

扬波中学 2025 学年第一学期七年级数学期中试卷

2025.10

(考试时间 90 分钟, 满分 100 分)

一、选择题 (共 6 题, 每小题 3 分, 满分 18 分)

1. 代数式 $-[a+2(b-3c)]$ 去括号后应是 ()

A. $-a+2b-3c$

B. $-a-2b+3c$

C. $-a-2b+6c$

D. $-a+2b-6c$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了去括号. 括号前是正号, 去掉括号和它前面的正号括号里各项符号不变; 括号前是负号, 去掉括号和它前面的负号括号里各项符号改变. 解决本题的关键是先根据去括号的法则去掉小括号得到 $-(a+2b-6c)$, 再根据去括号法则去掉中括号得到 $-a-2b+6c$.

【详解】 解: $-[a+2(b-3c)]$

$$= -[a+2b-6c]$$

$$= -a-2b+6c,$$

故选: C.

2. 下列计算中, 正确的是 ()

A. $x^2+x^3=x^5$

B. $(-x^2)^5+(-x^5)^2=0$

C. $(x^2y^3)^2=x^4y^5$

D. $x^2 \cdot x^3 = x^6$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了合并同类项、幂的乘方与积的乘方、同底数幂的乘法, 熟练掌握各运算法则是解题关键. 根据合并同类项、幂的乘方与积的乘方、同底数幂的乘法法则逐项判断即可得.

【详解】 解: A、 x^2 与 x^3 不是同类项, 不可合并, 则此项错误, 不符合题意;

B、 $(-x^2)^5+(-x^5)^2=-x^{10}+x^{10}=0$, 则此项正确, 符合题意;

C、 $(x^2y^3)^2=x^4y^6$, 则此项错误, 不符合题意;

D、 $x^2 \times x^3 = x^5$, 则此项错误, 不符合题意;

故选: B.

3. 下列各式由左边到右边的变形中, 属于因式分解的是 ()

A. $m^2 - 4 + m = (m + 2)(m - 2) + m$

B. $m^2 - 5 = m\left(m - \frac{5}{m}\right)$

C. $n(a + b) = na + nb$

D. $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查因式分解的定义, 熟练掌握因式分解的定义是解题的关键;
多项式的因式分解是将多项式变形为几个整式的乘积形式, 由此解答即可.

【详解】A. $m^2 - 4 + m = (m + 2)(m - 2) + m$ 右边不是整式积的形式, 故此选项不符合题意;

B. $m^2 - 5 = m\left(m - \frac{5}{m}\right)$, 右边括号内不是整式, 是分式, 不符合因式分解的定义, 故本选项不合题意;

C. $n(a + b) = na + nb$ 是整式的乘法, 不是因式分解, 故此选项不符合题意;

D. $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ 是因式分解, 故此选项符合题意;

故选: D.

4. 下列整式的乘法中, 不能用平方差公式计算的是 ()

A. $(x + y)(x - y)$

B. $(x + y)(-x + y)$

C. $(-x + y)(x - y)$

D. $(-x + y)(-x - y)$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了平方差公式, 熟知平方差公式 $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ 是解题的关键.
根据平方差公式逐项分析即可.

【详解】解: A、 $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$, 能用平方差公式计算, 故不符合题意;

B、 $(x + y)(-x + y) = (y + x)(y - x) = y^2 - x^2$, 能用平方差公式计算, 故不符合题意;

C、 $(-x + y)(x - y) = -(x - y)(x - y)$, 不符合平方差公式结构特征, 不能用平方差公式计算, 故符合题意;

D、 $(-x + y)(-x - y) = (-x)^2 - y^2$, 能用平方差公式计算, 故不符合题意;

故选：C.

5. 若 $x^2 + ax + 16$ 在整数范围内可以进行因式分解，则常数 a 的值有（ ）个

A. 2

B. 4

C. 6

D. 8

【答案】C

【解析】

【分析】此题主要考查的是十字相乘法分解因式等有关知识，对常数 16 的正确进行质因数分解，是解题的关键.

利用十字相乘法进行求解即可.

