

2025-2026 学年上海市金山区七年级（上）期中数学试卷

一、选择题：本题共 6 小题，每小题 2 分，共 12 分．在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 下列各组单项式是同类项的是（ ）

A. $3x$ 和 $3xy$

B. $5a^3b^2c$ 和 $-5c^3b^2a$

C. $0.2m^2n$ 和 $0.2n-m$

D. $-7u^3v$ 和 $\frac{1}{2}vu^3$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了同类项，解题的关键是熟练掌握同类项的定义．

根据同类项的定义求解即可，所含字母相同，并且相同字母的指数也相同，这样的项叫做同类项，据此判断即可．

【详解】解：A： $3x$ 和 $3xy$ 的字母不同（前者只有 x ，后者有 x 和 y ），

∴ 不是同类项，不符合题意；

B： $5a^3b^2c$ 和 $-5c^3b^2a$ 的字母相同（ a 、 b 、 c ），但相同字母指数不同（ a 指数 $3 \neq 1$ ， c 指数 $1 \neq 3$ ），

∴ 不是同类项，不符合题意；

C： $0.2m^2n$ 是单项式，但 $0.2n-m$ 是多项式，不是单项式，

∴ 不能是同类项，不符合题意；

D： $-7u^3v$ 和 $\frac{1}{2}vu^3$ 的字母相同（ u 和 v ），且相同字母指数相同（ u 指数均为 3， v 指数均为 1），

∴ 是同类项，符合题意．

故选：D．

2. 下列等式中，从左到右的变形是因式分解的是（ ）

A. $24 = 2 \times 2 \times 6$

B. $a^2 - b^2 - 1 = (a+b)(a-b) - 1$

C. $-4y^2 + 4y - 1 = -(2y-1)^2$

D. $m^2 - 2m - 1 = m\left(m - 2 - \frac{1}{m}\right)$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了因式分解的定义和因式分解的方法，关键是熟练应用知识点进行判断；

根据因式分解的定义和因式分解的方法逐个判断即可.

【详解】解: A、24 不是多项式, 不属于因式分解, 故本选项不符合题意;

B、等式右边不是几个整式的积的形式, 不属于因式分解, 故本选项不符合题意;

C、从左到右的变形属于因式分解且分解彻底, 故本选项符合题意;

D、等式右边不是几个整式的积的形式, 不属于因式分解, 故本选项不符合题意.

故选: C.

3. 下列运算中正确的是 ()

A. $x^2 \cdot x^3 = x^6$

B. $m^5 + m^5 = m^{10}$

C. $(-x^2y)^3 = x^6y^3$

D. $-a^7 \div (-a)^3 = a^4$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了同底数幂的乘法和除法, 幂的乘方, 积的乘方, 合并同类项, 熟练掌握幂运算及合并同类项法则是解题的关键. 根据幂运算的法则及合并同类项法则逐一验证即可.

【详解】解: 选项 A、 $x^2 \cdot x^3 = x^{2+3} = x^5$, A 错误, 不符合题意;

选项 B、 $m^5 + m^5 = 2m^5$, B 错误, 不符合题意;

选项 C、 $(-x^2y)^3 = (-1)^3 (x^2)^3 y^3 = -x^6y^3$, C 错误, 不符合题意;

选项 D、 $-a^7 \div (-a)^3 = -a^7 \div (-a^3) = a^4$, D 正确, 符合题意.

故选: D.

4. 下列两个整式相乘, 可以用平方差公式计算的是 ()

A. $(-x+2y)(-2x+y)$

B. $(x+2y-3)(x-2y+3)$

C. $(2y-x)(x-2y)$

D. $(2y-x+3)(-x+2y+3)$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了平方差公式, 关键是熟练掌握公式的适用形式;

根据平方差公式适用于形式为 $(a+b)(a-b)$ 的表达式, 其中 a 和 b 是整式, 分析各选项进行选择即可.

