025$ ，将原方程转化为关于 t 的方程，进而求解 t^2 的值，即可得解，正确利用换元法是解此题的关键.

【详解】 解：设 $t=a-2025$ ，则 $a=t+2025$ ，

代入原方程 $(2026-a)(2024-a)=16$ 可得 $[2026-(t+2025)][2024-(t+2025)]=16$ ，

整理得： $(1-t)(-1-t)=16$ ，

$\therefore t^2-1=16$ ，

$\therefore t^2=17$ ，即 $(a-2025)^2=t^2=17$ ，

故答案为： 17 .

三. 计算题 (每题 5 分，满分 35 分)

19. 计算： $(x^2)^3 + (x^3)^2 + (-x^2)^3 + (-x^3)^2$

【答案】 $2x^6$

【解析】

【分析】 根据幂的运算法则，先算幂的乘方，再合并同类项.

【详解】 解: $(x^2)^3 + (x^3)^2 + (-x^2)^3 + (-x^3)^2$

$$= x^6 + x^6 - x^6 + x^6$$

$$= 2x^6$$

【点睛】 本题主要考查了幂的乘方. 掌握幂的乘方运算法则 (底数不变, 指数相乘) 是关键.

20. 计算: $x^3y^2 \cdot (-xy)^2 \div \left(-\frac{4}{3}x^3y\right)$

【答案】 $-\frac{3}{4}x^2y^3$

【解析】

【分析】 本题考查了积的乘方, 幂的乘方, 整式的乘除, 解题关键是注意运算顺序. 先计算积的乘方, 幂的乘方, 再计算整式的乘除.

【详解】 解: 原式 $= x^3y^2 \cdot x^2y^2 \div \left(-\frac{4}{3}x^3y\right)$

$$= x^5y^4 \div \left(-\frac{4}{3}x^3y\right)$$

$$= -\frac{3}{4}x^2y^3.$$

21. 计算: $3x \cdot (2x^2 - x + 1) - x \cdot (2x - 3) - 4(1 - x^2)$

【答案】 $6x^3 - x^2 + 6x - 4$

【解析】

【分析】 本题考查整式的混合运算, 解题的关键在于正确掌握整式的混合运算法则. 根据整式混合运算步骤计算求解, 即可解题.

【详解】 解: 原式 $= 6x^3 - 3x^2 + 3x - (2x^2 - 3x) - 4 + 4x^2$

$$= 6x^3 - 3x^2 + 3x - 2x^2 + 3x - 4 + 4x^2$$

$$= 6x^3 - x^2 + 6x - 4.$$

22. 计算: $(2a-b+3c)(2a+b-3c)$

【答案】 $4a^2 - b^2 + 6bc - 9c^2$

【解析】

【分析】把 $b-3c$ 看成一个整体，原式就可以看成是 $2a$ 和 $b-3c$ 的平方差，就可以利用平方差公式计算；

【详解】解：原式 $= [2a - (b-3c)][2a + (b-3c)]$

$$= (2a)^2 - (b-3c)^2$$

$$= 4a^2 - (b^2 - 6bc + 9c^2)$$

$$= 4a^2 - b^2 + 6bc - 9c^2$$

【点睛】本题主要考查乘法公式里的平方差公式，找出式子里的规律，把原式平方差的形式是解题的关键.

23. 因式分解: $-2xy(x-6)-18y$

【答案】 $-2y(x-3)^2$

【解析】

【分析】本题考查了提公因式法与公式法的综合运用，一定要注意如果多项式的各项含有公因式，必须先提公因式. 先提公因式，再利用完全平方公式继续分解即可解答.

【详解】解： $-2xy(x-6)-18y$

$$= -2y[x(x-6)+9]$$

$$= -2y(x^2 - 6x + 9)$$

$$= -2y(x-3)^2.$$

24. 分解因式: $(4a+b)^2 - 4(a+b)^2$

【答案】 $3(2a+b)(2a-b)$

【解析】

【分析】先利用完全平方公式展开，整理，再提取公因式 3，最后利用平方差公式分解因式即可得答案.