【详解】解：根据“十字相乘法”得，

$$16 = 1 \times 16, \text{ 此时 } a = 1 + 16 = 17;$$

$$16 = -1 \times (-16), \text{ 此时 } a = -1 - 16 = -17;$$

$$16 = 2 \times 8, \text{ 此时 } a = 2 + 8 = 10;$$

$$16 = -2 \times (-8), \text{ 此时 } a = -2 - 8 = -10;$$

$$16 = 4 \times 4, \text{ 此时 } a = 4 + 4 = 8;$$

$$16 = -4 \times (-4), \text{ 此时 } a = -4 - 4 = -8;$$

$\therefore a$ 的值一共有 6 个，

故选：C.

6. 设 $2^m = 3$ ， $2^n = 6$ ， $2^p = 12$ ，下列 m ， n ， p 三者之间的三个关系式正确的是（ ）

A. $m + p = 2n$

B. $m + n = 2p$

C. $n^2 - mp = 2$

D. $p + n = 2m$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了同底数幂的乘法的逆用，幂的乘方的逆用，完全平方公式的应用. 根据同底数幂的乘法的逆用，幂的乘方的逆用可得 $m + p = 2n$ ， $m + n \neq 2p$ ， $n = m + 1$ ， $p = m + 2$ ，再进一步分析即可.

【详解】解： $\because 2^m = 3$ ， $2^n = 6$ ， $2^p = 12$ ，

$$\therefore 2^{m+p} = 2^m \cdot 2^p = 3 \times 12 = 36 = 6^2 = (2^n)^2 = 2^{2n},$$

$\therefore m + p = 2n$ ，故 A 符合题意；

$$\because 2^m = 3, 2^n = 6, 2^p = 12,$$

$$\therefore 2^{m+n} = 2^m \cdot 2^n = 3 \times 6 = 18, 2^{2p} = (2^p)^2 = 12^2 = 144,$$

$$\therefore 2^{m+n} \neq 2^{2p},$$

$\therefore m+n \neq 2p$, 故 B 不符合题意;

$$\because 2^m = 3, 2^n = 6, 2^p = 12,$$

$$\therefore 2^{m+1} = 2 \times 2^m = 2 \times 3 = 6 = 2^n, 2^{m+2} = 2^m \times 2^2 = 3 \times 4 = 12 = 2^p,$$

$$\therefore n = m+1, p = m+2,$$

$$\therefore n^2 - mp = (1+m)^2 - m(2+m) = 1 + 2m + m^2 - 2m - m^2 = 1, p+n = 2m+3,$$

故 C 不符合题意, D 不符合题意.

故选: A.

二、填空题 (共 12 题, 每小题 2 分, 满分 24 分)

7. 将多项式 $5x^2y - 4y^2 + x^3 + xy^3$ 按字母 x 降幂排列是_____.

【答案】 $x^3 + 5x^2y + xy^3 - 4y^2$

【解析】

【分析】 本题考查了多项式按某个字母降幂排列, 将含有 x 的项, 按 x 的指数从高到低排列, 包含项的符号, 即可求解; 理解降幂是解题的关键.

【详解】 解: $5x^2y - 4y^2 + x^3 + xy^3$
 $= x^3 + 5x^2y + xy^3 - 4y^2;$

故答案为: $x^3 + 5x^2y + xy^3 - 4y^2$.

8. 计算: $4ab^2 \div \left(-\frac{1}{2}ab\right) =$ _____.

【答案】 $-8b$

【解析】

【分析】 本题考查单项式除以单项式的运算. 根据运算法则, 系数相除, 同底数幂相除即可.

【详解】 解: $4ab^2 \div \left(-\frac{1}{2}ab\right) = \left[4 \div \left(-\frac{1}{2}\right)\right] \cdot (ab^2 \div ab) = -8b.$

故答案为: $-8b$.

9. 计算: $(-3a)^2 + 2a^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $11a^2$

【解析】

【分析】 本题考查了整式的混合运算, 根据积的乘方运算化简 $(-3a)^2$, 再合并同类项, 即可解题.

【详解】 解: $(-3a)^2 + 2a^2 = 9a^2 + 2a^2 = 11a^2$,

故答案为: $11a^2$.

10. 已知 $a + 2b - 3 = 0$, 则 $3^a \cdot 3^{2b} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 27

【解析】

【分析】 本题考查了同底数幂的乘法, 熟练掌握运算是解题的关键.

根据同底数幂的乘法法则计算即可.

