

2025 学年第一学期七年级数学学科期中自适应练习

(时间: 90 分钟 总分: 100 分)

一. 选择题 (本大题共 8 题, 每题 3 分, 满分 24 分)

1. 单项式 $-\frac{3a^3b^2}{5}$ 的系数是 ()

- A. 3 B. -3 C. $\frac{3}{5}$ D. $-\frac{3}{5}$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查了单项式的定义, 单项式的系数是指其数字部分, 包括符号.

【详解】 解: 单项式 $-\frac{3a^3b^2}{5}$ 的系数是 $-\frac{3}{5}$,

故选: D.

2. 整式 $5x^2y - x^3y + x + 2$ 是 ()

- A. 八次四项式 B. 八次三项式 C. 四次四项式 D. 四次三项式

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了多项式的定义, 根据多项式的项数和次数的定义, 先确定多项式的项数, 再计算各项的次数, 最高次数即为多项式的次数.

【详解】 解: $\because$ 多项式 $5x^2y - x^3y + x + 2$ 由四项组成: $5x^2y$ 、 $-x^3y$ 、 x 、 2 ,

$\therefore$ 项数为 4.

$5x^2y$ 中, x 的指数为 2, y 的指数为 1, 次数为 $2+1=3$;

$-x^3y$ 中, x 的指数为 3, y 的指数为 1, 次数为 $3+1=4$;

x 中, x 的指数为 1, 次数为 1;

2 为常数项, 次数为 0.

$\therefore$ 最高次数为 4.

因此, 该多项式是四次四项式.

故选: C.

3. 下列运算正确的是 ()

A. $(2x^2)^2 = 2x^4$

B. $(x^3)^2 = x^5$

C. $(-x^2)^5 = -x^{10}$

D. $x^2 + x^2 = x^4$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查幂的运算性质，包括积的乘方、幂的乘方和合并同类项等基本法则。根据相关运算法则计算即可。

【详解】解：A: $(2x^2)^2 = 2^2 \cdot (x^2)^2 = 4x^4 \neq 2x^4$ ，故错误。

B: $(x^3)^2 = x^{3 \times 2} = x^6 \neq x^5$ ，故错误。

C: $(-x^2)^5 = (-1)^5 \cdot (x^2)^5 = -1 \cdot x^{10} = -x^{10}$ ，故正确。

D: $x^2 + x^2 = 2x^2 \neq x^4$ ，故错误。

故选：C。

4. 下列等式中，从左到右的变形是因式分解的是（ ）

A. $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

B. $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$

C. $2x^2 - 8 = 2(x^2 - 4)$

D. $x^2 - 3x - 4 = x(x-3) - 4$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了因式分解的定义，因式分解是指将一个多项式化为几个整式的积的形式，且要求分解到不能再分解为止，解题关键在于判断等式右边是否为几个整式的积的形式。

【详解】解：A 项: $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ ，是整式乘法，不是因式分解；

B 项: $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$ ，右边是积的形式，且不可再分解，是因式分解；

C 项: $2x^2 - 8 = 2(x^2 - 4) = 2(x-2)(x+2)$ ，选项是把一个多项式化为几个整式的积的形式，但分解不彻底，不符合“分解到不能再分解为止”的要求，不符合题意；

D 项: $x^2 - 3x - 4 = x(x-3) - 4$ ，右边不是积的形式，不是因式分解，不符合题意；

∴ 从左到右的变形是因式分解的是选项 B，

∴ 故选：B。

5. 下列整式中，能用公式法进行因式分解的是（ ）

- A. $-a^2 + b^2$ B. $a^2 + b^2$
C. $4x^2 + 2xy + y^2$ D. $x^2 - 4xy - 4y^2$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查因式分解的公式法，主要涉及平方差公式和完全平方公式。公式法因式分解常用平方差公式 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ 或完全平方公式 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ 。通过检查每个选项是否符合公式形式即可判断。