【详解】解: 选项 A:

$(-x+2y)$ 与 $(-2x+y)$ 即无相同项也无相反项, 不能用平方差公式计算;

选项 B:

$$\therefore (x+2y-3)(x-2y+3) = [x+(2y-3)][x-(2y-3)],$$

$\therefore$ 可用平方差公式计算;

选项 C:

$(2y-x)$ 与 $(x-2y)$ 互为相反数, 不能用平方差公式计算;

选项 D:

$(2y-x+3)$ 与 $(-x+2y+3)$ 相同, 乘积为完全平方式, 不能用平方差公式计算;

故答案选: B.

5. 下列说法中正确的个数有 ()

① -5^2 是 2 次单项式; ② 整式 $x^3 - 2xy - x^2 + 3yx + 2^4$ 是四次五项式; ③ 任何数的零次幂都等于 1; ④ 两个五次整式的和是一个不大于 5 次的整式或整式 0.

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查单项式的次数、多项式的次数与项数、零指数幂以及整式的加法, 关键是熟练应用知识点解题; 根据定义逐项判断正误即可.

【详解】 解: 对于①:

$\therefore -5^2 = -25$, 是常数, 单项式的次数为 0,

$\therefore$ 不是 2 次单项式, 说法错误;

对于②:

$\therefore$ 整式 $x^3 - 2xy - x^2 + 3yx + 2^4$ 可化简为 $x^3 - x^2 + xy + 16$, 最高次项 x^3 的次数为 3, 项数为 4,

$\therefore$ 不是四次五项式, 说法错误;

对于③:

$\therefore$ 零指数幂规定中, 0^0 无意义,

$\therefore$ 不是任何数的零次幂都等于 1, 说法错误;

对于④:

$\therefore$ 两个五次整式相加, 最高次项系数可能互为相反数而抵消,

$\therefore$ 它们的和的次数不大于 5 次或为整式 0,

∴ 说法正确;

综上, 只有④正确,

故答案选: A.

6. 我国北宋数学家贾宪在研究乘法公式时, 发现了 $(a+b)^n$ (n 为非负数) 展开式的各项系数的规律. 例如:

$(a+b)^0 = 1$, 它只有一项, 系数为 1; $(a+b)^1 = a+b$, 它有两项, 系数分别为 1、1; $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,

它有三项, 系数分别为 1、2、1; $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, 它有四项, 系数分别为 1、3、3、

1; 根据以上系数规律, $(a+b)^{2025}$ 展开式中各项系数之和是 ()

	1		1	
	1	2	1	
1	3	3	1	
	...	...	...	

A. 2^{2023}

B. 2^{2024}

C. 2^{2025}

D. 2^{2026}

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了数字变化的规律, 能根据题意得出 $(a+b)^n$ 展开式中各项系数之和为 2^n 是解题的关键.

根据题意, 依次求出 $(a+b)^n$ 展开式中各项系数之和, 发现规律即可解决问题.

【详解】解: 由题知,

$(a+b)^1$ 展开式中各项系数之和为 2;

$(a+b)^2$ 展开式中各项系数之和为 4;

$(a+b)^3$ 展开式中各项系数之和为 8;

...,

所以 $(a+b)^n$ 展开式中各项系数之和为 2^n .

当 $n = 2025$ 时,

$(a+b)^{2025}$ 展开式中各项系数之和是 2^{2025} .

故选: C.

二、填空题: 本题共 12 小题, 每小题 2 分, 共 24 分.

7. 把整式 $-\frac{1}{3}yz^2 + xy^2z + x^4y - \frac{2}{9}x^2z$ 按字母 x 降幂排列是_____.

【答案】 $x^4y - \frac{2}{9}x^2z + xy^2z - \frac{1}{3}yz^2$

【解析】

【分析】 本题考查了多项式的排列方式，关键是找到字母 x 的指数；

按字母 x 的降幂排列，即按照 x 的指数从大到小排列各项，保持各项原有符号.

【详解】 解： $\because$ 整式 $-\frac{1}{3}yz^2 + xy^2z + x^4y - \frac{2}{9}x^2z$ 中，

各项关于 x 的指数分别为：

x^4y 中 x 的指数为 4，

$-\frac{2}{9}x^2z$ 中 x 的指数为 2，

xy^2z 中 x 的指数为 1，

$-\frac{1}{3}yz^2$ 中 x 的指数为 0；

$\therefore$ 按 x 的降幂排列为 $x^4y - \frac{2}{9}x^2z + xy^2z - \frac{1}{3}yz^2$.

