

2025 学年第一学期期中考试七年级数学试卷

(考试时间: 90 分钟 满分 100 分)

一、选择题 (本题共有 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 下列运算正确的是 ()

A. $a^2 \cdot a^3 = a^6$

B. $a^5 + a^5 = 2a^5$

C. $(-a^2)^3 = a^6$

D. $(-ab^2)^5 = a^5b^{10}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查指数运算规则, 包括同底数幂相乘、合并同类项、幂的乘方和积的乘方, 需逐一验证各选项.

【详解】 解: A、 $a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5$, 原运算错误;

B、 $a^5 + a^5 = 2a^5$, 原运算正确;

C、 $(-a^2)^3 = -a^6$, 原运算错误;

D、 $(-ab^2)^5 = -a^5b^{10}$, 原运算错误;

故选: B.

2. 下列各组单项式是同类项的是 ()

A. x 与 y

B. $6a^2b$ 与 $3b^2a$

C. $\frac{3}{4}x^2y^3z^4$ 与 $y^3z^4x^2$

D. $5t$ 与 7

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了同类项. 根据同类项的定义, 所含字母相同且相同字母的指数也相同的单项式是同类项, 进行逐项分析, 即可作答.

【详解】 解: A、 x 与 y 不是同类项, 故该选项不符合题意;

B、 $6a^2b$ 与 $3b^2a$, 相同字母的指数不同, 不是同类项, 故该选项不符合题意;

C、 $\frac{3}{4}x^2y^3z^4$ 与 $y^3z^4x^2$ 是同类项, 故该选项符合题意;

D、 $5t$ 与 7 不是同类项, 故该选项不符合题意;

故选: C.

3. 下列各式中，能用平方差公式计算的是（ ）

A. $(-a-2b)(a+2b)$

B. $(-a-2b)(-a-2b)$

C. $(a-2b)(-a+2b)$

D. $(-2b+a)(a+2b)$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查平方差公式， $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ ，其特点是：①两个二项式相乘，②有一项相同，另一项互为相反数，③ a 和 b 既可以代表单项式，也可以代表多项式。熟记公式结构是解题的关键。根据平方差公式的特点逐项分析即可。

【详解】解：A. $(-a-2b)(a+2b)$ 中没有相同的项，故不能用平方差公式计算；

B. $(-a-2b)(-a-2b)$ 中没有相反的项，故不能用平方差公式计算；

C. $(a-2b)(-a+2b)$ 中没有相同的项，故不能用平方差公式计算；

D. $(-2b+a)(a+2b)=(a-2b)(a+2b)$ ，能用平方差公式计算；

故选：D.

4. 下列从左边到右边的变形，属于因式分解的是（ ）

A. $6a^2b^2=3ab\cdot 2ab$

B. $(x+1)(x-1)=x^2-1$

C. $x^2-4x+4=(x-2)^2$

D. $x^2-x-4=x(x-1)-2$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查因式分解的定义：将一个多项式分解成几个整式的积的形式，叫做因式分解。根据定义进行判断即可。

【详解】解：A、 $6a^2b^2=3ab\cdot 2ab$ 不是对多项式进行变形，故选项错误，不符合题意；

B、 $(x+1)(x-1)=x^2-1$ 是整式的乘法，不是因式分解，故选项错误，不符合题意；

C、 $x^2-4x+4=(x-2)^2$ 是因式分解，故选项正确，符合题意；

D、 $x^2-x-4=x(x-1)-2$ 等式右边不是整式的积的形式，故选项错误，不符合题意；

故选：C.