【详解】 $(4a+b)^2 - 4(a+b)^2$

$$= 16a^2 + 8ab + b^2 - 4a^2 - 8ab - 4b^2$$

$$=12a^2-3b^2$$

$$=3(4a^2-b^2)$$

$$=3(2a+b)(2a-b)$$

【点睛】 本题考查了提取公因式法及公式法分解因式，分解因式时，有公因式的首先提取公因式，再利用公式分解因式，要分解彻底，直到分解不了为止；熟练掌握完全平方公式及平方差公式是解题关键.

25. 因式分解: $(x^2-7)^2+4(7-x^2)+4$

【答案】 $(x+3)^2(x-3)^2$

【解析】

【分析】 此题考查了因式分解，解题的关键是熟练掌握因式分解的方法：提公因式法，平方差公式法，完全平方公式法，十字相乘法等.

先利用完全平方公式进行分解，再利用平方差公式进行分解.

【详解】 解: $(x^2-7)^2+4(7-x^2)+4$

$$=(x^2-7)^2-4(x^2-7)+4$$

$$=(x^2-7-2)^2$$

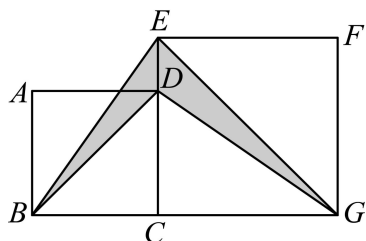
$$=(x^2-9)^2$$

$$=[(x+3)(x-3)]^2$$

$$=(x+3)^2(x-3)^2.$$

四、解答题 (第 26 题 5 分, 第 27~30 题每题 6 分, 共 29 分)

26. 如图, 四边形 $ABCD$ 、 $CEFG$ 均为正方形, 其中正方形 $CEFG$ 面积为 36cm^2 , 若图中阴影部分面积为 10cm^2 , 求正方形 $ABCD$ 的面积.



【答案】 正方形 $ABCD$ 的面积为 16cm^2

【解析】

【分析】 本题主要考查了整式乘法与图形面积，解题关键是正确求出正方形的边长并且表示出阴影面积以及用平方差公式求解．根据正方形 $CEFG$ 面积为 36cm^2 ，得出正方形 $CEFG$ 边长为 6cm ，将阴影部分面积根据三角形面积公式表示出来可得 $\frac{1}{2}(6+x)(6-x)=10$ ，即可求解．

【详解】 解： $\because$ 正方形 $CEFG$ 面积为 36cm^2 ，

$\therefore$ 正方形 $CEFG$ 边长为 6cm ，

设正方形 $ABCD$ 边长为 x ，则 $DE=6-x$ ，

$$\therefore S_{\triangle DEB} = \frac{1}{2}DE \cdot BC = \frac{1}{2}x(6-x), \quad S_{\triangle DEG} = \frac{1}{2}DE \cdot CG = \frac{1}{2} \times 6(6-x),$$

$\therefore$ 阴影部分面积为 10cm^2 ，

$$\therefore \frac{1}{2}x(6-x) + \frac{1}{2} \times 6(6-x) = 10,$$

$$\text{整理得：} \frac{1}{2}(6+x)(6-x) = 10,$$

$$\therefore 36 - x^2 = 20,$$

$$\text{解得：} x^2 = 16,$$

$\therefore$ 正方形 $ABCD$ 面积为 16cm^2 ．

27. 小明和小刚共同解一道题 $(2x+a)(3x+b)$ ，由于粗心，小明抄错了第一个多项式中 a 前面的符号，得到的结果为 $6x^2+11x-10$ ；小刚漏抄了第二个多项式中 x 的系数，得到的结果是 $2x^2-9x+10$ ．

(1) 求 a, b 的值；

(2) 计算出正确的结果．

【答案】 (1) $a=-5, b=-2$

$$(2) 6x^2-19x+10$$

【解析】

【分析】 本题考查了多项式乘以多项式，熟练掌握运算法则是解此题的关键．

(1) 根据题意并结合多项式乘以多项式的运算法则计算即可得解；

(2) 根据多项式乘以多项式的运算法则计算即可得解．

【小问 1 详解】

$$\text{解：由题意可得：} (2x-a)(3x+b) = 6x^2 + (2b-3a)x - ab, \quad (2x+a)(x+b) = 2x^2 + (2b+a)x + ab,$$

$$\therefore 2b - 3a = 11, \quad 2b + a = -9,$$

解得 $a = -5$, $b = -2$;

【小问 2 详解】

解: 由 (1) 可得: $(2x - 5)(3x - 2) = 6x^2 - 19x + 10$.