【详解】解：A: $-a^2 + b^2 = b^2 - a^2$ 符合平方差公式，可分解为 $(b-a)(b+a)$ 。

B: $a^2 + b^2$ 是平方和，在实数范围内无法用公式分解。

C: $4x^2 + 2xy + y^2$ ，若为完全平方，应满足 $(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot y + y^2 = 4x^2 + 4xy + y^2$ ，但实际中间项为 $2xy$ ，不符合。

D: $x^2 - 4xy - 4y^2$ 在实数范围内无法用公式分解。

$\therefore$ 只有选项 A 能用公式法因式分解。

故选：A。

6. 下列单项式中，与整式 $4x^2 + 1$ 相加后不能组成某个整式的平方的是（ ）

- A. $4x^4$ B. $4x$ C. $-4x$ D. $2x$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了完全平方公式的应用，通过完全平方公式验证每个单项式与 $4x^2 + 1$ 相加后是否能组成完全平方形式即可。

【详解】解： $\because$ 完全平方公式： $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ， $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ，

A 项：相加得 $4x^4 + 4x^2 + 1 = (2x^2)^2 + 2 \cdot 2x^2 \cdot 1 + 1^2 = (2x^2 + 1)^2$ ，是完全平方式，不符合题意；

B 项：相加得 $4x^2 + 4x + 1 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 = (2x + 1)^2$ ，是完全平方式，不符合题意；

C 项：相加得 $4x^2 - 4x + 1 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 = (2x - 1)^2$ ，是完全平方式，不符合题意；

D 项：相加得 $4x^2 + 2x + 1 = (2x + 1)^2 - 2x = 3x^2 + (x + 1)^2$ ，不是完全平方式，符合题意。

故选：D.

7. 已知 $x^a = 4$, $x^b = 6$, $x^c = 9$, 那么 a 、 b 、 c 的等量关系正确的是 ()

- A. $a + c = 2b$ B. $a + c = b^2$ C. $ac = 2b$ D. $ac = b^2$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了同底数幂乘法，幂的乘方，通过观察已知条件中的数字关系： $4 \times 9 = 36$ 与 $6^2 = 36$ 相等，推导出 a 、 b 、 c 的关系.

【详解】解： $\because x^a = 4$, $x^c = 9$,

$$\therefore x^{a+c} = x^a \cdot x^c = 4 \times 9 = 36.$$

$$\text{又 } \because x^b = 6,$$

$$\therefore (x^b)^2 = x^{2b} = 6^2 = 36,$$

$$\therefore x^{a+c} = x^{2b},$$

由于底数 x 相同，当 $x > 0$ 、 $x \neq 1$ 时，

$$\therefore a + c = 2b.$$

故选：A.

8. 已知 a 、 b 是有理数，定义一种新运算 “ $*$ ”： $a * b = (a + b)^2 - (a - b)^2$ ，下列结论：

- ① 不存在有理数 a 、 b 满足 $a * b = a^2 + 4b^2$ ； ② 如果 $a * b = 8$ ，那么 $10ab^3 \div 5b^2 = 4$

下列说法正确的是 ()

- A. ①正确，②错误 B. ①错误，②正确 C. ①②都正确 D. ①②都错误

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查完全平方公式、整式的乘除运算等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题；先化简新运算表达式，然后分别验证两个结论是否成立.

【详解】① $\because a * b = (a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$,

$$\therefore a * b = a^2 + 4b^2,$$

$$\therefore a^2 + 4b^2 = 4ab,$$

$$a^2 - 4ab + 4b^2 = (a - 2b)^2 = 0,$$

$\therefore a = 2b$ 时, 满足条件,

$\therefore$ 存在有理数 a, b , 满足 $a * b = a^2 + 4b^2$; 故错误,

$$\textcircled{2} \because a * b = 8,$$

$$\therefore 4ab = 8,$$

$$\therefore ab = 2,$$

$$\therefore (10ab^3) \div (5b^2) = 2ab = 4; \text{ 故正确.}$$

故选: B.

