

2025 学年第一学期期中考试七年级数学试卷

(考试时间: 90 分钟 满分: 100 分)

注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 27 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.

2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 2 分, 共 12 分, 每题只有一个正确选项)

1. 如果单项式 $-a^{2m}b$ 与 $5a^6b^{3+n}$ (m 、 n 是常数) 的和仍是单项式, 那么 $m+n$ 的值是 ()

- A. 1 B. -1 C. 2 D. 5

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了已知同类项求字母系数, 两个单项式的和仍是单项式, 说明它们是同类项, 因此相同字母的指数相等, 据此求出 m 、 n 的值, 即可得答案.

【详解】解: $\because$ 单项式 $-a^{2m}b$ 与 $5a^6b^{3+n}$ 的和是单项式,

$\therefore$ 两个单项式是同类项,

$$\therefore 2m = 6, \quad 1 = 3 + n,$$

解得 $m = 3, \quad n = -2,$

$$\therefore m + n = 3 + (-2) = 1.$$

故选 A

2. 下列计算中, 结果正确的是 ()

A. $2a^2 + 2a^2 = 4a^2$

B. $a^{10} \div a^2 = a^5$

C. $-(x^2y^3)^2 = x^4y^6$

D. $2x^2 \cdot (-3x^2 + 1) = -6x^4 + 1$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查整式的运算, 包括合并同类项、指数运算、幂的乘方和分配律等基本规则. 根据相关运算法则计算即可.

【详解】解: A: $2a^2 + 2a^2 = (2+2)a^2 = 4a^2$, 计算正确;

B: $a^{10} \div a^2 = a^{10-2} = a^8 \neq a^5$, 计算错误;

C: $-(x^2 y^3)^2 = -[(x^2)^2 \cdot (y^3)^2] = -x^4 y^6 \neq x^4 y^6$, 计算错误;

D: $2x^2 \cdot (-3x^2 + 1) = 2x^2 \cdot (-3x^2) + 2x^2 \cdot 1 = -6x^4 + 2x^2 \neq -6x^4 + 1$, 计算错误.

故选: A.

3. 已知关于 x 的整式 $x+t$ 与 $2x-3$ 的乘积中不含有 x 的一次项, 那么 t 的值是 ()

- A. 3 B. -3 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题主要考查多项式的乘法运算, 准确计算多项式的乘积是解题的关键.

通过展开两个整式的乘积, 合并同类项后, 令一次项的系数为零, 解方程即可求出 t 的值.

【详解】 $\because (x+t)(2x-3) = 2x^2 - 3x + 2tx - 3t = 2x^2 + (2t-3)x - 3t$,

又 $\because$ 乘积中不含有 x 的一次项,

$\therefore$ 一次项系数 $2t-3=0$,

解得 $t = \frac{3}{2}$,

$\therefore t$ 的值为 $\frac{3}{2}$,

故选: C.

4. 下列从左到右的等式变形中, 因式分解是 ()

- A. $a^2 - 2a + 1 = a(a-2) + 1$ B. $(x-1)(x+6) = x^2 + 5x - 6$
C. $x^3 - x = x(x+1)(x-1)$ D. $4m^2 - 8m + 16 = 4(m^2 - 2m + 4)$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题主要考查的是因式分解的定义, 利用因式分解的定义进行判定是解题的关键, 需要注意的是等式变形需要符合恒等变形. 利用因式分解的定义: 将多项式转化为整式乘积的形式, 进行判定即可.

【详解】 解: A. $a^2 - 2a + 1 = a(a-2) + 1$, 并非将多项式转化为整式乘积的形式, 不符合题意;

B. $(x-1)(x+6) = x^2 + 5x - 6$, 是多项式乘以多项式, 并非将多项式转化为整式乘积的形式, 不符合题意;

C. $x^3 - x = x(x+1)(x-1)$, 符合因式分解的定义, 符合题意;

D. $4m^2 - 8m + 16 = 4(m^2 - 2m + 4)$, 并非将多项式转化为整式乘积的形式, 不符合题意.

故选: C.

