

上海民办华曜宝山实验学校 2025 学年度第一学期七年级数学学科期中 练习

(练习时间: 90 分钟)

一、选择题 (每题 3 分, 共 15 分)

1. 下列说法中, 正确的是 ()

- A. 0 不是整式
B. $3abc$ 与 bac 不是同类项
C. 单项式 $-\pi x^2 y^2$ 的系数是 -1, 次数是 4
D. $3x^2 - y + 5xy^2$ 是三次三项式

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题主要考查单项式、多项式、整式、同类项的定义, 熟练掌握以上相关概念是关键.
分别根据单项式、多项式、整式及同类项的定义逐项判定即可.

- 【详解】 解: A. 0 是整式, 故说法错误, 不符合题意;
B. $3abc$ 与 bac 是同类项, 故说法错误, 不符合题意;
C. 单项式 $-\pi x^2 y^2$ 的系数是 $-\pi$, 次数是 4, 故说法错误, 不符合题意;
D. $3x^2 - y + 5xy^2$ 是三次三项式, 故说法正确, 符合题意.

故选: D.

2. 下列等式中, 从左到右的变形是因式分解的是 ()

- A. $3abc^3 = 3c \cdot abc^2$
B. $x^2 - 1 = x(x - \frac{1}{x})$
C. $4t^2 - 9 = (2t + 3)(2t - 3)$
D. $x^2 - 16 + 6x = (x + 4)(x - 4) + 6x$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解的定义, 因式分解是指将一个多项式转化为几个整式 (单项式或多项式) 的乘积形式的变形过程. 根据因式分解的定义逐项判断即可.

- 【详解】 解: A、 $3abc^3$ 是单项式, 故 $3abc^3 = 3c \cdot abc^2$ 不是因式分解, 不符合题意;
B、 $x^2 - 1 = x(x - \frac{1}{x})$ 中 $\frac{1}{x}$ 不是整式, 故不是因式分解, 不符合题意;
C、 $4t^2 - 9 = (2t + 3)(2t - 3)$ 是因式分解, 符合题意;

D、 $x^2 - 16 + 6x = (x + 4)(x - 4) + 6x$ ，等式右边不是整式的乘积，故不是因式分解，不符合题意.

故选：C.

3. 下列计算正确的是 ()

A. $a^2 + a^2 = 2a^4$ B. $2ab^2 \cdot ab^2 = 2a^2b^4$ C. $6a^4 \div 2a^2 = 4a^2$ D. $(a^2b^3)^{-2} = -a^4b^6$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查整式的混合运算及负指数幂，解题的关键是熟练运用整式的加减运算、乘除运算以及积的乘方运算，本题属于基础题型. 根据整式的加减运算、乘除运算以及积的乘方运算即可求出答案.

【详解】解：A、 $a^2 + a^2 = 2a^2$ ，故 A 不符合题意.

B、 $2ab^2 \cdot ab^2 = 2a^2b^4$ ，故 B 符合题意.

C、 $6a^4 \div 2a^2 = 3a^2$ ，故 C 不符合题意.

D、 $(a^2b^3)^{-2} = a^{-4}b^{-6}$ ，故 D 不符合题意.

故选：B.

4. 已知 $M = 6xy - x^2$, $N = y^2 + 4xy$ ，则对于任意 x, y 的取值， M, N 的大小关系为 ().

A. $M \leq N$ B. $M \geq N$ C. $M = N$ D. 无法判断

【答案】A

【解析】

【分析】该题考查了整式的加减，先算出 $M - N$ ，根据平方的非负性得出 $-(x - y)^2 \leq 0$ ，即可得 $M \leq N$.

【详解】解： $M - N = 6xy - x^2 - (y^2 + 4xy)$

$$= 6xy - x^2 - y^2 - 4xy$$

$$= 2xy - x^2 - y^2$$

$$= -(x^2 - 2xy + y^2)$$

$$= -(x - y)^2 \leq 0,$$

$$\therefore M \leq N,$$

故选：A.

5. 设 $\frac{ab}{a+b}=2$, $\frac{bc}{b+c}=6$, $\frac{ca}{c+a}=12$, 则 $\frac{abc}{ab+bc+ca}$ 值为 ()

A. $\frac{4}{3}$

B. $\frac{8}{3}$

C. $\frac{3}{8}$

D. $\frac{3}{4}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题主要考查了分式的化简求值, 通过取已知等式的倒数, 得到关于 $\frac{1}{a}$ 、 $\frac{1}{b}$ 、 $\frac{1}{c}$ 的方程组, 求和后得到它们的和, 再求倒数即得所求.