5. 如果当 $x=3$ 时， $px^3+qx+1=888$ ，那么当 $x=-3$ 时， px^3+qx+1 的值是（ ）

A. -888

B. -887

C. -886

D. -889

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了代数式的求值，解题的关键是运用整体思想代入求值；

根据 $x=3$ 时， $px^3+qx+1=888$ ，求出 $27p+3q=887$ ，再将 $x=-3$ 代入化简求值即可得.【详解】解：当 $x=3$ 时， $px^3+qx+1=888$ ，

$$\therefore p \times 3^3 + 3q + 1 = 888,$$

$$\therefore 27p + 3q = 887,$$

把 $x=-3$ 代入 px^3+qx+1 得：

$$p \times (-3)^3 - 3q + 1$$

$$= -27p - 3q + 1$$

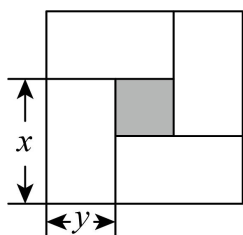
$$= -(27p + 3q - 1)$$

$$= -(887 - 1)$$

$$= -886.$$

故选：C.

6. 如图，用 4 个相同的矩形与 1 个小正方形镶嵌成的正方形图案，已知这个正方形图案的面积为 49，小正方形的面积为 9，我们用 x 、 y 表示小矩形的两边长（ $x > y$ ）。请观察图案，指出以下关系式中不正确的个数有（ ）

① $x+y=7$ ；② $x-y=3$ ；③ $xy=10$ ；④ $x^2+y^2=29$ ；⑤ $x^2-y^2=21$ 。

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了因式分解的应用，完全平方公式、平方差公式与几何图形，解题的关键是熟练掌握各

知识点并灵活运用.

先得到大正方形边长为 7, 小正方形边长为 3, 即可得到 $x + y = 7$, $x - y = 3$; 再由四个长方形面积与一个小正方形面积之和等于大正方形面积得到 $4xy + 9 = 49$, 即可判断③; 再由 $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$ 和 $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ 判断④⑤.

【详解】解: $\because$ 大正方形图案的面积为 49, 小正方形的面积为 9,

$\therefore$ 大正方形边长为 7, 小正方形边长为 3,

$\therefore x + y = 7$, $x - y = 3$,

故①②正确;

$\because$ 四个长方形面积与一个小正方形面积之和等于大正方形面积,

$\therefore 4xy + 9 = 49$,

$\therefore xy = 10$,

故③正确;

$\therefore x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 49 - 20 = 29$,

故④正确;

$\therefore x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 7 \times 3 = 21$,

故⑤正确,

$\therefore$ 不正确的有 0 个,

故选: A.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 2 分, 满分 24 分)

7. 计算: $\left(-\frac{2}{3}xy^2\right)^3 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-\frac{8}{27}x^3y^6$

【解析】

【分析】 本题考查积的乘方和幂的乘方运算法则. 根据积的乘方和幂的乘方运算法则解答即可.

【详解】 解: $\left(-\frac{2}{3}xy^2\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \cdot x^3 \cdot (y^2)^3 = -\frac{8}{27}x^3y^6$.

故答案为: $-\frac{8}{27}x^3y^6$.

8. 在横线上填入适当的整式: $(a+2)(\quad) = -a^2 - 4a - 4$.

【答案】 $-a-2$

【解析】

【分析】 本题考查了多项式的因式分解和整式乘法, 通过观察右边表达式可化为 $-(a+2)^2$, 再根据整式乘法运算求解.

【详解】 解: 右边 $= -a^2 - 4a - 4 = -(a^2 + 4a + 4) = -(a+2)^2$,

因此有 $(a+2) \cdot M = -(a+2)^2$,

所以 $M = -(a+2) = -a-2$,

故答案为: $-a-2$.

9. 将整式 $3qr - r^2 + \frac{4}{7}q^2r^3 - 13$ 按 r 升幂排列: _____.

【答案】 $-13 + 3qr - r^2 + \frac{4}{7}q^2r^3$

【解析】

【分析】 本题考查多项式, 根据含 r 的项中 r 的指数从低到高的顺序排列即可.