【详解】 解: $\because a + 2b - 3 = 0$,

$$\therefore a + 2b = 3,$$

$$\therefore 3^a \cdot 3^{2b} = 3^{a+2b} = 3^3 = 27,$$

故答案为: 27.

11. 已知 $x^2 - x - 1 = 0$, 则 $-4x^2 + 4x + 9 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 5

【解析】

【分析】 本题主要考查了代数式求值, 添括号, 先求出 $x^2 - x$ 的值, 再根据 $-4x^2 + 4x + 9 = -4(x^2 - x) + 9$ 利用整体代入法求解即可.

【详解】 解: $\because x^2 - x - 1 = 0$,

$$\therefore x^2 - x = 1,$$

$$\therefore -4x^2 + 4x + 9 = -4(x^2 - x) + 9 = -4 \times 1 + 9 = -4 + 9 = 5,$$

故答案为: 5.

12. 已知单项式 $-2a^{m+1}b^3$ 与单项式 $3a^3b^{m-2}$ 的和是单项式, 则 $m^n = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 25

【解析】

【分析】 本题考查了同类项的定义，有理数的乘方，根据同类项是指所含字母相同，并且相同字母的指数也相同，求得 m, n 的值，再计算 m^n 即可.

【详解】 解： $\because$ 单项式 $-2a^{n+1}b^3$ 与单项式 $3a^3b^{m-2}$ 的和是单项式，

$\therefore$ 单项式 $-2a^{n+1}b^3$ 与单项式 $3a^3b^{m-2}$ 是同类项，

$$\therefore n+1=3, m-2=3,$$

$$\therefore n=2, m=5,$$

$$\therefore m^n = 5^2 = 25,$$

故答案为： 25.

13. 若 $x^2 + (2k-1)x + 9$ 是一个完全平方，则 k 的值为_____.

【答案】 $\frac{7}{2}$ 或 $-\frac{5}{2}$

【解析】

【分析】 利用完全平方式的结构特征判断即可确定出 k 的值.

【详解】 $\because x^2 + (2k-1)x + 9$ 是一个完全平方公式，

$$\therefore (2k-1) = \pm 6,$$

$$\therefore 2k-1 = \pm 6,$$

$$\text{解得： } k = \frac{7}{2} \text{ 或 } k = -\frac{5}{2},$$

$$\text{故答案为： } \frac{7}{2} \text{ 或 } -\frac{5}{2}.$$

【点睛】 本题考查了完全平方，熟练掌握完全平方公式是解题的关键.

14. $x^2 + 2x - 3$ 与一个关于 x 的二项式 $ax - 2$ 相乘，乘积中不出现一次项，则 a 的值为_____.

【答案】 $a = -\frac{4}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了整式的乘法.

将二次三项式 $x^2 + 2x - 3$ 与二项式 $ax - 2$ 相乘，展开后合并同类项，令一次项系数为零，求解 a 的值即可。

【详解】解： $(x^2 + 2x - 3)(ax - 2)$

$$= x^2 \cdot ax + x^2 \cdot (-2) + 2x \cdot ax + 2x \cdot (-2) - 3 \cdot ax - 3 \cdot (-2)$$
$$= ax^3 - 2x^2 + 2ax^2 - 4x - 3ax + 6$$
$$= ax^3 + (2a - 2)x^2 + (-4 - 3a)x + 6$$

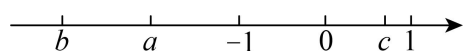
$\therefore$ 乘积中不出现一次项，

$\therefore$ 一次项系数为零，即 $-4 - 3a = 0$ ，

解得 $a = -\frac{4}{3}$ 。

故答案为： $a = -\frac{4}{3}$ 。

15. 有理数 a, b, c 在数轴上对应点如图，化简代数式 $|c - b| - |b - a| + |a + c| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】 $-2a$

【解析】

【分析】本题考查了有理数与数轴，绝对值的性质，由数轴可得 $b < a < 0 < c$ ， $|a| > |c|$ ，进而得到 $c - b > 0$ ， $b - a < 0$ ， $a + c < 0$ ，再根据绝对值的性质化简即可求解，通过数轴判断出绝对值符号里面的式子的符号是解题的关键。

【详解】解：由数轴可得， $b < a < 0 < c$ ， $|a| > |c|$ ，

$$\therefore c - b > 0, \quad b - a < 0, \quad a + c < 0,$$

$$\therefore |c - b| - |b - a| + |a + c|$$

$$= c - b - (a - b) + (-a - c)$$

$$= c - b - a + b - a - c$$

$$= -2a,$$

故答案为： $-2a$ 。

16. 已知 $(2026 - a)(2024 - a) = 2025$ ，则 $(2026 - a)^2 + (a - 2024)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 4054

【解析】

【分析】 本题考查了完全平方公式变形求值.