【详解】 解: $\because \frac{ab}{a+b}=2$,

$$\therefore \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2},$$

$$\because \frac{bc}{b+c}=6,$$

$$\therefore \frac{b+c}{bc} = \frac{1}{6},$$

$$\text{即 } \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{6},$$

$$\because \frac{ca}{c+a}=12,$$

$$\therefore \frac{c+a}{ca} = \frac{1}{12},$$

$$\text{即 } \frac{1}{c} + \frac{1}{a} = \frac{1}{12},$$

$$\therefore \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12},$$

$$\text{即 } 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{6}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{8}$$

$$\text{又 } \because \frac{abc}{ab+bc+ca} = \frac{1}{\frac{ab+bc+ca}{abc}} = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}},$$

$$\therefore \frac{abc}{ab+bc+ca} = \frac{1}{\frac{3}{8}} = \frac{8}{3}.$$

故选: B.

二、填空题 (每题 2 分, 共 30 分)

6. 若分式 $\frac{1}{x}$ 有意义, 则 x 满足的条件是_____.

【答案】 $x \neq 0$

【解析】

【分析】 根据分式有意义的条件: 分母不为 0 解答即可.

【详解】 解: 若分式 $\frac{1}{x}$ 有意义, 则 x 满足的条件是 $x \neq 0$;

故答案为: $x \neq 0$.

【点睛】 本题考查了分式有意义的条件, 属于应知应会题型, 熟知分式的分母不为 0 是关键.

7. 把多项式 $x^4 + 3x^3y^2 - 2x^2y + 4y^3$ 按字母 y 作降幂排列是_____.

【答案】 $4y^3 + 3x^3y^2 - 2x^2y + x^4$

【解析】

【分析】 本题主要考查了多项式的降幂排列, 熟练掌握确定各项中指定字母的指数并按从高到低顺序排列是解题的关键. 先确定多项式中每一项 y 的指数, 然后依据指数大小从高到低重新排列各项.

【详解】 解: $x^4 + 3x^3y^2 - 2x^2y + 4y^3$

$$= 4y^3 + 3x^3y^2 - 2x^2y + x^4,$$

故答案为: $4y^3 + 3x^3y^2 - 2x^2y + x^4$.

8. 如果 x^3y^m 与 $-4x^{-n}y$ 是同类项, 那么 $n^2 - m =$ _____.

【答案】 8

【解析】

【分析】 本题考查了同类项的定义, 关键要注意同类项定义中的两个“相同”: 所含字母相同, 相同字母的指数相同.

同类项的定义, 所含字母相同, 相同字母的指数也相同的项叫做同类项, 由同类项的定义可先求得 m 和 n 的值, 再代入所求式子计算即可.

【详解】 解: $\because$ 单项式 x^3y^m 与 $-4x^{-n}y$ 是同类项,

$$\therefore m = 1, -n = 3,$$

$$\text{解得 } m = 1, n = -3,$$

$$\therefore n^2 - m = (-3)^2 - 1 = 8,$$

故答案为：8.

9. 若分式 $\frac{x^2-4}{x+2}$ 的值为 0，则 x 的值是_____.

【答案】2

【解析】

【分析】本题考查了分式的值为零的条件：分式的分母不为零，分子为零．根据分式的值为零的条件得：

$x^2-4=0$ 且 $x+2 \neq 0$ ，即可求解．

【详解】解：根据分式的值为零的条件得： $x^2-4=0$ 且 $x+2 \neq 0$ ，

解得： $x=2$ ．

故答案为：2.

10. 计算： $\left(\frac{1}{3}\right)^{2025} \times 12^{2025} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{2027} =$ _____.

【答案】 $-\frac{1}{16}$ 或 -0.0625

【解析】

【分析】本题考查的是积的乘方的逆运算，同底数幂的乘法的逆运算，通过指数运算性质，先计算并前两项为 4^{2025} ，再与第三项结合，利用指数法则化简．

【详解】解：
$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{3}\right)^{2025} \times 12^{2025} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{2027} \\ &= \left(\frac{1}{3} \times 12\right)^{2025} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{2027} \\ &= 4^{2025} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{2027} \\ &= 4^{2025} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{2025} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \\ &= \left[4 \times \left(-\frac{1}{4}\right)\right]^{2025} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \\ &= (-1)^{2025} \times \left(\frac{1}{16}\right) \\ &= -1 \times \frac{1}{16} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{16}$$

故答案为 $-\frac{1}{16}$.