二. 填空题 (本大题共 10 题, 每题 2 分, 满分 20 分)

9. 写出一个与 $\frac{1}{2}x^2y^3$ 是同类项, 且系数为负数的单项式: _____.

【答案】 $-x^2y^3$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】 本题考查单项式的系数和同类项的定义. 同类项是指所含字母相同, 并且相同字母的指数也相同的项; 系数是单项式中的数字因数, 要求为负数.

【详解】 解: 与 $\frac{1}{2}x^2y^3$ 是同类项, 则字母部分必须为 x^2y^3 , 且系数为负数, 因此可写出如 $-x^2y^3$ 等单项式.

故答案为: $-x^2y^3$ (答案不唯一).

10. 将整式 $2m^2n - mn^2 + 6n - m^3$ 按字母 m 降幂排列为_____.

【答案】 $-m^3 + 2m^2n - mn^2 + 6n$

【解析】

【分析】 本题考查了多项式的降幂排序, 解题关键是熟知降幂排序的定义.

按照字母 m 的指数从高到低重新排列多项式即可解答.

【详解】 原多项式为 $2m^2n - mn^2 + 6n - m^3$. 各项中 m 的指数分别为: $-m^3$ 中 m 的指数是 3, $2m^2n$ 中 m 的指数是 2, $-mn^2$ 中 m 的指数是 1, $6n$ 中 m 的指数是 0. 按 m 的指数降幂排列, 顺序为指数 3、2、1、0,

因此排列为 $-m^3 + 2m^2n - mn^2 + 6n$.

故答案为: $-m^3 + 2m^2n - mn^2 + 6n$.

11. 合并同类项: $-\frac{1}{2}m + 3m =$ _____.

【答案】 $\frac{5}{2}m$

【解析】

【分析】 本题考查合并同类项，根据合并同类项的法则，将系数相加，字母和字母的指数不变.

【详解】 解： $-\frac{1}{2}m + 3m = \left(-\frac{1}{2} + 3\right)m = \frac{5}{2}m$.

故答案为： $\frac{5}{2}m$.

12. 计算： $(x-3y)(3y+x) =$ _____.

【答案】 $x^2 - 9y^2$

【解析】

【分析】 本题考查了运用平方差公式进行运算，熟练掌握平方差公式是解题点关键. 将原式变形为 $(x-3y)(x+3y)$ ，然后应用平方差公式计算.

【详解】 解： 原式 $= (x-3y)(x+3y) = x^2 - 9y^2$.

故答案为： $x^2 - 9y^2$.

13. 如果 $(2-3x)^0 = 1$ ，那么 x 所满足的条件是_____.

【答案】 $x \neq \frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了幂的运算，根据零指数幂的定义，任何非零数的零次方等于 1，因此底数 $2-3x$ 不能为零.

【详解】 解： 当 $a \neq 0$ 时， $a^0 = 1$ ，故 $(2-3x)^0 = 1$ 成立的条件是 $2-3x \neq 0$ ，即 $x \neq \frac{2}{3}$.

故答案为： $x \neq \frac{2}{3}$.

14. 计算： $(12x^4y^2 - 8x^2y^4) \div (-2xy)^2 =$ _____.

【答案】 $3x^2 - 2y^2$

【解析】

【分析】 本题考查了多项式除以单项式以及积的乘方运算. 先计算除数的平方，再将多项式除法转化为分式形式，利用同底数幂的除法法则逐项运算.

【详解】解：原式 $= (12x^4y^2 - 8x^2y^4) \div 4x^2y^2$

$$= 12x^4y^2 \div 4x^2y^2 - 8x^2y^4 \div 4x^2y^2$$

$$= 3x^2 - 2y^2.$$

故答案为： $3x^2 - 2y^2$.

15. 因式分解： $x^2 - 5xy + 6y^2 =$ _____.

【答案】 $(x-2y)(x-3y)$

【解析】

【分析】 本题考查了二次三项式的因式分解-十字相乘法，将多项式视为关于 x 的二次三项式，通过寻找两个数使其和为一次项系数 $-5y$ ，积为 $6y^2$ ，利用十字相乘法进行因式分解.