设 $x = 2026 - a$, $y = 2024 - a$, 则已知条件为 $xy = 2025$, 需求 $x^2 + y^2$, 利用完全平方公式

$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ 变形得 $x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy$, 将 $x - y$ 和 xy 的值代入计算即可.

【详解】 解: 设 $x = 2026 - a$, $y = 2024 - a$,

则 $x - y = (2026 - a) - (2024 - a) = 2$, 且 $xy = 2025$,

所以 $x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy = 2^2 + 2 \times 2025 = 4 + 4050 = 4054$,

即 $(2026 - a)^2 + (a - 2024)^2 = x^2 + y^2 = 4054$.

故答案为: 4054 .

17. 已知 a 、 b 、 c 满足 $a^2 + 2b = 7$, $b^2 - 2c = -1$, $c^2 - 6a = -17$, 则 $a + b + c =$ _____.

【答案】 3

【解析】

【分析】 题中三个等式左右两边分别相加后再移项, 可以通过配方法得到三个平方数的和为 0. 然后根据非负数的性质可以得到 a 、 b 、 c 的值, 从而求得 $a + b + c$ 的值.

【详解】 解: 题中三个等式左右两边分别相加可得:

$$a^2 + 2b + b^2 - 2c + c^2 - 6a = 7 - 1 - 17 ,$$

$$\text{即 } a^2 + 2b + b^2 - 2c + c^2 - 6a + 11 = 0 ,$$

$$\therefore (a - 3)^2 + (b + 1)^2 + (c - 1)^2 = 0 ,$$

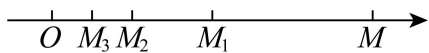
$$\therefore a = 3, b = -1, c = 1 ,$$

$$\therefore a + b + c = 3 - 1 + 1 = 3 ,$$

故答案为 3.

【点睛】 本题考查配方法的应用, 熟练掌握配方法的方法和步骤并灵活运用是解题关键.

18. 如图, 动点 P 从到原点距离为 8 的点 M 处向原点方向跳动, 第一次跳到 OM 的中点 M_1 处, 第二次从点 M_1 跳到 OM_1 的中点 M_2 处, 第三次从点 M_2 跳到 OM_2 的中点 M_3 处, 如此不断跳动下去, 第 2025 次跳动后, 该动点到原点 O 的距离为_____.



【答案】 $\frac{1}{2^{2022}}$

【解析】

【分析】 本题考查图形的变化规律，能根据质点的跳动方式得出每跳一次，质点与原点的距离是上一次距原点距离的一半是解题的关键。

分析每次跳动后质点与原点的距离，发现规律即可解决问题。

【详解】 解：由题知，点 M 所对应的数到原点的距离是 8 个单位，

根据质点的跳动方式，

则第一次跳动后，该质点到原点的距离是： $8 \times \frac{1}{2}$ ；

第二次跳动后，该质点到原点的距离是： $8 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ ；

第三次跳动后，该质点到原点的距离是： $8 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ ；

...

∴ 第 2025 次跳动后，该质点到原点的距离是： $8 \times \frac{1}{2^{2025}} = \frac{1}{2^{2022}}$ 。

故答案为： $\frac{1}{2^{2022}}$ 。

三、简答题（共 6 题，每小题 4 分，满分 24 分）

19. 计算： $(a^3b^3)^n + 2(-a^nb^n)^3 + (ab)^{3n}$

【答案】 0

【解析】

【分析】 本题考查了积的乘方和幂的乘方，合并同类项。

先计算积的乘方和幂的乘方，再合并同类项即可。

【详解】 解： $(a^3b^3)^n + 2(-a^nb^n)^3 + (ab)^{3n}$

$$= a^{3n}b^{3n} - 2a^{3n}b^{3n} + a^{3n}b^{3n}$$

$$= 0.$$

20. 计算： $(2x^2 - x^3 + 3x) \div \left(-\frac{1}{2}x\right)$

【答案】 $-4x + 2x^2 - 6$

【解析】

【分析】 本题考查了多项式除以单项式. 直接根据运算法则计算即可.