11. 因式分解: $a^2 + 3b - ab - 3a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $(a-3)(a-b)$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解—分组分解法、提公因式法，正确找出可提取的公因式是解题关键.

利用分组分解法，将原式重新组合为 $(a^2 - 3a) + (3b - ab)$ ，再进行因式分解，前两项提公因式 a ，后两项提公因式 $-b$ ，再应用提公因式法分解即可.

【详解】 解: $a^2 + 3b - ab - 3a$

$$= (a^2 - 3a) + (3b - ab)$$

$$= a(a-3) - b(a-3)$$

$$= (a-3)(a-b)$$

故答案为: $(a-3)(a-b)$

12. $1.23 \times 51^2 - 1.23 \times 49^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 246

【解析】

【分析】 本题考查利用平方差公式进行简算，逆用乘法分配律和平方差公式进行计算即可.

【详解】 解: 原式 $= 1.23 \times (51^2 - 49^2) = 1.23 \times (51 + 49) \times (51 - 49) = 1.23 \times 100 \times 2 = 246$;

故答案为: 246

13. 若分式 $\frac{x^2 + y^2}{xy}$ 的值为 3，将 x ， y 都扩大 2 倍，则变化后分式的值为_____.

【答案】 3

【解析】

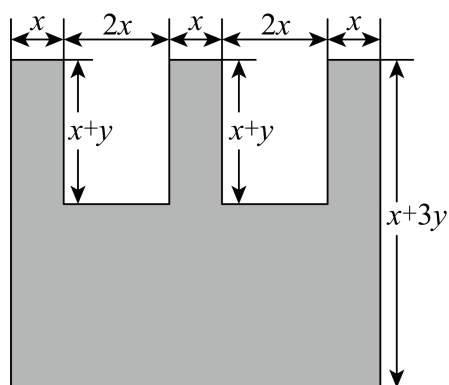
【分析】 本题考查了分式的基本性质，熟练掌握分式的基本性质是解题的关键. 根据分式的基本性质进行计算，即可解答.

【详解】解：因为 $\frac{x^2 + y^2}{xy} = 3$,

$$\text{所以 } \frac{(2x)^2 + (2y)^2}{2x \cdot 2y} = \frac{4x^2 + 4y^2}{4xy} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = 3,$$

故答案为：3.

14. 如图是某一工件横截面的形状，由图中标数据可知，该工件横截面的面积为_____.

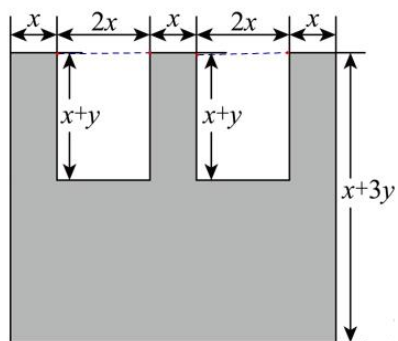


【答案】 $3x^2 + 17xy$

【解析】

【分析】 本题考查列代数式及整式混合运算，数形结合表示出工件横截面的面积代数式是解决问题的关键. 可将题图补全，变成一个大长方形，则题图中阴影部分的面积等于大长方形的面积减去两个小长方形的面积，再由整式混合运算法则化简即可得到答案.

【详解】解：如图所示，



该工件横截面的面积为

$$(3x + 2 \times 2x)(x + 3y) - (x + y) \times 2x \times 2$$

$$= 7x(x + 3y) - 4x(x + y)$$

$$= 7x^2 + 21xy - 4x^2 - 4xy$$

$$= 3x^2 + 17xy,$$

故答案为: $3x^2 + 17xy$.

15. 已知 $6x - 5y - 3 = 0$, 则 $\left[(2x - y)(2x + y) - (2x - 3y)^2 \right] \div y$ 的值为_____.

【答案】 6

【解析】

【分析】本题考查了整式的混合运算, 已知式子的值求代数式的值, 正确掌握相关性质内容是解题的关键. 先运算完全平方公式以及平方差公式, 再合并同类项, 最后运算除法, 得出 $12x - 10y$, 又因为 $6x - 5y - 3 = 0$, 得出 $6x - 5y = 3$, 然后代入进行计算, 即可作答.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: } & \left[(2x - y)(2x + y) - (2x - 3y)^2 \right] \div y \\ &= \left[(4x^2 - y^2) - (4x^2 - 12xy + 9y^2) \right] \div y \\ &= (12xy - 10y^2) \div y \\ &= 12x - 10y, \end{aligned}$$

$$\because 6x - 5y - 3 = 0,$$

$$\therefore 6x - 5y = 3$$

$$\text{则 } 12x - 10y = 2(6x - 5y) = 2 \times 3 = 6,$$

故答案为: 6.