故答案为： $x^4y - \frac{2}{9}x^2z + xy^2z - \frac{1}{3}yz^2$.

8. 单项式 $-x^2y$ 的系数和次数之和是_____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查了单项式的系数和次数，关键是熟练应用知识点解题；

分别求得单项式 $-x^2y$ 的系数与次数，再求和即可.

【详解】 解： 单项式 $-x^2y$ 的系数是 -1，

次数是 $2+1=3$ ，

所以系数和次数之和为： $-1+3=2$.

9. 计算： $8xy^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2yz\right) =$ _____.

【答案】 $-4x^3y^3z$

【解析】

【分析】 本题考查了单项式乘以单项式，关键是熟练应用法则进行运算；

根据单项式乘法的运算法则，系数相乘，同底数幂相乘.

【详解】解： $8xy^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2yz\right) = -8 \times \frac{1}{2}x^{1+2}y^{2+1}z = -4x^3y^3z$,

故答案为： $-4x^3y^3z$.

10. 若整式 $-2v^2 + 5x^2$ 减去另一个整式的差等于 $3x^2 - 2v^2$ ，那么这个整式是_____.

【答案】 $2x^2$

【解析】

【分析】 本题考查了整式的加减，关键是熟练应用知识点进行计算；

设所求整式为 A ，根据题意列出方程 $(-2v^2 + 5x^2) - A = 3x^2 - 2v^2$ ，通过移项和合并同类项求解 A .

【详解】解： 设所求整式为 A ，

由题意得：

$$(-2v^2 + 5x^2) - A = 3x^2 - 2v^2,$$

$$A = (-2v^2 + 5x^2) - (3x^2 - 2v^2),$$

$$= -2v^2 + 5x^2 - 3x^2 + 2v^2,$$

$$= (-2v^2 + 2v^2) + (5x^2 - 3x^2),$$

$$= 2x^2.$$

故答案为： $2x^2$.

11. 若单项式 $-3a^{n+1}b^4$ 与 $\frac{1}{2}a^3b^{m-2}$ 的和仍然是一个单项式，那么 $m^n =$ _____.

【答案】 36

【解析】

【分析】 本题考查了同类项、整式的加法及乘方，关键是熟练应用法则进行计算；

由两个单项式的和仍为单项式，则它们必须是同类项，即相同字母的指数相同，由此列出方程求解 m 和 n 的值，最后计算 m^n .

【详解】 $\because -3a^{n+1}b^4$ 与 $\frac{1}{2}a^3b^{m-2}$ 的和是一个单项式，

$\therefore$ 它们是同类项，

∴ 相同字母的指数相同,

即 a 的指数相等: $n+1=3$;

b 的指数相等: $4=m-2$;

解得 $n=2$, $m=6$,

∴ $m^n = 6^2 = 36$,

故答案为: 36.

12. 因式分解: $3x^3 - 12x =$ _____.

【答案】 $3x(x+2)(x-2)$

【解析】

【分析】 先提公因式 $3x$, 然后利用平方差公式进行分解即可.

【详解】 $3x^3 - 12x$

$= 3x(x^2 - 4)$

$= 3x(x+2)(x-2),$

故答案为 $3x(x+2)(x-2)$.

【点睛】 本题考查了提公因式法与公式法分解因式, 要求灵活使用各种方法对多项式进行因式分解, 一般来说, 如果可以先提取公因式的要先提取公因式, 再考虑运用公式法分解.

13. 计算: $(2x^3 - 2x) \div 2x - (-2x)^2 =$ _____.

【答案】 $-3x^2 - 1$

【解析】

【分析】 本题考查了整式的混合运算, 熟练掌握相关运算法则是解题的关键.

先根据多项式除以单项式法则、积的乘方法则计算, 再合并同类项即可.

【详解】 解: $(2x^3 - 2x) \div 2x - (-2x)^2 = x^2 - 1 - 4x^2$

$= -3x^2 - 1,$

故答案为: $-3x^2 - 1$.

14. 计算: $(-2025)^{2025} \times (\frac{1}{2025})^{2026} =$ _____.