【详解】 解: $(2x^2 - x^3 + 3x) \div \left(-\frac{1}{2}x\right)$

$$= 2x^2 \div \left(-\frac{1}{2}x\right) - x^3 \div \left(-\frac{1}{2}x\right) + 3x \div \left(-\frac{1}{2}x\right)$$
$$= -4x + 2x^2 - 6.$$

21. 因式分解: $2ax^2 - 18a^3$

【答案】 $2a(x-3a)(x+3a)$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解. 先提取公因式 $2a$, 再利用平方差公式分解即可.

【详解】 解: $2ax^2 - 18a^3$

$$= 2a(x^2 - 9a^2)$$
$$= 2a(x-3a)(x+3a).$$

22. 因式分解: $a^2 - 10ab + 25b^2 - 3a + 15b$

【答案】 $(a-5b)(a-5b-3)$

【解析】

【分析】 本题重点考查完全平方公式分解因式和提公因式法分解因式, 完全平方公式分解因式需要运用完全平方公式, 完全平方公式为 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$, 如果多项式的各项有公因式, 可以把这个公因式提取出来, 将多项式写成公因式与另一个因式的乘积的形式, 这种分解因式的方法叫做提公因式法, 熟练掌握因式分解的技巧是本题解题的关键.

先对前三项运用完全平方公式, 后两项提取公因式 -3 , 最后再提取公因式 $a-5b$, 即可完成计算.

【详解】 解: $a^2 - 10ab + 25b^2 - 3a + 15b$

$$= (a-5b)^2 - 3(a-5b)$$
$$= (a-5b)(a-5b-3).$$

23. 因式分解: $x^2 - 7xy + 10y^2$

【答案】 $(x-2y)(x-5y)$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解.

通过寻找两个数使其和为 -7 、积为 10 进行因式分解即可.

【详解】 解: 原多项式为 $x^2 - 7xy + 10y^2$,

寻找两个数, 它们的和为 -7 , 积为 10 .

10 的因数对中, -2 和 -5 满足条件.

因此, 因式分解为 $(x-2y)(x-5y)$.

24. 用简便方法计算: $1021^2 - 1017 \times 1025$.

【答案】 16

【解析】

【分析】 本题主要考查了平方差公式, 先把原式变形为 $1021^2 - (1021-4) \times (1021+4)$, 再利用平方差公式去括号, 并计算求解即可.

【详解】 解: $1021^2 - 1017 \times 1025$

$$= 1021^2 - (1021-4) \times (1021+4)$$

$$= 1021^2 - (1021^2 - 4^2)$$

$$= 1021^2 - 1021^2 + 16$$

$$= 16.$$

四、解答题 (25-28 每题 5 分, 29 题 8 分, 30 题 6 分, 满分 34 分)

25. 已知: $9^{m+1} = 3^8$, $3^{2n+1} = 243$, 求 $m+n$ 的值.

【答案】 5

【解析】

【分析】 本题考查了幂的乘方.

通过将方程两边化为同底数幂, 比较指数求出 m 和 n 的值, 进而计算 $m+n$ 的值即可.

【详解】 解: $\because 9^{m+1} = (3^2)^{m+1} = 3^{2m+2}$, $9^{m+1} = 3^8$,

$$\therefore 2m+2=8,$$

$$\therefore 2m=6,$$

$$\therefore m=3;$$

$$\because 3^{2n+1}=243, \text{ 且 } 243=3^5,$$

$$\therefore 2n+1=5,$$

$$\therefore 2n=4,$$

$$\therefore n=2;$$

$$\therefore m+n=3+2=5.$$

26. 先化简再求值, $\frac{1}{2}\left[\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2\right]\left(x-\frac{1}{2}y\right)\left(x+\frac{1}{2}y\right)$, 其中 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+|y+2|=0$.

【答案】 $x^3y-\frac{1}{4}xy^3, \frac{3}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查了整式的化简求值.