16. 若 $9x^2 - (m - 2)xy + y^2$ 是完全平方式, 则 m 的值是_____.

【答案】 -4 或 8

【解析】

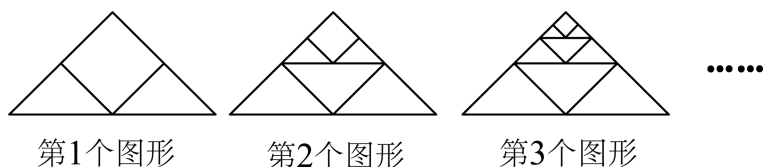
【分析】本题主要考查完全平方式的概念, 掌握完全平方式的形式特点是解题的关键. 根据完全平方式的定义, 可得 $-(m - 2) = \pm 2 \times 3$, 即可求出 m 的值.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: } & \because 9x^2 - (m - 2)xy + y^2 = (3x)^2 \pm 2 \times 3xy + y^2, \\ & \therefore -(m - 2) = \pm 2 \times 3, \end{aligned}$$

解得 $m = -4$ 或 8 ,

故答案为: -4 或 8 .

17. 观察下列图形它们是按一定规律构造的，依照此规律，第 50 个图形中共有_____个三角形.



【答案】 199

【解析】

【分析】 本题考查了探究规律—图形类，找出规律是解题的关键. 第 n 个图形有 $3 + (n-1) \times 4$ 个三角形，据此即可求解.

【详解】 解：第 1 个图形有 3 个三角形，

第 2 个图形有 $3 + (2-1) \times 4 = 7$ 个三角形，

第 3 个图形有 $3 + (3-1) \times 4 = 11$ 个三角形，

第 n 个图形有 $3 + (n-1) \times 4$ 个三角形，

则第 50 个图形中共有 $3 + (50-1) \times 4 = 199$ 个三角形，

故答案为：199.

18. 甲乙两人完成因式分解 $x^2 + ax + b$ 时，甲看错了 a 的值，分解的结果是 $(x+8)(x-6)$ ，乙看错了 b 的值，分解的结果为 $(x-6)(x-2)$ ，那么 $x^2 + ax + b$ 分解因式正确的结果为_____.

【答案】 $(x-12)(x+4)$

【解析】

【分析】 本题考查了实数范围内分解因式，熟练掌握因式分解的方法是解题的关键.

分解因式时指将一个多项式在实数范围内分解成几个因式的积的形式，该题运用十字相乘的方法，甲看错了 a 的值，这意味着 b 等于甲分解的两个因式乘积的常数项，而乙看错了 b 的值，这意味着 a 等于乙分解的两个因式乘积的一次项系数，据此得到正确的分解因式的结果.

【详解】 解：甲乙完成因式分解 $x^2 + ax + b$ 时，

甲看错了 a 的值，分解的结果是 $(x+8)(x-6)$ ，

那么 $b = 8 \times (-6) = -48$ ，

而乙看错了 b 的值，分解的结果为 $(x-6)(x-2)$ ，

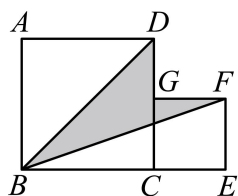
那么 $a = -2 + (-6) = -8$,

因此原来的二次三项式为 $x^2 - 8x - 48$,

因式分解为 $x^2 - 8x - 48 = (x - 12)(x + 4)$.

故答案为: $(x - 12)(x + 4)$.

19. 如图, 正方形 $ABCD$ 与正方形 $CEFG$ 的边长分别为 a, b , 若 $\triangle BCG$ 的面积为 4, 阴影部分的面积为 38, 则 $a + b =$ _____.



【答案】 10

【解析】

【分析】 本题考查了完全平方公式, 熟练掌握完全平方公式是解题的关键. 先根据三角形的面积得出 $ab = 8$, 再根据阴影部分的面积为 $a^2 + b^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b(a + b) = 38$, 求出 $a^2 + b^2 - ab = 76$, 根据完全平方公式变形为 $(a + b)^2 - 2ab - ab = 76$, 求出 $(a + b)^2 = 100$, 进而可得出答案.