【详解】 解: 将整式 $3qr - r^2 + \frac{4}{7}q^2r^3 - 13$ 按 r 升幂排列为 $-13 + 3qr - r^2 + \frac{4}{7}q^2r^3$,

故答案为: $-13 + 3qr - r^2 + \frac{4}{7}q^2r^3$.

10. 计算: $\left(-\frac{1}{2}\right)^{2005} \times 2^{2004} =$ _____.

【答案】 $-\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了积的乘方的逆运算. 利用积的乘方的逆运算进行计算, 即可.

【详解】 解: $\left(-\frac{1}{2}\right)^{2005} \times 2^{2004}$

$= \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{2004} \times 2^{2004}$

$$= -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2} \times 2 \right)^{2004}$$

$$= -\frac{1}{2}.$$

故答案为： $-\frac{1}{2}$.

11. 计算： $(x-y)^3[(y-x)^4]^3 = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $(x-y)^{15}$

【解析】

【分析】 本题考查了同底数幂相乘，幂的乘方运算，先理解题意，整理得 $(y-x)^4 = (x-y)^4$ ，再把 $x-y$ 看作整体，再运算幂的乘方运算，然后运算同底数幂相乘，即可作答.

【详解】 解： $(x-y)^3[(y-x)^4]^3$

$$= (x-y)^3[(x-y)^4]^3$$

$$= (x-y)^3 \times (x-y)^{12}$$

$$= (x-y)^{15}$$

故答案为： $(x-y)^{15}$

12. 因式分解 $2(x-y)-3(y-x)^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $(x-y)(2-3x+3y)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了多项式的因式分解. 提出公因式 $(x-y)$ ，即可求解.

【详解】 解： $2(x-y)-3(y-x)^2$

$$= 2(x-y)-3(x-y)^2$$

$$= (x-y)[2-3(x-y)]$$

$$= (x-y)(2-3x+3y)$$

故答案为： $(x-y)(2-3x+3y).$

13. 已知二次三项式 $2x^2 - mx + 3$ 的一个因式是 $x+3$ ，则常数 $m = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 -7

【解析】

【分析】 本题考查了多项式乘多项式. 由于已知一个因式, 可设另一个因式为一次式, 通过因式分解与整式乘法的互逆关系, 比较系数求解, 据此进行分析, 即可作答.

【详解】 解: 依题意, 设另一个因式为 $ax+b$,

$$\text{则 } 2x^2 - mx + 3 = (x+3)(ax+b),$$

$$\text{展开右边: } (x+3)(ax+b) = ax^2 + bx + 3ax + 3b = ax^2 + (b+3a)x + 3b,$$

$$\text{则 } 2x^2 - mx + 3 = ax^2 + (b+3a)x + 3b,$$

$$\therefore a = 2, \quad 3b = 3,$$

$$\text{解得 } b = 1,$$

$$\text{则 } b + 3a = 1 + 3 \times 2 = 7,$$

$$\therefore -m = 7,$$

$$\text{故 } m = -7,$$

故答案为: -7 .

14. 已知关于 x 的整式 $(3x+m)$ 与 $(x-3)$ 的乘积中不含 x 的一次项, 则 m 的值为_____.

【答案】

9

【解析】

【分析】 本题主要考查了多项式乘法中的无关项问题, 根据多项式乘以多项式的计算法则求出 $(3x+m)(x-3)$ 的展开结果, 再根据关于 x 的代数式 $(3x+m)$ 与 $(x-3)$ 的乘积中不含 x 的一次项, 即含 x 的一次项的系数为 0 进行求解即可.

$$\text{【详解】 解: } (3x+m)(x-3)$$

$$= 3x^2 + mx - 9x - 3m$$

$$= 3x^2 + (m-9)x - 3m,$$

$$\because (3x+m) \text{ 与 } (x-3) \text{ 的乘积中不含 } x \text{ 的一次项,}$$

$$\therefore m-9=0,$$

$$\therefore m=9,$$

故答案为：9.