根据平方差公式分别计算 $\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2$ 、 $\left(x-\frac{1}{2}y\right)\left(x+\frac{1}{2}y\right)$, 进而化简原整式, 根据绝对值的非负性、平方的非负性求出 x 、 y 的值, 进而代入化简结果计算即可.

【详解】 解: $\frac{1}{2}\left[\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2\right]\left(x-\frac{1}{2}y\right)\left(x+\frac{1}{2}y\right)$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(x+\frac{1}{2}y\right)+\left(x-\frac{1}{2}y\right)\right]\left[\left(x+\frac{1}{2}y\right)-\left(x-\frac{1}{2}y\right)\right]\left[x^2-\left(\frac{1}{2}y\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot y \cdot \left(x^2 - \frac{1}{4}y^2\right)$$

$$= xy\left(x^2 - \frac{1}{4}y^2\right)$$

$$= x^3y - \frac{1}{4}xy^3,$$

$$\because \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+|y+2|=0,$$

$$\therefore x-\frac{1}{2}=0, \quad y+2=0,$$

$$\therefore x=\frac{1}{2}, \quad y=-2,$$

$$\therefore \text{原式} = x^3y - \frac{1}{4}xy^3$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times (-2) - \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times (-2)^3$$

$$= \frac{3}{4}.$$

27. (1) 已知 $a+b=-7$, $ab=12$, 求 $(a-b)^2$ 的值.

(2) 已知 $a+b-c=5$, $a-b+c=-3$, 求 $a^2-b^2+2bc-c^2$ 的值.

【答案】(1) 1; (2) -15

【解析】

【分析】本题考查完全平方公式的变形求值, 因式分解的应用, 熟记完全平方公式 $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, 并灵活运用是解答的关键.

(1) 利用公式 $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$ 和已知求解即可;

(2) 先分组分解因式, 再把 $a+b-c=5$, $a-b+c=-3$ 代入求解即可.

【详解】解: $\because a+b=-7$, $ab=12$,

$$\therefore (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = (-7)^2 - 4 \times 12 = 1;$$

(2) $\because a+b-c=5$, $a-b+c=-3$,

$$\therefore a^2 - b^2 + 2bc - c^2$$

$$= a^2 - (b-c)^2$$

$$= [a - (b-c)][a + (b-c)]$$

$$= (a-b+c)(a+b-c)$$

$$= -3 \times 5 = -15.$$

28. 为治理污水, 甲、乙两区都需要各自铺设一段污水排放管道, 甲、乙两区八月份都各铺了 x 米, 九月份和十月份中, 甲区的工作量平均每月增长率为 a , 乙区平均每月减少率为 a .

(1) 求十月份甲、乙两区各铺设了多少米的排污管? (分别用含字母 a 、 x 的代数式表示);

(2) 如果 $x=600$, 且 $a=10\%$, 那么十月份甲区比乙区多铺多少米排污管?

【答案】(1) 甲区铺设了 $x(1+a)^2$ 米的排污管, 乙区铺设了 $x(1-a)^2$ 米的排污管

(2) 十月份甲区比乙区多铺 240 米排污管

【解析】

【分析】 本题考查列代数式及整式的化简求值.

(1) 根据增长率与减少率, 甲区十月份铺设的米数为八月份米数乘以 $(1+a)^2$, 乙区十月份铺设的米数为八月份米数乘以 $(1-a)^2$;

(2) 先求甲区与乙区十月份铺设米数的差, 化简为 $4ax$, 再代入 $x=600$ 和 $a=10\%$ 计算即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 甲区八月份铺 x 米, 每月增长率为 a ,

$\therefore$ 九月份甲区铺 $x(1+a)$ 米,

$\therefore$ 十月份甲区铺 $x(1+a)(1+a) = x(1+a)^2$ 米;

$\because$ 乙区八月份铺 x 米, 每月减少率为 a ,

$\therefore$ 九月份乙区铺 $x(1-a)$ 米,

$\therefore$ 十月份乙区铺 $x(1-a)(1-a) = x(1-a)^2$ 米;

【小问 2 详解】

解: 十月份甲区比乙区多铺的米数为:

$$x(1+a)^2 - x(1-a)^2 = x[(1+a)^2 - (1-a)^2]$$

$$= x[(1+a) + (1-a)] \times [(1+a) - (1-a)]$$

$$= x \times 2 \times 2a$$

$$= 4ax,$$

$\therefore$ 多铺的米数为 $4ax$ 米.