【答案】 $-\frac{1}{2025}$

【解析】

【分析】 本题考查了积的乘方的逆运算, 关键是指数分解和结合;

利用积的乘方公式简化计算.

【详解】解：原式 $= (-2025)^{2025} \times \left(\frac{1}{2025}\right)^{2025} \times \frac{1}{2025}$,

$$= \left[(-2025) \times \frac{1}{2025}\right]^{2025} \times \frac{1}{2025},$$
$$= (-1)^{2025} \times \frac{1}{2025},$$
$$= -\frac{1}{2025},$$

故答案为： $-\frac{1}{2025}$.

15. 已知 $x^m = 3$, $x^n = 6$, 则 $x^{2m+n} + x^{2m-n} =$ _____.

【答案】 $55\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了同底数幂乘除法、幂的乘方. 根据幂的乘方运算法则, 求得 $x^{2m} = (x^m)^2 = 9$, 再利用同底数幂乘除法法则和将原式化成含有 x^m 、 x^n 的形式, 再代入计算即可.

【详解】解： $\because x^m = 3$, $x^n = 6$,

$$\therefore x^{2m} = (x^m)^2 = 9, \quad x^n = 6,$$

$$\therefore x^{2m+n} = x^{2m} \cdot x^n = 9 \times 6 = 54, \quad x^{2m-n} = x^{2m} \div x^n = 9 \div 6 = \frac{3}{2},$$

$$\therefore x^{2m+n} + x^{2m-n} = 54 + \frac{3}{2} = 55\frac{1}{2}.$$

故答案是： $55\frac{1}{2}$.

16. 若 $\frac{1}{4}a^2 - a + m^2$ 是一个完全平方式, 那么 m 的值是_____.

【答案】 ± 1

【解析】

【分析】 本题考查了完全平方公式的构成, 关键是确定常数项;
利用完全平方公式, 将表达式与标准形式比较, 确定常数项的值.

【详解】解： $\because \frac{1}{4}a^2 - a + m^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 - 2 \times \frac{1}{2}a \times 1 + m^2$ 是完全平方式

$$\therefore m^2 = 1,$$

即: $m = \pm 1$.

故答案为: $m = \pm 1$.

17. 若整式 $(x^2 - ax + 2)(ax + 1) - x$ 展开化简后要含 x 的一次项但不含 x 的二次项, 那么常数 a 的值是_____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题考查了多项式乘多项式法则, 以及已知多项式乘积不含某项求字母的值等知识内容, 正确掌握相关性质内容是解题的关键.

将整式展开并合并同类项, 根据条件“不含二次项”和“含一次项”建立方程求解即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: } & (x^2 - ax + 2)(ax + 1) - x \\ &= x^2 \cdot (ax + 1) - ax \cdot (ax + 1) + 2 \cdot (ax + 1) - x \\ &= ax^3 + x^2 - a^2x^2 - ax + 2ax + 2 - x \\ &= ax^3 + (1 - a^2)x^2 + (a - 1)x + 2, \end{aligned}$$

$\therefore$ 不含 x^2 项,

$$\therefore 1 - a^2 = 0,$$

解得 $a = \pm 1$,

又 $\therefore$ 含有 x 的一次项,

$$\therefore a - 1 \neq 0, \text{ 即 } a \neq 1,$$

$$\therefore a = -1,$$

故答案为: -1 .

18. 如果一个正整数能表示为两个连续非负偶整数的平方差, 那么我们称这个正整数为“黄金数”. 如:

$4 = 2^2 - 0^2$, $12 = 4^2 - 2^2$, $20 = 6^2 - 4^2$, 因此, 4, 12, 20 这三个数都是“黄金数”. 已知 2028 是黄金数, 即 $2028 = m^2 - n^2$ (m, n 为连续的正偶整数), 那么 $2m - n =$ _____.

【答案】 510

【解析】

【分析】 本题主要考查了乘法公式及应用, 熟练掌握相关知识是解题的关键.