15. 已知 $a^2 - 3a + 1 = 0$ ，则 $a^2 + \frac{1}{a^2} =$ _____.

【答案】7

【解析】

【分析】本题主要考查完全平方公式的运用，两边都除以 a 构造出 a 与其倒数和是解题的关键，另外还要注意乘积的二倍不含字母非常的重要.

由已知方程变形得到 $a + \frac{1}{a} = 3$ ，再利用完全平方公式求值.

【详解】解： $\because a^2 - 3a + 1 = 0$ ，且 $a \neq 0$ ，

$\therefore a - 3 + \frac{1}{a} = 0$ ，即 $a + \frac{1}{a} = 3$ ，

$\therefore a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 = 3^2 - 2 = 9 - 2 = 7$.

故答案为：7

16. 请写出一个整式，使其同时满足以下条件：①该整式中只含有字母 x ；②该整式的次数为 5，项数为 3；③该整式不含二次项：_____.

【答案】 $x^5 + x + 1$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】本题考查了整式. 根据整式的定义和题目的要求写出即可.

【详解】解：这个整式可以是： $x^5 + x + 1$ ，

故答案为： $x^5 + x + 1$ (答案不唯一).

17. 已知 $A = 2x^2 + 4y^2 - 3xy - y + 6$ ， $B = x^2 - 3xy + 2y^2 + 2x + 3y$ ，则 A _____ B . (填 “>” “<” 或 “=”)

【答案】>

【解析】

【分析】本题主要考查了因式分解的应用. 通过计算 A 与 B 的差，并利用配方法判断差值的符号，即可.

【详解】解： $A - B = (2x^2 + 4y^2 - 3xy - y + 6) - (x^2 - 3xy + 2y^2 + 2x + 3y)$

$= 2x^2 + 4y^2 - 3xy - y + 6 - x^2 + 3xy - 2y^2 - 2x - 3y$

$= x^2 + 2y^2 - 2x - 4y + 6$

$$= x^2 - 2x + 1 + 2(y^2 - 2y + 1) + 1$$

$$= (x-1)^2 + 2(y-1)^2 + 3 \geq 3,$$

$\therefore A > B$.

故答案为: $>$.

18. 如图所示的“杨辉三角”告诉了我们二项式乘方展开式的系数规律, 如: 第三行的三个数 $(1, 2, 1)$, 恰好对应 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 展开式中各项的系数; 第四行的四个数恰好对应

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 的系数, 根据数表中前四行的数字所反映的规律计算:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^5 - 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 + 10 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 10 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 5 \times \frac{1}{3} - 1 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

1					
	1	1			
		2		1	
1	3	3	1		

$\dots\dots\dots (a+b)^1$
 $\dots\dots\dots (a+b)^2$
 $\dots\dots\dots (a+b)^3$

【答案】 $-\frac{32}{243}$

【解析】

【分析】 本题考查了整式的运算规律的探究, 以及“杨辉三角”的认识, 熟练掌握运算是解题的关键. 原式逆用“杨辉三角”系数规律变形, 计算即可得到结果.

【详解】 解: 根据题意可得:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{3}\right)^5 - 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 + 10 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 10 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 5 \times \frac{1}{3} - 1 \\ &= \left(\frac{1}{3} - 1\right)^5 \\ &= \left(-\frac{2}{3}\right)^5 \\ &= -\frac{32}{243}, \end{aligned}$$

故答案为: $-\frac{32}{243}$.

三、简答题 (本大题共 6 题, 每题 5 分, 满分 30 分)

19. 计算: $(-3x)^2 \cdot x^2 + (-x)^3 \cdot x + (-x)^4$

【答案】 $9x^4$

【解析】

【分析】 此题考查了幂的运算法则与合并同类项等知识，熟练掌握同底数幂的乘法、幂的乘方、积的乘方等运算法则是解答此题的关键.