【详解】解：原式 $= (x-2y)(x-3y)$.

故答案为： $(x-2y)(x-3y)$.

16. 如果关于 x 的整式 $x+4$ 与 $ax+2$ 的积中不含 x 的一次项，那么 a 的值是_____.

【答案】 $-\frac{1}{2}$ ## -0.5

【解析】

【分析】 该题考查了多项式乘法中的无关项问题，通过多项式乘法展开，合并同类项后，令 x 一次项的系数为零，建立方程求解 a .

【详解】解： $(x+4)(ax+2)$

$$= ax^2 + 2x + 4ax + 8$$

$$= ax^2 + (2+4a)x + 8.$$

由于积中不含 x 的一次项，则一次项系数 $2+4a=0$,

解得 $4a=-2$,

$$\text{即 } a = -\frac{1}{2}.$$

故答案为： $-\frac{1}{2}$.

17. 在对整式 $x^2 + ax + b$ 进行因式分解时，甲同学看错了常数项 b ，因式分解的结果为 $(x+2)(x+4)$ ；乙

同学看错了一次项系数 a ，因式分解的结果为 $(x-1)(x-9)$ 。根据以上信息，我们可以求得正确的因式分解结果为 $x^2 + ax + b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $(x+3)^2$

【解析】

【分析】 本题考查了多项式乘法法则，因式分解的概念及完全平方公式。甲同学看错常数项但一次项系数正确，乙同学看错一次项系数但常数项正确，分别从两者的因式分解结果中求出正确的 a 和 b ，再对正确多项式进行因式分解。

【详解】 解：甲同学因式分解结果为 $(x+2)(x+4)$ ，展开得 $x^2 + 6x + 8$ ，由于看错了常数项 b ，但一次项系数 a 正确，故 $a = 6$ ；

乙同学因式分解结果为 $(x-1)(x-9)$ ，展开得 $x^2 - 10x + 9$ ，由于看错了一次项系数 a ，但常数项 b 正确，故 $b = 9$ ；

因此，原多项式为 $x^2 + 6x + 9$ ，因式分解得 $(x+3)^2$ 。

故答案为： $(x+3)^2$ 。

18. 我们把满足等式 $m^2 + n^2 = (n+1)^2$ 的三个正整数 m 、 n 、 $n+1$ 称为一组“完美平方数”（例如：3、4、5 或 5、12、13）。当 n 为小于 100 的正整数时，共有 组这样的“完美平方数”。

【答案】 6

【解析】

【分析】 本题考查了完全平方公式的应用，等式变形与化简及完全平方数的性质。由等式 $m^2 + n^2 = (n+1)^2$ 推导出 $m^2 = 2n+1$ ，即 $n = \frac{m^2-1}{2}$ ，由于 n 是小于 100 的正整数，且 m 必须为奇数，代入 m 为奇数值计算 n ，满足 $n < 100$ 的 m 值有 6 个，对应 6 组“完美平方数”。

【详解】 解：由 $m^2 + n^2 = (n+1)^2$ ，得 $m^2 + n^2 = n^2 + 2n + 1$ ，即 $m^2 = 2n + 1$ ，

$$\therefore n = \frac{m^2 - 1}{2},$$

由于 n 是正整数， m 必须为奇数，设 $m = 2k + 1$ (k 为正整数)，则 $n = \frac{(2k+1)^2 - 1}{2} = \frac{4k^2 + 4k}{2} = 2k(k+1)$ ，