由题可知 $m = n + 2$, 进而代入求解即可.

$$\text{【详解】解: } \therefore 2028 \text{ 是黄金数, 即 } 2028 = m^2 - n^2$$

$$\therefore m = n + 2,$$

$$\therefore 2028 = m^2 - n^2$$

$$= (n + 2)^2 - n^2$$

$$= n^2 + 4n + 4 - n^2$$

$$= 4n + 4,$$

$$\therefore n = 506,$$

$$\therefore m = n + 2 = 508,$$

$$\therefore 2m - n = 2 \times 508 - 506 = 510,$$

故答案为：510.

三、解答题：本题共 10 小题，共 56 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

19. 计算： $-a \cdot (-a)^2 \cdot (-a)^3 + (-a^3)^2$.

【答案】 $2a^6$

【解析】

【分析】 本题考查了整式的混合运算，熟练掌握运算是解题的关键．

先根据同底数幂的乘法法则、幂的乘方法则计算，再合并同类项即可．

【详解】 解： $-a \cdot (-a)^2 \cdot (-a)^3 + (-a^3)^2$

$$= (-a)^6 + a^6$$

$$= a^6 + a^6$$

$$= 2a^6.$$

20. 用简便方法计算： $2025^2 - 2026 \times 2024$.

【答案】 1

【解析】

【分析】 此题考查了平方差公式，熟练掌握平方差公式是解本题的关键．

利用平方差公式的结构特征计算即可．

【详解】 解： $2025^2 - 2026 \times 2024$

$$= 2025^2 - (2025 + 1)(2025 - 1)$$

$$= 2025^2 - (2025^2 - 1)$$

$$= 2025^2 - 2025^2 + 1$$

$$= 1.$$

21. 计算: $(3x-2)^2(3x+2)^2$.

【答案】 $81x^4 - 72x^2 + 16$

【解析】

【分析】 本题考查平方差公式和完全平方公式.

根据平方差公式和完全平方公式进行计算即可.

【详解】 解: $(3x-2)^2(3x+2)^2$

$$= [(3x-2)(3x+2)]^2$$

$$= (9x^2 - 4)^2$$

$$= 81x^4 - 72x^2 + 16.$$

22. 计算: $(3x+2y)(2x+3y) - 2(x-3y)(-3y-x)$.

【答案】 $8x^2 + 13xy - 12y^2$

【解析】

【分析】 此题考查了整式的混合运算, 涉及的知识有: 多项式乘多项式法则, 平方差公式, 去括号法则以及合并同类项法则, 熟练掌握公式及法则是解本题的关键.

原式利用多项式乘多项式及平方差公式化简, 去括号合并即可得到结果.

【详解】 解: 原式 $= 6x^2 + 9xy + 4xy + 6y^2 + 2(x-3y)(x+3y)$

$$= 6x^2 + 9xy + 4xy + 6y^2 + 2(x^2 - 9y^2)$$

$$= 6x^2 + 9xy + 4xy + 6y^2 + 2x^2 - 18y^2$$

$$= 8x^2 + 13xy - 12y^2.$$

23. 因式分解: $(a-2)x^4 + 16(2-a)$.

【答案】 $(a-2)(x^2+4)(x+2)(x-2)$

【解析】

【分析】 本题考查了提公因式法与公式法的综合运用，熟练掌握这两种因式分解的方法是解题的关键.
先变形，再提公因式，然后利用平方差公式分解因式即可.

【详解】 解： $(a-2)x^4 + 16(2-a)$
 $= (a-2)x^4 - 16(a-2)$
 $= (a-2)(x^4 - 16)$
 $= (a-2)(x^2 + 4)(x^2 - 4)$
 $= (a-2)(x^2 + 4)(x+2)(x-2).$

24. $m^4 - 18m^2 + 81$

【答案】 $(m+3)^2(m-3)^2$.

【解析】

【分析】 综合利用完全平方公式和平方差公式进行因式分解即可得.

【详解】 原式 $= (m^2)^2 - 18m^2 + 9^2$ ，
 $= (m^2 - 9)^2$ ，
 $= [(m+3)(m-3)]^2$ ，
 $= (m+3)^2(m-3)^2$.

【点睛】 本题考查了利用完全平方公式和平方差公式进行因式分解，熟记公式是解题关键.

25. 解方程： $-2x(1-x) = 3(x+2)^2 - (x+4)(x-4)$.