根据同底数幂的乘法、幂的乘方、积的乘方化简，然后再合并同类项，即可得到答案.

$$\begin{aligned}\text{【详解】 解: } & (-3x)^2 \cdot x^2 + (-x)^3 \cdot x + (-x)^4 \\ &= 9x^2x^2 - x^3x + x^4 \\ &= 9x^4 - x^4 + x^4 \\ &= 9x^4.\end{aligned}$$

$$20. \text{ 计算: } xy\left(\frac{3}{4}x^3y - 6x^2y^3 + 3xy^4\right) \div (-3xy)^2$$

$$\text{【答案】 } \frac{1}{12}x^2 - \frac{2}{3}xy^2 + \frac{1}{3}y^3$$

【解析】

【分析】 此题考查了整式的混合运算. 先计算单项式乘以多项式和积的乘方，再计算多项式除以单项式即可.

$$\begin{aligned}\text{【详解】 解: } & xy\left(\frac{3}{4}x^3y - 6x^2y^3 + 3xy^4\right) \div (-3xy)^2 \\ &= \left(xy \cdot \frac{3}{4}x^3y - xy \cdot 6x^2y^3 + xy \cdot 3xy^4\right) \div (9x^2y^2) \\ &= \left(\frac{3}{4}x^4y^2 - 6x^3y^4 + 3x^2y^5\right) \div (9x^2y^2) \\ &= \frac{3}{4}x^4y^2 \div 9x^2y^2 - 6x^3y^4 \div 9x^2y^2 + 3x^2y^5 \div 9x^2y^2 \\ &= \frac{1}{12}x^2 - \frac{2}{3}xy^2 + \frac{1}{3}y^3\end{aligned}$$

$$21. \text{ 利用乘法公式计算: } 20^2 - 19\frac{3}{4} \times 20\frac{1}{4}$$

$$\text{【答案】 } \frac{1}{16}$$

【解析】

【分析】 本题考查了平方差公式，先整理原式 $= 20^2 - \left(20 - \frac{1}{4}\right) \times \left(20 + \frac{1}{4}\right)$ ，再运用平方差公式进行简便运算，即可作答.

【详解】 解： $20^2 - 19\frac{3}{4} \times 20\frac{1}{4}$

$$= 20^2 - \left(20 - \frac{1}{4}\right) \times \left(20 + \frac{1}{4}\right)$$
$$= 20^2 - \left[20^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right]$$
$$= 20^2 - 20^2 + \frac{1}{16}$$
$$= \frac{1}{16}.$$

22. 因式分解： $x^3 + 5x^2y - 24xy^2$

【答案】 $x(x-3y)(x+8y)$

【解析】

【分析】 本题考查因式分解，熟练掌握因式分解的几种方法是关键，先提公因式 x ，再进行十字相乘法因式分解.

【详解】 解： $x^3 + 5x^2y - 24xy^2$

$$= x(x^2 + 5xy - 24y^2)$$
$$= x(x-3y)(x+8y)$$

23. 因式分解： $9x^2 - y^2 + 2y - 1$

【答案】 $(3x - y + 1)(3x + y - 1)$

【解析】

【分析】 本题考查了利用分组分解法分解因式，涉及了完全平方公式、平方差公式，正确进行分组是解题的关键.

将 $9x^2 - y^2 + 2y - 1$ 分组为 $9x^2 - (y^2 - 2y + 1)$ ，然后利用完全平方公式及平方差公式进行分解即可.

【详解】 解： $9x^2 - y^2 + 2y - 1$

$$= 9x^2 - (y^2 - 2y + 1)$$

$$= 9x^2 - (y - 1)^2$$

$$= (3x - y + 1)(3x + y - 1)$$

24. 因式分解: $(x^2 - 4x)^2 + 7(x^2 - 4x) + 12$

【答案】 $(x - 1)(x - 2)^2(x - 3)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了多项式的因式分解. 先利用十字相乘法因式分解, 再利用完全平方公式进行因式分解, 即可.