28. 阅读下列解题的过程.

分解因式: $x^4 + 64$

$$\text{解: } x^4 + 64 = x^4 + 16x^2 + 64 - 16x^2$$

$$= (x^2 + 8)^2 - 16x^2$$

$$= (x^2 + 8 + 4x)(x^2 + 8 - 4x)$$

请按照上述解题思路完成下列在有理数范围内因式分解:

$$(1) \quad a^4 + 4;$$

$$(2) \quad x^4 - 43x^2y^2 + 81y^4.$$

$$\text{【答案】} (1) \quad (a^2 + 2 + 2a)(a^2 + 2 - 2a)$$

$$(2) \quad (x^2 - 9y^2 + 5xy)(x^2 - 9y^2 - 5xy)$$

【解析】

【分析】(1) 根据题中所给方法可进行因式分解;

(2) 根据题中所给方法可进行因式分解.

【小问 1 详解】

$$\text{解: 原式} = a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2$$

$$= (a^2 + 2)^2 - 4a^2$$

$$= (a^2 + 2 + 2a)(a^2 + 2 - 2a);$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: 原式} = x^4 - 18x^2y^2 + 81y^4 - 25x^2y^2$$

$$= (x^2 - 9y^2)^2 - 25x^2y^2$$

$$= (x^2 - 9y^2 + 5xy)(x^2 - 9y^2 - 5xy).$$

【点睛】 本题主要考查因式分解，熟练掌握因式分解是解题的关键.

29. 我们在学习《从面积到乘法公式》时，曾用两种不同的方法计算同一个图形的面积，探索了单项式乘多项式的运算法则： $m(a+b+c)=ma+mb+mc$ （如图 1），多项式乘多项式的运算法则：

$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$ （如图 2）以及完全平方公式： $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ （如图 3）.

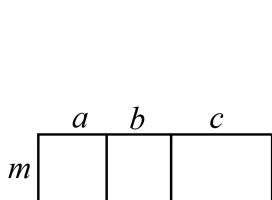


图1

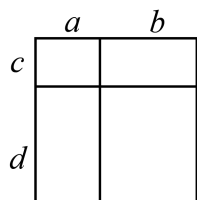


图2

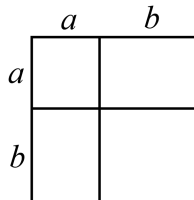


图3

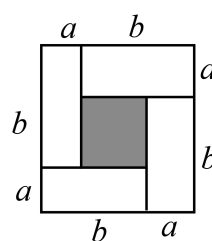


图4

把几个图形拼成一个新的图形，通过图形面积的计算，常常可以得到一些等式，这是研究数学问题的一种常用方法.

- (1) 观察图 4 请你写出 $(a+b)^2$ 、 $(a-b)^2$ 、 ab 之间的等量关系是_____；
- (2) 根据 (1) 中的结论，若 $x+y=5$ ， $x \cdot y = \frac{9}{4}$ ，则 $x-y =$ _____；
- (3) 拓展应用：若 $(2020-m)^2 + (m-2023)^2 = 7$ ，则 $(2020-m)(m-2023)$ 的值.

【答案】 (1) $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$

(2) ± 4

(3) 1

【解析】

【分析】 本题考查了完全平方公式的几何背景，以及完全平方公式的变形求值，熟练掌握完全平方公式的结构特征及变形是解题的关键.

(1) 利用等面积法求解即可.

(2) 由完全平方公式变形为： $(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy$ ，代入数值求出结果即可.

(3) 利用 $2ab = (a+b)^2 - (a^2 + b^2)$ ，整体思想求出结果.

【小问 1 详解】

解： $\because S_{\text{大正方形}} = (a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$ ，

$\therefore (a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$ ，

故答案为： $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$.