【答案】 $x = -2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元一次方程，乘法公式，熟知解一元一次方程的步骤是解题的关键.
根据乘法公式去括号，进而进行求解即可.

【详解】 解： $-2x(1-x) = 3(x+2)^2 - (x+4)(x-4)$ ，
化简，得 $-2x + 2x^2 = 3(x^2 + 4x + 4) - x^2 + 16$ ，
去括号，得 $-2x + 2x^2 = 3x^2 + 12x + 12 - x^2 + 16$ ，
移项，得 $-2x + 2x^2 - 3x^2 - 12x + x^2 = 12 + 16$ ，

合并同类项，得 $-14x = 28$ ，

系数化为 1，得 $x = -2$ 。

26. 在学习因式分解这一章节时，爱思考的小睿给聪明的小慧出了这样一道题：已知整式 $(a+1)^2 - (\quad)$ ，请在 $(\quad)$ 里添加一项只含字母 a 的单项式（ a^2 除外），使得这个整式能因式分解，请写出两种添加的方法，并对该整式讲行因式分解。

【答案】见解析（答案不唯一）

【解析】

【分析】本题考查了利用公式法进行因式分解，掌握平方差公式是解本题的关键。
根据平方差公式进行添加只含字母 a 的单项式即可。

【详解】解：① $(a+1)^2 - 4a^2$

$$= (a+1-2a)(a+1+2a)$$
$$= (1-a)(3a+1);$$

② $(a+1)^2 - 16a^2$

$$= (a+1-4a)(a+1+4a)$$
$$= (1-3a)(5a+1).$$

27. 已知两个整式 $A = x^3y^2 + 4xy - 2x - \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}x^3y^2 - 2xy + x - 1$ 。

(1) 求 $A-2B$ ；

(2) 当 $x^2 + 2x + 1 + \left|y - \frac{1}{2}\right| = 0$ ，求 $A-2B$ 的值。

【答案】(1) $8xy - 4x + \frac{3}{2}$ ；

(2) $\frac{3}{2}$ 。

【解析】

【分析】本题主要考查了整式的化简求值，解题关键是熟练掌握去括号法则和合并同类项法则。

(1) 把已知条件中的 A ， B 代入 $A-2B$ ，再根据去括号法则和合并同类项法则化简即可；

(2) 根据完全平方方式和绝对值的非负性，列出关于 x ， y 的方程，解方程求出 x ， y ，再代入 (1) 中所求的 $A-2B$ 进行计算即可。

【小问 1 详解】

$$\text{解: } \because A = x^3y^2 + 4xy - 2x - \frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}x^3y^2 - 2xy + x - 1,$$

$$\therefore A - 2B$$

$$= x^3y^2 + 4xy - 2x - \frac{1}{2} - 2\left(\frac{1}{2}x^3y^2 - 2xy + x - 1\right)$$

$$= x^3y^2 + 4xy - 2x - \frac{1}{2} - x^3y^2 + 4xy - 2x + 2$$

$$= x^3y^2 - x^3y^2 + 4xy + 4xy - 2x - 2x + 2 - \frac{1}{2}$$

$$= 8xy - 4x + \frac{3}{2};$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \because x^2 + 2x + 1 + \left|y - \frac{1}{2}\right| = 0,$$

$$\therefore (x+1)^2 + \left|y - \frac{1}{2}\right| = 0,$$

$$\therefore x+1=0, y-\frac{1}{2}=0,$$

$$\text{解得: } x=-1, y=\frac{1}{2},$$

$$\therefore A - 2B,$$

$$= 8 \times (-1) \times \frac{1}{2} - 4 \times (-1) + \frac{3}{2}$$

$$= -4 + 4 + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{3}{2}.$$

28. 【追本溯源】“数形结合”是一种非常重要的数学思想方法. 利用“数形结合”的思想, 可以从代数角度解决图形问题, 也可以用图形角度解决代数问题. 我们在学习“整式乘法公式”时, 通过构造几何图形,

用“等积法”直观地验证了平方差公式和完全平方和公式, 如图 1-1 和 1-2: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

【初步应用】

(1) 请你利用图 2 中的两个正方形画出一个几何图形来验证完全平方和公式, 用字母 a 、 b 标注相关边长并简单说明你的验证思路, 同时写出该数学等式_____.