【详解】 解: $(x^2 - 4x)^2 + 7(x^2 - 4x) + 12$

$$= (x^2 - 4x + 3)(x^2 - 4x + 4)$$

$$= (x - 1)(x - 3)(x - 2)^2$$

四、解答题 (本大题共 3 题, 每题 6 分, 满分 18 分)

25. 先化简, 再求值: $[(x + 2y)^2 - (x + y)(3x - y) - 5y^2] \div 2x$, 其中 $x = -2$, $y = \frac{1}{2}$

【答案】 $-x + y$, $\frac{5}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查整式的混合运算, 化简求值.

先根据完全平方公式, 多项式乘多项式进行计算, 再合并同类项, 最后计算除法, 化简后再代入求值即可.

【详解】 解: $[(x + 2y)^2 - (x + y)(3x - y) - 5y^2] \div 2x$

$$= [(x^2 + 4xy + 4y^2) - (3x^2 + 2xy - y^2) - 5y^2] \div 2x$$

$$= (x^2 + 4xy + 4y^2 - 3x^2 - 2xy + y^2 - 5y^2) \div 2x$$

$$= (-2x^2 + 2xy) \div 2x$$

$$= -x + y,$$

当 $x = -2$, $y = \frac{1}{2}$ 时,

$$\text{原式} = -(-2) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

26. (1) 已知 $2^m = 3$, $2^n = 5$, 求 2^{3m+2n} 值;

(2) 已知 $2x - 5y - 4 = 0$, x 、 y 为正整数, 求 $4^x \div 32^y$ 值.

【答案】(1) 675; (2) 16

【解析】

【分析】此题主要考查了同底数幂乘法的逆运算, 积的乘方, 同底数幂除法, 正确将原式变形是解题关键.

(1) 根据同底数幂乘法的逆运算, 积的乘方解答即可;

(2) 根据同底数幂除法, 积的乘方解答即可.

【详解】解: (1) $\because 2^m = 3$, $2^n = 5$,

$$\therefore 2^{3m+2n} = 2^{3m} \times 2^{2n} = (2^m)^3 \times (2^n)^2 = 3^3 \times 5^2 = 27 \times 25 = 675;$$

$$(2) 4^x \div 32^y = (2^2)^x \div (2^5)^y = 2^{2x} \div 2^{5y} = 2^{2x-5y},$$

$$\because 2x - 5y - 4 = 0,$$

$$\therefore 2x - 5y = 4,$$

$$\therefore \text{原式} = 2^4 = 16.$$

27. 如图 1 是一个长方形窗户 $ABCD$, 它是由上下两个长方形 (长方形 $AEFD$ 和长方形 $EBCF$) 的小窗户组成, 在这两个小窗户上各安装了一个可以朝一个方向水平方向拉伸的遮阳帘, 这两个遮阳帘的高度分别是 a 和 $2b$ (即 $DF = a$, $BE = 2b$), 且 $b > a > 0$. 当遮阳帘没有拉伸时 (如图 1), 窗户的透光面积就是整个长方形窗户 (长方形 $ABCD$) 的面积.

如图 2, 上面窗户的遮阳帘水平方向向左拉伸 $2a$ 至 GH . 当下面窗户的遮阳帘水平方向向右拉伸 $2b$ 时, 恰好与 GH 在同一直线上 (即点 G 、 H 、 P 在同一直线上).