【详解】 解: $\because$ 正方形 $ABCD$ 与正方形 $CEFG$ 的边长分别为 a, b , $\triangle BCG$ 的面积为 4,

$$\therefore \frac{1}{2}ab = 4,$$

$$\therefore ab = 8,$$

$$\therefore \text{阴影部分的面积为 } a^2 + b^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b(a + b) = 38,$$

$$\therefore \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - ab) = 38,$$

$$\therefore a^2 + b^2 - ab = 76,$$

$$\therefore (a + b)^2 - 2ab - ab = 76,$$

$$\therefore (a + b)^2 = 100,$$

$$\therefore a > 0, b > 0,$$

$$\therefore a + b = 10,$$

故答案为: 10.

20. 已知: a, b, c 都是正整数, 且 $a + b + c = 342$, $a - bc = 331$. abc 的最大值为 M , 最小值为 N , 则

$$M + N = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 3702

【解析】

【分析】由已知条件整理出 $b + c + bc = 11$ ，再利用因式分解法转化为求 $(b+1)(c+1) = 12$ 的正整数解，据此得到 $\begin{cases} b=1 \\ c=5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} b=2 \\ c=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} b=3 \\ c=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} b=5 \\ c=1 \end{cases}$ ，据此解得 a 的值，最后代入计算即可.

【详解】解： $\because a + b + c = 342$ ，
 $\therefore a = 342 - b - c$ ，
 $\because a - bc = 331$ ，
 $\therefore 342 - b - c - bc = 331$ ，
 $\therefore b + c + bc = 11$ ，
 $\therefore b + c + bc + 1 = 12$ ，
 $\therefore (b+1)(c+1) = 12$ ，
 $\because a, b, c$ 都是正整数，
 $\therefore \begin{cases} b=1 \\ c=5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} b=2 \\ c=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} b=3 \\ c=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} b=5 \\ c=1 \end{cases}$ ，
 $\therefore a = 336, b=1, c=5$ 或 $a = 336, b=5, c=1$ 或 $a = 337, b=2, c=3$ 或 $a = 337, b=3, c=2$ ，
 $\therefore abc=1680$ 或 $abc=2022$ ，
 即 abc 的最大值为 2022，最小值为 1680，即 $M = 2022, m = 1680$ ，
 $\therefore M + N = 2022 + 1680 = 3702$ ，
 故答案为： 3702.

【点睛】本题考查因式分解法、二元一次方程组的整数解等知识，是重要考点，掌握相关知识是解题关键.

三、简答题（每题 5 分，共 25 分）

21. 计算： $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - (-1)^{2025} - (3-\pi)^0 + (-2)^{-2}$.

【答案】 $\frac{13}{4}$

【解析】

【分析】本题主要考查零次幂及负指数幂，熟练掌握零次幂及负指数幂是解题的关键.

根据乘方运算、零次幂及负指数幂进行求解即可.

$$\begin{aligned}\text{【详解】原式} &= 3 - (-1) - 1 + \frac{1}{4} \\ &= 4 - 1 + \frac{1}{4} \\ &= 3 + \frac{1}{4} \\ &= \frac{13}{4}\end{aligned}$$

22. 计算: $(a+2b-3)(a-2b+3)$.

【答案】

$$a^2 - 4b^2 + 12b - 9$$

【解析】

【分析】 本题主要考查整式的混合运算, 乘法公式的运用, 掌握以上知识是关键.

根据题意将原式变形为 $[a+(2b-3)][a-(2b-3)]$, 运用平方差公式, 结合整式的混合运算法则计算即可.

$$\begin{aligned}\text{【详解】解: } &(a+2b-3)(a-2b+3) \\ &= [a+(2b-3)][a-(2b-3)] \\ &= a^2 - (2b-3)^2 \\ &= a^2 - (4b^2 - 12b + 9) \\ &= a^2 - 4b^2 + 12b - 9.\end{aligned}$$

23. 因式分解: $x^2 - 3xy - 10y^2$.

【答案】 $(x-5y)(x+2y)$

【解析】

【分析】 此题考查因式分解的十字相乘法, 将二次三项式分解为两个一次二项式的乘积; 十字相乘法的关键是熟练的“拆两头, 凑中间”; 在 $x^2 - 3xy - 10y^2$ 中, 准确找到两个合适的数, 使得它们的和等于中间项 xy 的系数为 -3 , 它们的积等于首项 x^2 的系数和末项 y^2 的系数的乘积, 所以需要两个数, 它们的积为 $1 \times (-10) = -10$, 它们的和为 -3 , 这两个数为 -5 和 2 , 再进行因式分解即可.