要求 $n < 100$ ，即 $2k(k+1) < 100$ ， $k(k+1) < 50$ ，

尝试 k 值：

① $k = 1$ ， $n = 2 \times 1 \times 2 = 4 < 100$

② $k = 2$ ， $n = 2 \times 2 \times 3 = 12 < 100$

③ $k = 3$ ， $n = 2 \times 3 \times 4 = 24 < 100$

④ $k = 4$ ， $n = 2 \times 4 \times 5 = 40 < 100$

⑤ $k = 5$ ， $n = 2 \times 5 \times 6 = 60 < 100$

⑥ $k = 6$ ， $n = 2 \times 6 \times 7 = 84 < 100$

⑦ $k = 7$ ， $n = 2 \times 7 \times 8 = 112 > 100$ （不符合）

因此， k 从 1 到 6，对应 6 组“完美平方数”。

故答案为：6。

三. 简答题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

19. 计算： $(3x^2 - 5xy) - (xy - 2x^2)$ 。

【答案】 $5x^2 - 6xy$

【解析】

【分析】 本题主要考查了整式加减，合并同类项时，只对同类项的系数进行加减计算，字母和字母的指数保持不变，据此求解即可。

【详解】 解：原式 $= 3x^2 - 5xy - xy + 2x^2$
 $= 5x^2 - 6xy$ 。

20. 用乘法公式计算： $2025^2 - 2024\frac{1}{2} \times 2025\frac{1}{2}$ 。

【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查平方差公式，正确计算是解题的关键；将式子 $2024\frac{1}{2} \times 2025\frac{1}{2}$ 变形为 $(2025 - \frac{1}{2}) \times (2025 + \frac{1}{2})$ ，再根据平方差公式计算即可。

【详解】 解：原式 $= 2025^2 - (2025 - \frac{1}{2}) \times (2025 + \frac{1}{2})$

$$= 2025^2 - \left[2025^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{4}.$$

21. 计算: $(-2x)^3 \cdot x^7 \div x^2 - (x^2)^3 \cdot (-2x^2).$

【答案】 $-6x^8$

【解析】

【分析】 本题考查了幂的乘方与积的乘方、单项式乘以单项式、单项式除以单项式，熟练掌握运算是解此题的关键

先计算幂的乘方与积的乘方，再计算单项式乘以单项式和单项式除以单项式，最后合并同类项即可.

【详解】 解: 原式 $= -8x^3 \cdot x^7 \div x^2 + x^6 \cdot 2x^2$

$$= -8x^8 + 2x^8$$

$$= -6x^8.$$

22. 用乘法公式计算: $(x^2 - x - 3)(x^2 + x - 3).$

【答案】 $x^4 - 7x^2 + 9$

【解析】

【分析】 本题考查的是整式的乘法运算，平方差公式与完全平方公式的应用，熟练地运用平方差公式与完全平方公式进行简便运算是解本题的关键. 按照平方差公式与完全平方公式进行计算，再合并同类项即可.

【详解】 解: 原式 $= [(x^2 - 3) - x][(x^2 - 3) + x]$

$$= (x^2 - 3)^2 - x^2$$

$$= x^4 - 6x^2 + 9 - x^2$$

$$= x^4 - 7x^2 + 9.$$

23. 因式分解: $a^2(a - b) + 4(b - a).$

【答案】 $(a - b)(a + 2)(a - 2)$

【解析】

【分析】 该题考查了因式分解，先提公因式，再根据平方差公式因式分解即可.

【详解】 解: 原式 $= a^2(a - b) - 4(a - b)$

$$= (a-b)(a^2-4)$$

$$= (a-b)(a+2)(a-2).$$

24. 因式分解: $(x^2+2x)^2-2(x^2+2x)-3$

【答案】 $(x+3)(x-1)(x+1)^2$

【解析】

【分析】 根据十字交叉法分解因式即可.

【详解】 解: 原式 $= (x^2+2x+1)(x^2+2x-3) = (x+1)^2(x+3)(x-1)$

【点睛】 本题主要考查十字交叉法分解因式, 这是考试的必考点, 必须熟练掌握.

四. 解答题 (本大题共 4 题, 第 25 题 6 分, 第 26 题 8 分, 第 27 题 8 分, 第 28 题 10 分, 满分 32 分)

25. 已知整式 $A = 3x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2$, $B = -x^2 + 2xy - 2y^2$, 求 $2A - B$.