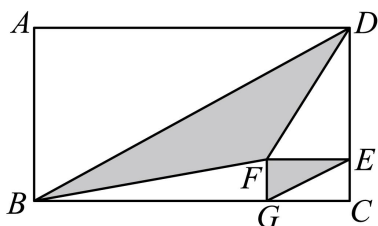
当 $x=600$, $a=10\%=0.1$ 时,

原式 $= 4 \times 600 \times 0.1 = 240$ (米).

答: 十月份甲区比乙区多铺 240 米排污管.

29. 对于任意四个有理数 a 、 b 、 c 、 d , 可以组成两个有理数对 (a,b) 与 (c,d) , 我们规定:

$(a,b) \square (c,d) = a^2 + d^2 - bc$. 例如: $(1,2) \square (3,4) = 1^2 + 4^2 - 2 \times 3 = 11$.



(1) 若 $(x, kx) \square (y, -y)$ 是一个完全平方式，求常数 k 的值；

(2) 若 $2x + y = 10$ ，且 $(3x + y, 2x^2 + 3y^2) \square (3, x - 3y) = 84$ ，求 xy 的值；

(3) 在 (2) 的条件下，将长方形 $ABCD$ 及长方形 $CEFG$ 按照如图方式放置，其中点 E 、 G 分别在边 CD 、 BC 上，连接 BD 、 BF 、 DF 、 EG ，若 $AB = 2x$ ， $BC = 8x$ ， $CE = y$ ， $CG = 4y$ ，求图中阴影部分的面积。

【答案】(1) ± 2

(2) 4 (3) 136

【解析】

【分析】(1) 由题目中的规定可知 $(x, kx) \square (y, -y) = x^2 - kxy + y^2$ ，根据完全平方公式的特征确定答案即可；

(2) 根据题目中的规定求出 $(3x + y, 2x^2 + 3y^2) \square (3, x - 3y) = 84$ 等号左边部分，可得 $4x^2 + y^2 = 84$ ，再借助完全平方公式，将 $2x + y = 10$ 代入求解即可；

(3) 根据三角形面积公式将阴影部分的面积表示出来，得到含 $2x + y$ ， xy 的整式，再代入求值即可。

【小问 1 详解】

解：根据题意，可得 $(x, kx) \square (y, -y) = x^2 + (-y)^2 - kx \cdot y = x^2 - kxy + y^2$ ，

$\because (x, kx) \square (y, -y)$ 是一个完全平方式，

$$\therefore -kxy = \pm 2xy,$$

解得 $k = \pm 2$ ；

【小问 2 详解】

根据题意，可得 $(3x + y, 2x^2 + 3y^2) \square (3, x - 3y)$

$$= (3x + y)^2 + (x - 3y)^2 - 3(2x^2 + 3y^2)$$

$$= (9x^2 + 6xy + y^2) + (x^2 - 6xy + 9y^2) - (6x^2 + 9y^2)$$

$$= 4x^2 + y^2$$

$$= 84,$$

$$\therefore 2x + y = 10,$$

$$\therefore (2x+y)^2 = 4x^2 + 4xy + y^2 = 100,$$

$$\therefore 4xy = 100 - 84 = 16,$$

$$\therefore xy = 4;$$

【小问3详解】

由(2)可知, $2x+y=10$, $xy=4$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 和四边形 $CEFG$ 均为长方形,

$$\therefore CD = AB = 2x, \quad BC = AD = 8x, \quad CG = EF = 4y, \quad CE = FG = y,$$

$$\therefore DE = 2x - y, \quad BG = 8x - 4y,$$

$\therefore$ 阴影部分的面积为

$$\begin{aligned} S &= S_{\triangle BCD} - S_{\triangle BFG} - S_{\triangle DEF} - S_{\triangle CEG} \\ &= \frac{1}{2}BC \cdot CD - \frac{1}{2}BG \cdot FG - \frac{1}{2}EF \cdot DE - \frac{1}{2}CG \cdot CE \\ &= \frac{1}{2} \times 8x \cdot 2x - \frac{1}{2}(8x-4y) \cdot y - \frac{1}{2} \times 4y(2x-y) - \frac{1}{2} \times 4y \cdot y \\ &= 8x^2 - 4xy + 2y^2 - 4xy + 2y^2 - 2y^2 \\ &= 8x^2 - 8xy + 2y^2 \\ &= 2(2x+y)^2 - 16xy \\ &= 2 \times 10^2 - 16 \times 4 \\ &= 136. \end{aligned}$$

【点睛】 本题主要考查了整式混合运算、完全平方公式的应用、代数式求值等知识, 熟练掌握完全平方公式并灵活运用是解题关键.