【详解】 根据分析, 使用十字相乘法得:

$$\begin{aligned}
 & x^2 - 3xy - 10y^2 \\
 &= x^2 - 5xy + 2xy - 10y^2 \\
 &= x(x - 5y) + 2y(x - 5y) \\
 &= (x - 5y)(x + 2y)
 \end{aligned}$$

24. 解方程: $\frac{4}{x-3} = \frac{1}{3-x} + 2$.

【答案】 $x = \frac{11}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程的求解，准确的计算是解决本题的关键.

先去分母，再去括号，最后移项和系数化为 1 即可求出解，并对解进行检验.

【详解】 解: $\frac{4}{x-3} = \frac{1}{3-x} + 2$

$$4 = -1 + 2(x - 3)$$

$$4 = -1 + 2x - 6$$

$$-2x = -11$$

解得 $x = \frac{11}{2}$,

检验: 当 $x = \frac{11}{2}$ 时, $x - 3 = \frac{11}{2} - 3 = \frac{5}{2} \neq 0$, 所以原方程的解是 $x = \frac{11}{2}$.

25. 先化简 $\left(\frac{x^2}{x-1} - x - 1\right) \div \frac{x+1}{x^2-2x+1}$, 然后再从 $-2 < x < 2$ 的范围内取一个合适的整数作为 x 的值代入求值.

【答案】 $\frac{x-1}{x+1}$, -1 .

【解析】

【分析】 本题考查了分式的化简求值，熟练掌握运算法则是解题的关键.

根据分式的加减运算以及乘除运算进行化简，然后将有意义的 x 值代入原式即可求出答案.

【详解】 解: $\left(\frac{x^2}{x-1} - x - 1\right) \div \frac{x+1}{x^2-2x+1}$

$$= \left[\frac{x^2}{x-1} - \frac{(x+1)(x-1)}{x-1}\right] \div \frac{x+1}{(x-1)^2}$$

$$= \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2-1}{x-1} \right) \times \frac{(x-1)^2}{x+1}$$

$$= \frac{x^2 - x^2 + 1}{x-1} \times \frac{(x-1)^2}{x+1}$$

$$= \frac{1}{x-1} \times \frac{(x-1)^2}{x+1}$$

$$= \frac{x-1}{x+1},$$

$$\because -2 < x < 2,$$

$\therefore$ 整数 x 的值为 $-1, 0, 1$,

$$\because x \neq \pm 1,$$

$$\therefore x = 0,$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{0-1}{0+1} = -1.$$

四、解答题 (26 题 6 分, 27 题 6 分, 28 题 8 分, 29 题 10 分, 共 30 分)

26. 已知 $(a+b)^2 = 9$, $(a-b)^2 = 1$. 求 $(a+1)(b+1)(a-1)(b-1)$ 的值.

【答案】 0

【解析】

【分析】 本题考查多项式乘以多项式, 完全平方公式, 平方差公式, 熟练掌握相关公式的计算是解题的关键;

将两个完全平方公式展开, 整理可得 $ab = 2$, $a^2 + b^2 = 5$, 整理原式代入即可求解;

【详解】 解: $\because (a+b)^2 = 9$, $(a-b)^2 = 1$,

$$\therefore a^2 + 2ab + b^2 = 9 \text{ ①}, \quad a^2 - 2ab + b^2 = 1 \text{ ②},$$

$$\text{①} - \text{②} \text{ 得: } 4ab = 8,$$

$$\text{则 } ab = 2,$$

$$\text{①} + \text{②} \text{ 得: } 2a^2 + 2b^2 = 10,$$

$$\text{则 } a^2 + b^2 = 5,$$

$$\text{那么 } (a+1)(b+1)(a-1)(b-1)$$

$$= (a+1)(a-1)(b+1)(b-1)$$

$$\begin{aligned}
&= (a^2 - 1)(b^2 - 1) \\
&= a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1 \\
&= (ab)^2 - (a^2 + b^2) + 1 \\
&= 2^2 - 5 + 1 \\
&= 4 - 5 + 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

27. 已知关于 x 的方程 $\frac{m}{x-2} + \frac{1}{x-1} = \frac{2m-2}{x^2-3x+2}$, 若方程无解, 求 m 的值.