【答案】 $7x^2 - 4xy + 3y^2$

【解析】

【分析】 本题考查了整式的加减, 把 $A = 3x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2$, $B = -x^2 + 2xy - 2y^2$ 代入 $2A - B$, 然后去括号合并同类项即可.

【详解】 解: $2A - B = 2(3x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2) - (-x^2 + 2xy - 2y^2)$

$$= 6x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + 2y^2$$

$$= 7x^2 - 4xy + 3y^2.$$

26. 先化简, 再求值: $[(x+y)(x-3y)-(x-3y)^2] \div 2y$, 其中 x, y 满足等式 $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 17 = 0$.

【答案】 $2x - 6y$, 14

【解析】

【分析】 本题主要考查整式的化简求值, 解题的关键是熟练掌握平方差公式以及完全平方公式. 利用平方差公式以及完全平方公式以及整式的混合运算进行化简, 再求出 x, y 的值, 代入求解即可.

【详解】 解: $[(x+y)(x-3y)-(x-3y)^2] \div 2y$

$$= [(x^2 - 2xy - 3y^2) - (x^2 - 6xy + 9y^2)] \div 2y$$

$$= (4xy - 12y^2) \div 2y$$

$$= 2x - 6y.$$

$$x^2 + y^2 - 8x + 2y + 17 = 0$$

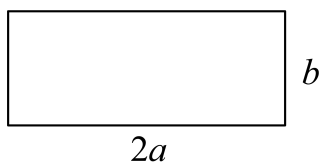
$$(x-4)^2 + (y+1)^2 = 0$$

$$\text{所以 } x = 4, \quad y = -1.$$

$$\text{当 } x = 4, \quad y = -1 \text{ 时,}$$

$$\text{原式} = 2 \times 4 - 6 \times (-1) = 14.$$

27. 如图，长、宽分别为 $2a$ 、 b 的长方形，它的周长为 12，面积为 7. 求下列整式的值：



$$(1) \quad 4a^2 + b^2;$$

$$(2) \quad 8a^3 - 4a^2b - 2ab^2 + b^3.$$

【答案】 (1) 22 (2) 48

【解析】

【分析】 此题考查了完全平方公式和因式分解法的应用，正确将原式分解因式是解题的关键.

(1) 利用面积公式得到 $2ab = 7$ ，由周长公式得到 $2a + b = \frac{12}{2} = 6$ ，所以将原式变形为 $(2a + b)^2 - 4ab$ ，再代入求值即可.

(2) 将原式因式分解得出 $(2a + b)(2a - b)^2$ ，再代入求值即可.

【小问 1 详解】

解：由题意得 $2a + b = \frac{12}{2} = 6$ ， $2ab = 7$.

$$4a^2 + b^2$$

$$= (2a + b)^2 - 4ab$$

$$= 6^2 - 2 \times 7$$

$$= 22.$$

【小问 2 详解】

解: $(2a-b)^2 = (2a+b)^2 - 8ab = 36 - 28 = 8$.

$$\begin{aligned} & 8a^3 - 4a^2b - 2ab^2 + b^3 \\ &= 4a^2(2a-b) - b^2(2a-b) \\ &= (4a^2 - b^2)(2a-b) \\ &= (2a+b)(2a-b)(2a-b) \\ &= (2a+b)(2a-b)^2 \\ &= 6 \times 8 \\ &= 48. \end{aligned}$$

28. 数学活动课上, 老师准备了若干张如图 1 所示的三种卡片, A 种卡片是边长为 a 的正方形, B 种卡片是长、宽分别为 a 、 b ($a > b$) 的长方形, C 种卡片是边长为 b 的正方形.