30. 定义: 整式 A 乘以整式 B , 得到整式 C , 如果整式 C 的项数正好比整式 A 的项数多 1, 那么我们称整式 B 是整式 A 的“相邻增项式”.

(1) 如果 $A = x - 2$, $B = 2x + 5$, 判断 B 是否是 A 的“相邻增项式”, 并说明理由;

(2) 已知 $A = x - 3$, $B = x^2 + 2mx + n$ 都是关于 x 的整式且 m 、 n 均为不等于 0 的有理数.

① 填空: 当 $n = 1$ 时, 如果 B 是 A 的“相邻增项式”, 那么 m 的值为_____;

② 设 $D = B(A + 2)$, $E = B - A - n$, 如果关于 x 的整式 D 中不含 x 的二次项, 且整式 E 是整式 D 的“相

邻增项式”，求 n 的值.

【答案】(1) 是，理由见解析

(2) ① $m = \frac{1}{6}$ 或 $m = \frac{3}{2}$; ② n 的值为 -2

【解析】

【分析】本题考查了多项式乘多项式，解题的关键是理解题意，掌握多项式乘多项式法则.

(1) 根据多项式乘法算出 $A \times B$ ，再根据“相邻增项式”的定义判断即可.

(2) ①当 $n=1$ 时，算出 $A \times B = x^3 + (2m-3)x^2 + (-6m+1)x - 3$ ，根据 B 是 A 的“相邻增项式”，得出 $2m-3=0$ 或 $-6m+1=0$ ，解答即可.

②根据 $D = B(A+2)$ ，算出 $D = x^3 + (2m-1)x^2 + (n-2m)x - n$ ，根据关于 x 的整式 D 中不含 x 的二次项，得出 $2m-1=0$ ，求出 $m = \frac{1}{2}$ ，从而得出 $D = x^3 + (n-1)x - n$ ，再表示出 E ，算出 $D \times E$ ，即可求解.

【小问 1 详解】

解：是，理由如下：

根据题意可得： $C = A \times B = (x-2)(2x+5) = 2x^2 + x - 10$ ，

$\because C$ 的项数正好比 A 的项数多 1，

$\therefore B$ 是 A 的“相邻增项式”.

【小问 2 详解】

解：①当 $n=1$ 时， $A \times B = (x-3)(x^2 + 2mx + 1) = x^3 + (2m-3)x^2 + (-6m+1)x - 3$ ，

$\because B$ 是 A 的“相邻增项式”，

$\therefore 2m-3=0$ 或 $-6m+1=0$ ，

解得： $m = \frac{1}{6}$ 或 $m = \frac{3}{2}$.

②根据题意可得 $D = B(A+2)$ ，

$\therefore D = (x^2 + 2mx + n)(x-3+2) = x^3 + (2m-1)x^2 + (n-2m)x - n$ ，

由于关于 x 的整式 D 中不含 x 的二次项，

$\therefore 2m-1=0$ ，解得： $m = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore D = x^3 + (n-1)x - n$ ，

$\therefore E = B - A - n$ ，

$$\therefore E = x^2 + x + n - (x - 3) - n = x^2 + 3,$$

$$\therefore D \times E = [x^3 + (n-1)x - n](x^2 + 3) = x^5 + (n+2)x^3 - nx^2 + 3(n-1)x - 3n,$$

当 $n=1$ 时, D 为关于 x 的二项式, 而 $D \times E = x^5 + x^3 - x^2 - 3$ 为四项式,

$\therefore$ 此时不合题意, 舍去;

当 $n \neq 1$ 时, 则 D 为关于 x 的三项式,

又 $\because E$ 是 D 的“相邻增项式”且 $n \neq 0$,

$$\therefore n = -2,$$

综上所述, n 的值为 -2 .