【答案】

m 的值为 -1 或 2 或 $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查解分式方程, 掌握解分式方程的方法, 理解分式方程无解的含义是解题的关键.
分式方程无解有两种情况: 一是化简后的整式方程无解; 二是整式方程的解是原方程的增根 (使分母为零), 首先将原方程化为整式方程, 再讨论这些情况.

【详解】 解: $\frac{m}{x-2} + \frac{1}{x-1} = \frac{2m-2}{x^2-3x+2}$,

整理得, $\frac{m}{x-2} + \frac{1}{x-1} = \frac{2m-2}{(x-2)(x-1)}$,

方程两边同时乘以 $(x-2)(x-1)$ 去分母得, $m(x-1) + (x-2) = 2m-2$,

去括号得, $mx - m + x - 2 = 2m - 2$,

移项得, $(m+1)x = 3m$,

分式方程无解时:

$\therefore$ 当整式方程无解, 即 $m+1=0$ 且 $3m \neq 0$,

解得 $m = -1$;

$\therefore$ 当整式方程有解但解为增根, 即解使分母为零,

$\therefore$ 当 $x = 2$, 代入整式方程得 $(m+1) \cdot 2 = 3m$, 即 $2m + 2 = 3m$,

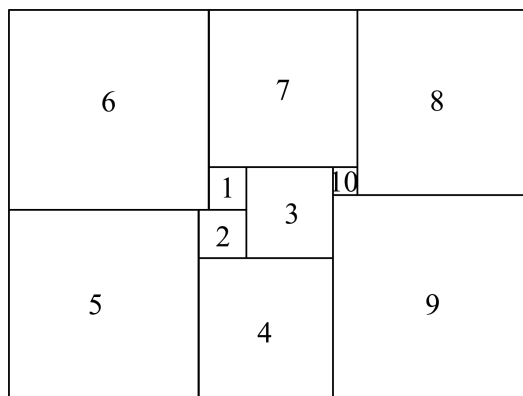
解得 $m = 2$;

当 $x = 1$, 代入整式方程得 $(m+1) \cdot 1 = 3m$, 即 $m + 1 = 3m$,

解得 $m = \frac{1}{2}$;

∴ 综上, 当 $m = -1$ 或 $m = 2$ 或 $m = \frac{1}{2}$ 时, 分式方程无解.

28. 【图形赏析】1925年数学家莫伦发现了世界上第一个完美长方形, 它恰能被分割成10个大小不同的正方形, 如图所示, 其中标注为1号和2号的正方形边长分别为 x , y .



【初步探究】

- (1) 请直接用含 x , y 的代数式表示 3 号正方形边长和 4 号正方形的边长;
- (2) 直接用含 x , y 的代数式表示大长方形的宽 (写出一种即可)

【深入思考】

(3) 萧萧非常喜欢完美长方形的图案, 他打算用掐丝珐琅的工艺制作一个完美长方形的作品. (用柔软的铜丝弯出完美长方形的图案, 再填入不同颜色的珐琅釉料, 最后高温烧制打磨) 萧萧先绘制了一个完美长方形 (如图), 量得1号正方形边长 x 为 5cm , 2号正方形边长 y 为 6cm . 请同学们帮助萧萧计算一下制作这个图案需要多长的铜丝 (接头忽略不计).

【答案】(1) $x + y$, $x + 2y$; (2) $x + 7y$; (3) 224cm .

【解析】

【分析】本题主要考查了列代数式和长方形周长的计算, 熟练掌握正方形边长的关系和长方形周长公式是解题的关键.

- (1) 通过观察正方形的边长关系, 利用相邻正方形边长的和差来表示 3 号和 4 号正方形的边长;
- (2) 分析大长方形宽的组成, 通过正方形边长的组合来表示;
- (3) 先根据 x 、 y 的值求出各个正方形的边长, 再确定大长方形的长和宽, 最后根据长方形周长公式计算铜丝长度.