【小问 2 详解】

解：由 (1) 可得， $(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy$ ，

$$\therefore (x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy = 5^2 - 4 \times \frac{9}{4} = 16,$$

$$\therefore x-y = \pm 4,$$

故答案为： ± 4 。

【小问 3 详解】

解： $\because (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$\therefore 2ab = (a+b)^2 - (a^2 + b^2),$$

$$\therefore 2(2020-m)(m-2023)$$

$$= [(2020-m) + (m-2023)]^2 - [(2020-m)^2 + (m-2023)^2]$$

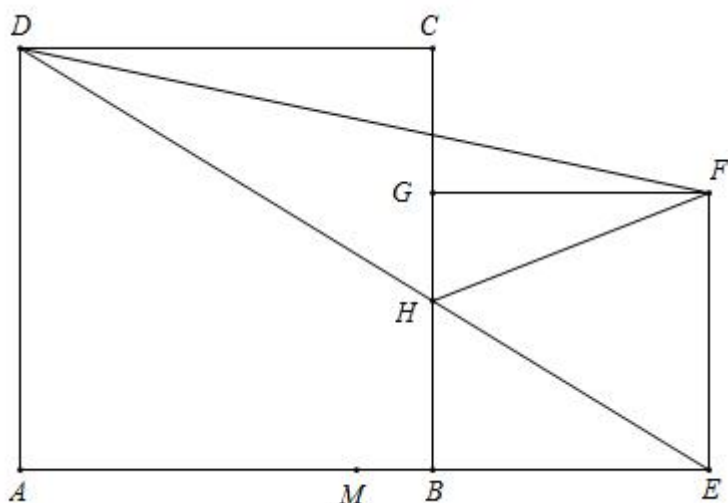
$$= (-3)^2 - 7$$

$$= 2,$$

$$\therefore (2020-m)(m-2023) = 1,$$

故答案为：1。

30. 如图，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 a ，正方形 $BEFG$ 的边长为 b ($b < a$)，点 G 在边 BC 上，点 E 在边 AB 的延长线上， DE 交边 BC 于点 H 。联结 FH 、 DF 。



(1) 用 a 、 b 表示 $\triangle DHF$ 的面积，并化简；

(2) 如果点 M 是线段 AE 的中点，联结 MC 、 MF 、 CF ，

①用 a, b 表示 $\triangle MCF$ 的面积, 并化简;

②比较 $\triangle MCF$ 的面积和 $\triangle DHF$ 的面积的大小.

【答案】(1) $\frac{1}{2}ab$; (2) ① $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2$, ② $S_{\triangle MCF} > S_{\triangle DHF}$.

【解析】

【分析】(1) 延长 DC 和 EF 交于点 N , 根据图可知 $S_{\triangle DHF} = S_{\triangle DEF} - S_{\triangle HEF}$, 求出 $S_{\triangle DEF}$ 和 $S_{\triangle HEF}$ 即可.

(2) ①同理延长 DC 和 EF 交于点 N , 根据图可知 $S_{\triangle MCF} = S_{\text{梯形}MENC} - S_{\triangle CFN} - S_{\triangle MEF}$, 求出 $S_{\text{梯形}MENC}$ 、 $S_{\triangle CFN}$ 和 $S_{\triangle MEF}$ 即可.

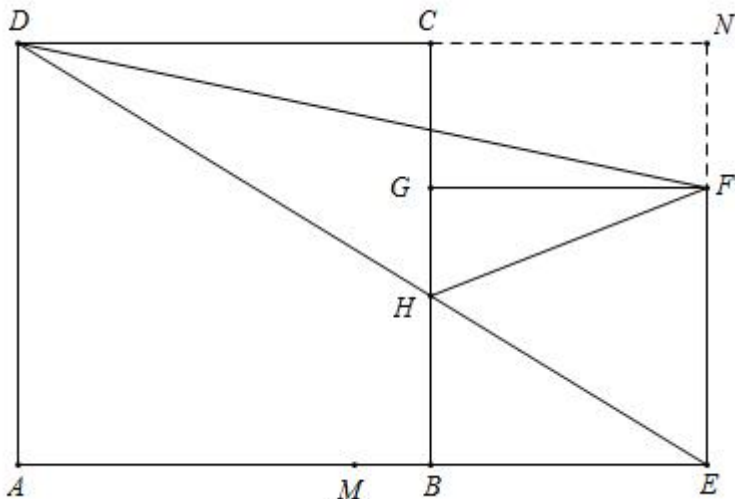
②用 $S_{\triangle MCF} - S_{\triangle DHF}$ 即可得到完全平方式, 即可知 $S_{\triangle MCF} - S_{\triangle DHF} > 0$, 从而判断 $\triangle MCF$ 的面积大于 $\triangle DHF$ 的面积.