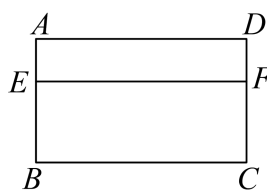


图1

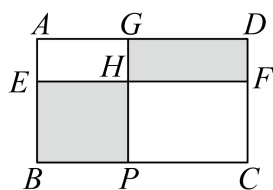


图2

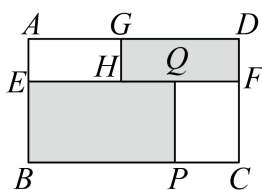


图3

(1) 求长方形窗户 $ABCD$ 的总面积; (用含 a 、 b 的代数式表示)

(2) 如图 3, 如果上面窗户的遮阳帘保持不动, 将下面窗户的遮阳帘继续水平方向向右拉伸 b 至 PQ 时, 求此时窗户透光的面积 (即图中空白部分的面积) 为多少? (用含 a 、 b 的代数式表示)

【答案】(1) $2a^2 + 6ab + 4b^2$

(2) $6ab - 2b^2$

【解析】

【分析】 本题考查了列代数式，多项式的乘法，整式的加减的应用，根据题意列出代数式是解题的关键.

(1) 根据题意求得长方形窗户的长为 $2a + 2b$ ，宽为 $a + 2b$ ，即可求得面积；

(2) 窗户透光的面积等于总面积减去遮阳帘的面积即可.

【小问 1 详解】

解：由题意可得， $AB = a + 2b$ ， $AD = 2a + 2b$ ，

$\therefore$ 长方形窗户 $ABCD$ 的总面积为 $(a + 2b)(2a + 2b) = 2a^2 + 6ab + 4b^2$ ；

【小问 2 详解】

上面窗户遮阳帘的面积为 $a \times 2a = 2a^2$ ，

下面窗户的遮阳帘的面积为 $2b \cdot (2b + b) = 6b^2$ ，

窗户透光的面积为 $2a^2 + 6ab + 4b^2 - 2a^2 - 6b^2 = 6ab - 2b^2$.

五、综合题 (本大题共 1 题，满分 10 分)

28. 【阅读材料】“数形结合”是一种非常重要的数学思想方法. 比如：在学习“整式的乘法”时，我们通过构造几何图形，用“等积法”直观地推导了完全平方和公式： $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (如图 1). 利用“数形结合”的思想方法，可以从代数角度解决图形问题，也可以用图形关系解决代数问题.

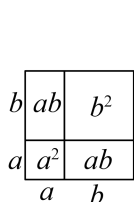


图 1

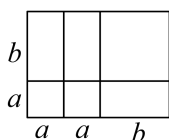


图 2

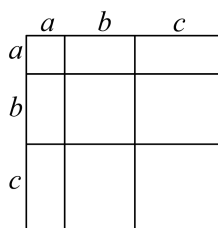


图 3

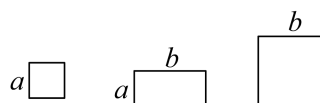


图 4

【方法应用】 根据以上材料提供的方法，完成下列问题：

(1) 由图 2 可得等式：_____；由图 3 可得等式：_____；

(2) 利用图 3 得到的结论，解决问题：若 $a + b + c = 15$ ， $ab + ac + bc = 35$ ，求 $a^2 + b^2 + c^2$ 的值；

(3) 如图 4，若用其中 x 张边长为 a 的正方形， y 张边长为 b 的正方形， z 张边长分别为 a 、 b 的长方形纸片拼出一个面积为 $(3a + b)(2a + 3b)$ 长方形 (无空隙、无重叠地拼接)，则 $x + 2y + 3z =$ _____；

(4) 如图 4，若有 3 张边长为 a 的正方形纸片，4 张边长分别为 a 、 b 的长方形纸片，5 张边长为 b 的正方

形纸片. 从中取出若干张纸片, 每种纸片至少取一张. 把取出的这些纸片拼成一个正方形 (无空隙、无重叠地拼接), 则拼成的正方形的边长最长可以为_____.

(5) 已知正数 a 、 b 、 c 和 m 、 n 、 l , 满足 $a+m=b+n=c+l=k$. 试通过构造边长为 k 的正方形, 利用图形面积来说明 $al+bm+cn < k^2$.