【详解】解: (1) ∵ 3 号正方形的边长是 1 号和 2 号正方形边长之和,
∴ 3 号正方形边长为 $x + y$,

$\therefore$ 4 号正方形的边长是 2 号正方形边长与 3 号正方形边长之和,

$\therefore$ 4 号正方形边长为 $y + (x + y) = x + 2y$;

(2) 大长方形的宽可以表示为 5 号正方形边长与 6 号正方形边长之和, 5 号正方形边长为 $y + (x + 2y) = x + 3y$, 6 号正方形边长为 $(x + 3y) + (y - x) = 4y$,

故宽为 $(x + 3y) + 4y = x + 7y$;

(3) 当 $x = 5$, $y = 6$ 时,

3 号正方形边长: $5 + 6 = 11$,

4 号正方形边长: $11 + 6 = 17$,

5 号正方形边长: $17 + 6 = 23$,

6 号正方形边长: $23 + (6 - 5) = 24$,

7 号正方形边长: $24 - 5 = 19$,

10 号正方形边长: $19 - 5 - 11 = 3$

8 号正方形边长: $19 + 3 = 22$,

9 号正方形边长: $22 + 3 = 25$,

大长方形的长: $23 + 17 + 25 = 65$,

大长方形的宽: $23 + 24 = 47$,

所以这个图案需要多长的铜丝: $2 \times (65 + 47) = 2 \times 112 = 224$ (cm).

29. [项目学习]配方法是数学中重要的一种思想方法.它是指将一个式子的某部分通过恒等变形化为完全平方或几个完全平方式的和的方法,这种方法常被用到代数式的变形中,并结合非负数的意义来解决一些问题.

例如,把二次三项式 $x^2 - 2x + 3$ 进行配方.

解: $x^2 - 2x + 3 = x^2 - 2x + 1 + 2 = (x^2 - 2x + 1) + 2 = (x - 1)^2 + 2$.

我们定义:一个整数能表示成 $a^2 + b^2$ (a, b 是整数)的形式,即两个数的平方和形式,则称这个数为“雅美数”例如,5 是“雅美数”.理由:因为 $5 = 2^2 + 1^2$.再如, $M = x^2 + 2xy + 2y^2 = (x + y)^2 + y^2$ (x, y 是整数),所以 M 也是“雅美数”.

(1) [问题解决]4, 6, 7, 8 四个数中的“雅美数”是_____.

(2) 若二次三项式 $x^2 - 6x + 13$ (x 是整数) 是“雅美数”，可配方成 $(x - m)^2 + n$ (m, n 为常数)，则 mn 的值为_____；

(3) [问题探究] 已知 $S = x^2 + 4y^2 + 8x - 12y + k$ (x, y 是整数, k 是常数且 $x \neq -4, y \neq \frac{3}{2}$)，要使 S 为“雅美数”，试求出符合条件的 k 值.

(4) [问题拓展] 已知实数 M, N 是“雅美数”，求证: $M \cdot N$ 是“雅美数”.

【答案】 (1) 4, 8 (2) 12

(3) $k = 25$

(4) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 根据“雅美数”的定义判断即可；

(2) 利用配方法进行转化，然后求得对应系数的值；

(3) 配方后根据非负数的性质可得 x, y 的值，进行计算即可；

(4) 利用完全平方公式把原式变形，根据“雅美数”的定义证明结论.

【小问 1 详解】

4 是“雅美数”，理由：因为 $4 = 2^2 + 0^2$ ；

8 是“雅美数”，理由：因为 $8 = 2^2 + 2^2$.

故答案为：4, 8；

【小问 2 详解】

$$\because x^2 - 6x + 13 = x^2 - 6x + 9 + 4 = (x - 3)^2 + 2^2,$$

$$\therefore m = 3, n = 4,$$

$$\therefore mn = 12,$$

故答案为：12；

【小问 3 详解】

$$S = x^2 + 4y^2 + 8x - 12y + k = (x + 4)^2 + (2y - 3)^2 + k - 25$$

$$\text{又} \because x \neq -4, y \neq \frac{3}{2}$$

$$\therefore (x + 4)^2 \neq 0, (2y - 3)^2 \neq 0$$

$$\therefore k - 25 = 0,$$

$\therefore k = 25$;

【小问 4 详解】

因为 M ， N 为“雅美数”，则令 $M = a^2 + b^2$ ， $N = c^2 + d^2$ (a ， b ， c ， d 为整数)

$$\begin{aligned}\therefore M \cdot N &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \\ &= (a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd) + (b^2c^2 + a^2d^2 - 2abcd) \\ &= (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2\end{aligned}$$

又 $\because a$ ， b ， c ， d 为整数

$\therefore ac + bd$ ， $bc - ad$ 均为整数

$\therefore M \cdot N$ 是“雅美数”。

【点睛】 本题考查的是配方法的应用，掌握完全平方公式、偶次方的非负性是解题关键。