【详解】(1) 延长 DC 和 EF 交于点 N , 如图,

$$\therefore S_{\triangle DHF} = S_{\triangle DEF} - S_{\triangle HEF},$$

$$\because S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} \times EF \times AE = \frac{1}{2} \times b \times (a+b) = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}b^2, \quad S_{\triangle HEF} = \frac{1}{2} \times EF \times BE = \frac{1}{2}b^2.$$

$$\therefore S_{\triangle DHF} = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{2}ab.$$



(2) ①如图, 同样延长 DC 和 EF 交于点 N .

$$\therefore S_{\triangle MCF} = S_{\text{梯形}MENC} - S_{\triangle CFN} - S_{\triangle MEF}.$$

根据题意可知 $NF=a-b$.

$\because M$ 为 AE 中点, $AE=a+b$,

$$\therefore ME = \frac{a+b}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle MCF} = \frac{1}{2} \times (CN + ME) \times NE - \frac{1}{2} \times CN \times NF - \frac{1}{2} \times ME \times EF,$$

$$\text{即 } S_{\triangle MCF} = \frac{1}{2} \times \left(b + \frac{a+b}{2}\right) \times a - \frac{1}{2} b \times (a-b) - \frac{1}{2} \times \frac{a+b}{2} \times b,$$

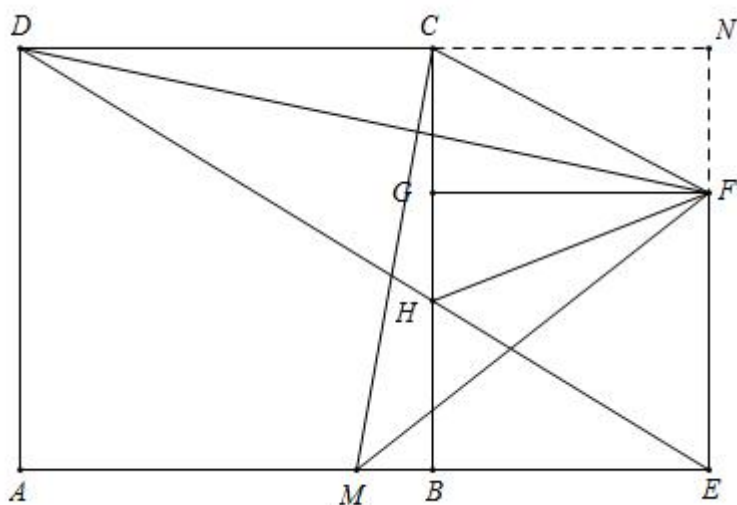
$$\text{整理得: } S_{\triangle MCF} = \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} b^2.$$

$$\textcircled{2} S_{\triangle MCF} - S_{\triangle DHF} = \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} b^2 - \frac{1}{2} ab, \text{ 即 } S_{\triangle MCF} - S_{\triangle DHF} = \left(\frac{1}{2} a - \frac{1}{2} b\right)^2,$$

$$\therefore \left(\frac{1}{2} a - \frac{1}{2} b\right)^2 > 0,$$

$$\therefore S_{\triangle MCF} - S_{\triangle DHF} > 0, \text{ 即 } S_{\triangle MCF} > S_{\triangle DHF}.$$

故 $\triangle MCF$ 的面积大于 $\triangle DHF$ 的面积.



【点睛】 本题考查正方形的性质，整式的混合运算以及完全平方方式的运用．作出辅助线是解决本题的关键．