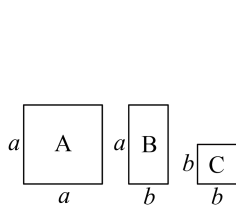


图1

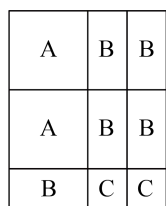


图2

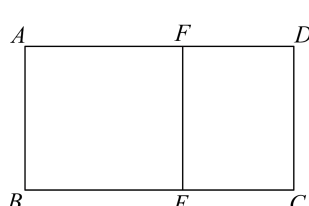


图3

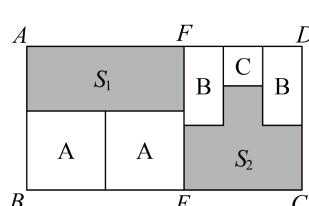


图4

(1) 小普同学用 2 张 A 种卡片、5 张 B 种卡片、2 张 C 种卡片拼出了如图 2 所示长方形, 请借助图形因式分解: $2a^2 + 5ab + 2b^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 如图 3, 已知线段 EF 将长方形 $ABCD$ 分成左右两个长方形, $BE = 2a$, $EC = 3b$.

① 小普同学拿了 5 张图 1 中的卡片, 按图 4 方式, 不重叠地放在长方形 $ABCD$ 内, 长方形中有两个部分 (阴影部分) 未被覆盖, 设左上角的阴影部分面积为 S_1 , 右下角的阴影部分面积为 S_2 . 当 $AB > a$ 时, $S_1 - S_2$ 的值始终保持不变, a 与 b 应满足怎样的数量关系?

② 小普同学拿了 15 张图 1 中的卡片 (其中有 7 张 B 种卡片). 在不剪裁、无缝隙、不重叠的情况下, 小普同学用全部卡片恰好铺满图 3 中的长方形 $ABCD$, 求此时长方形 $ABCD$ 的边长 AB (用含 a 、 b 的代数式表示), 并画出一种长方形 $ABCD$ 内的卡片放置图.

【答案】 (1) $(2a+b)(a+2b)$

(2) ① $2a - 3b = 0$; ② $AB = a + 2b$, 图见解析

【解析】

【分析】本题考查了因式分解的几何意义与长方形面积的综合应用，解题的关键是利用图形的面积关系建立代数等式，将几何直观与代数运算相结合.

(1) 通过分析图 2 中卡片组成的长方形的长和宽，利用面积相等的关系进行因式分解.

(2) ①设 $AB = x$ ，分别表示出 S_1 和 S_2 ，进而得出 $S_1 - S_2$ 的表达式，根据其值与 x 无关，令 x 的系数为 0，求出 a 与 b 的数量关系. ②问设 $AB = ma + nb$ ，根据长方形面积公式和卡片数量列出方程组，求解得出 m 、 n 的值，从而得到 AB 的表达式.

【小问 1 详解】

图 2 九个部分的面积和为 $2a^2 + 5ab + 2b^2$ ，整体上看是长为 $2a + b$ ，宽为 $a + 2b$ 的长方形，因此面积为 $(2a + b)(a + 2b)$ ，

所以有 $2a^2 + 5ab + 2b^2 = (2a + b)(a + 2b)$ ，

故答案为： $(2a + b)(a + 2b)$ ；

【小问 2 详解】

① 解：设 $AB = x$ ，

由图 4 可知， $S_1 = 2ax - 2a^2$ ， $S_2 = 3bx - 2ab - b^2$ ，

$S_1 - S_2 = 2ax - 2a^2 - 3bx + 2ab + b^2 = (2a - 3b)x - 2a^2 + 2ab + b^2$.

因为当 AB 的长度变化时， $S_1 - S_2$ 的值始终保持不变，即 x 的系数为 0，

所以 $2a - 3b = 0$.

② 设 $AB = ma + nb$

$AB \cdot BC = (ma + nb)(2a + 3b) = 2ma^2 + (3m + 2n)ab + 3nb^2$ ，

因为用了 B 种卡片 7 张， A 、 C 种卡片共 8 张.

所以 $\begin{cases} 3m + 2n = 7 \\ 2m + 3n = 8 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} m = 1 \\ n = 2 \end{cases}$

$\therefore AB = a + 2b$

作图如下图所示：

A	F					D
b	B	B	C	C	C	
b	B	B	C	C	C	
a	A	A	B	B	B	
B	a	a	E	b	b	C