【拓展应用】

(2) 请利用上述验证的恒等式解决如下问题:

①若 $(a+b)^2 = 6$ 、 $a-b=2$ ，求 ab 的值;

②正方形 $ABCD$ 和 $AEFG$ 如图 3 所示方式摆放，已知 $AB = x$ ， $AE = y$ ， $BE = 2$ ，且 $x^2 + y^2 = 52$ ，求图中阴影部分的面积;

【迁移应用】

(3) 类似的，用两种不同的方法计算同一个几何体的体积，如图 4 是由 2 个正方体和 6 个长方体拼成的一个大正方体，用它可以验证恒等式： $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ，已知 $a+b=3$ ， $ab=1$ ，利用上述恒等式，求 $a^6 + b^6$ 的值.

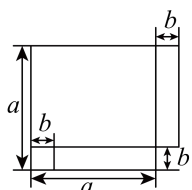


图1-1

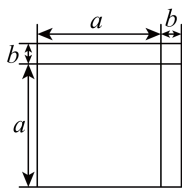


图1-2

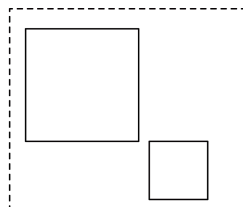


图2

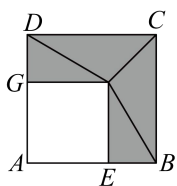


图3

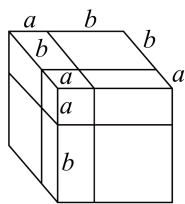


图4

【答案】 (1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; (2) ①0.5; ②20; (3) 322.

【解析】

【分析】 本题考查完全平方公式的几何背景，掌握完全平方公式的结构特征是正确解答的关键.

(1) 用两种方法表示图 2 的面积即可;

(2) ① 根据 $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$ 进行计算即可; ② 由题意得 $x-y=2$ ，根据 $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = 4$ ，求出 $xy=24$ ，再根据 $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy$ 求出 $x+y$ 的值，由 $S_{\text{阴影部分}} = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ 代入计算即可;

(3) 根据 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ，求出 $a^3 + b^3 = 18$ ，再根据 $(a^3 + b^3)^2 = a^6 + b^6 + 2a^3b^3$ 进行计算即可.

【详解】解：（1）整体上是保持为 $a+b$ 的正方形，因此面积为 $(a+b)^2$ ，拼成图 2 的四个部分的面积和为

$$a^2 + 2ab + b^2,$$

$$\text{所以有 } (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$\text{故答案为: } (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(2) \text{ ① } \because a-b=2,$$

$$\therefore (a-b)^2 = 4,$$

$$\text{又 } \because (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab = 6 - 4 = 2,$$

$$\therefore ab = 0.5;$$

$$\text{②如图, } AB = x, AE = y, BE = 2, \text{ 则 } x - y = BE = 2,$$

$$\therefore x - y = 2,$$

$$\therefore (x-y)^2 = 4,$$

$$\text{即 } x^2 - 2xy + y^2 = 4,$$

$$\because x^2 + y^2 = 52,$$

$$\therefore 52 - 2xy = 4,$$

$$\text{解得 } xy = 24,$$

$$\therefore (x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy = 4 + 96 = 100,$$

$$\because x > y > 0,$$

$$\therefore x + y = 10,$$

$$\therefore S_{\text{阴影部分}} = x^2 - y^2$$

$$= (x+y)(x-y)$$

$$= 10 \times 2$$

$$= 20;$$

$$(3) \because (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \text{ 即 } (a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3, \text{ 而 } a+b=3, ab=1,$$

$$\therefore 27 = a^3 + 3 \times 1 \times 3 + b^3,$$

$$\therefore a^3 + b^3 = 27 - 9 = 18,$$

$$\because (a^3 + b^3)^2 = a^6 + b^6 + 2a^3b^3, \text{ 即 } 18^2 = a^6 + b^6 + 2 \times 1^3,$$

$$\therefore a^6 + b^6 = 324 - 2 = 322.$$