【答案】 (1) $(a+b)(2a+b)=2a^2+3ab+b^2$, $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$;

(2) 155

(3) 45

(4) $a+2b$

(5) 见解析

【解析】

【分析】 本题用“等积法”解决多项式乘积的代数问题, 渗透数形结合的思想, 用代数角度解决图形问题, 也可以用图形关系解决代数问题.

(1) 大长方形的面积 = 长 $\times$ 宽, 也等于图中多个小正方形和小长方形面积的和, 两种方法求得的大长方形的面积相等, 即“等积法”得到等式.

(2) 用 (1) 的结论变形后代入求值;

(3) 根据 $(3a+b)(2a+3b)=6a^2+11ab+3b^2$ 找到 x 、 y 、 z 对应的值, 代入求值;

(4) 通过分析, 找到可以拼成正方形的可能的情况, 然后找到正方形的边长最大;

(5) 通过构造边长为 k 的正方形, 用 3 个长方形的面积表示 $al+bm+cn$, 用面积直观地说明 $al+bm+cn < k^2$.

【小问 1 详解】

解: 由图 2 可得等式 $(a+b)(2a+b)=2a^2+3ab+b^2$,

由图 3 可得等式 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$,

故答案为: $(a+b)(2a+b)=2a^2+3ab+b^2$, $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$;

【小问 2 详解】

$\because a+b+c=15$, $ab+ac+bc=35$, $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$,

$\therefore a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)=15^2-2\times 35=155$;

【小问 3 详解】

$$\therefore (3a+b)(2a+3b) = 6a^2 + 11ab + 3b^2,$$

$\therefore$ 长方形可以看成 6 张边长为 a 的正方形, 3 张边长为 b 的正方形, 11 张边长分别为 a 、 b 的长方形纸片拼成的大长方形,

$$\therefore x = 6, \quad y = 3, \quad z = 11,$$

$$\therefore x + 2y + 3z = 6 + 2 \times 3 + 3 \times 11 = 45;$$

故答案为: 45;

【小问 4 详解】

$\therefore$ 想从中取出若干张纸片拼成一个正方形 (无空隙、无重叠地拼接),

$\therefore$ 选取的纸片的面积和必须构成完全平方式,

$\therefore$ 可以选取 1 张边长为 a 的正方形纸片、2 张边长分别为 a 、 b 的长方形纸片、1 张边长为 b 的正方形纸片,

此时围成的正方形面积为 $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$,

$\therefore$ 此时正方形的边长为 $a+b$;

选取 1 张边长为 a 的正方形纸片、4 张边长分别为 a 、 b 的长方形纸片、4 张边长为 b 的正方形纸片, 此时

围成的正方形面积为 $a^2 + 4ab + 4b^2 = (a+2b)^2$,

$\therefore$ 此时正方形的边长为 $a+2b$,

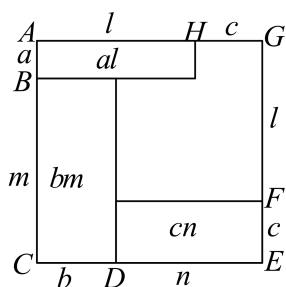
$$\therefore a+b < a+2b,$$

$\therefore$ 拼成的正方形的边长最长为 $a+2b$,

故答案为: $a+2b$;

【小问 5 详解】

如图,



构造了一个边长为 k 的正方形, $AC = CE = EG = AG = k$,

在正方形的 4 个边上分别截取 $AB = a$, $CD = b$, $EF = HG = c$,

$$\therefore a + m = b + n = c + l = k,$$

$$\therefore BC = m, \quad DE = n, \quad FG = l, \quad AH = l,$$

$\therefore$ 3 个长方形的面积和为 $al + bm + cn$ ，大正方形的面积为 k^2 ，

$\therefore al + bm + cn < k^2$.