5. 若多项式 $a^2 + 1 + \Delta$ 能直接用完全平方公式进行因式分解, 则 “ Δ ” 所代表的单项式不可以是 ()

- A. $2a$ B. $-2a$ C. $\frac{a^4}{4}$ D. $-\frac{a^4}{4}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查完全平方公式分解因式, 根据完全平方公式的特点, 首平方, 尾平方, 首尾的 2 倍在中间, 进行判断即可.

【详解】解: A、 $a^2 + 1 + 2a = (a+1)^2$, 不符合题意;

B、 $a^2 + 1 - 2a = (a-1)^2$, 不符合题意;

C、 $a^2 + 1 + \frac{a^4}{4} = \left(\frac{a^2}{2} + 1\right)^2$, 不符合题意;

D、 $a^2 + 1 - \frac{a^4}{4}$, 无法用完全平方公式进行因式分解, 符合题意;

故选 D.

6. 文化情境·数学文化现代的数学符号体系, 不仅使得数学语言变得简洁明了, 还能更好地帮助人们总结出便于运算的各种运算法则, 简明地揭示数量之间的相互关系. 我国在 1905 年清朝学堂的课本中还用

“ $\frac{\text{五}}{\text{丁}} - \frac{\text{三}}{\text{丙}} \perp \frac{\text{二七}}{\text{甲}^2\text{乙}^2}$ ” 来表示相当于 $\frac{d^2}{5} - \frac{c^2}{3} + \frac{a^2b^2}{27}$ 的代数式, 观察其中的规律, 化简

“ $\frac{\text{六}}{\text{六乙}^2} \perp \frac{\text{三}}{\text{乙}^2} - \frac{\text{甲}}{\text{丙}^2}$ ”, 后得 ()

- A. $\frac{4b^2}{3} - \frac{c^2}{a}$ B. $\frac{2b^2}{3} + \frac{c^2}{a}$ C. $\frac{4}{b^2} - \frac{a}{c^2}$ D. $\frac{-2}{b^2} + \frac{a}{c^2}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了整式加减运算的应用, 明确题意, 得到准确得到规律是解题的关键.

根据题意可得 $\perp$ 代表减法， $\perp$ 代表加法，甲、乙、丙、丁分别对应小写英文字母 a 、 b 、 c 、 d ，二表示平方，然后汉字表达式中分子和分母刚好与代数式中的分子分母互换，据此可得答案.

【详解】解：根据题意得：“ $\frac{\text{六}}{\text{六乙}} \perp \frac{\text{三}}{\text{乙}} \frac{\text{甲}}{\text{丙}}$ ”来表示相当于 $\frac{6b^2}{6} + \frac{b^2}{3} - \frac{c^2}{a}$ 的代数式，

$$\frac{6b^2}{6} + \frac{b^2}{3} - \frac{c^2}{a} = b^2 + \frac{1}{3}b^2 - \frac{c^2}{a} = \frac{4b^2}{3} - \frac{c^2}{a},$$

故选：A.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 2 分，共 24 分）

7. 一个圆柱体的高为 5，底面半径为 2，如果它的高不变，底面半径增加 a ，那么它的体积增加_____（用含有 a 的代数式表示， π 取 3）.

【答案】 $60a + 15a^2$

【解析】

【分析】本题考查了列代数式、圆柱体的体积公式以及完全平方公式的应用，根据圆柱体体积公式，先计算原始体积和新体积，再求体积增加量.

【详解】圆柱体的体积公式为 $V = \pi r^2 h$ ，其中 $\pi = 3$ ， $h = 5$ ，

原始半径 $r = 2$ ，原始体积 $V_{\text{原始}} = 3 \times 2^2 \times 5 = 3 \times 4 \times 5 = 60$ ，

新半径 $r_{\text{新}} = 2 + a$ ，新体积 $V_{\text{新}} = 3 \times (2 + a)^2 \times 5 = 15 \times (2 + a)^2$ ，

展开 $(2 + a)^2 = 4 + 4a + a^2$ ，则 $V_{\text{新}} = 15 \times (4 + 4a + a^2) = 60 + 60a + 15a^2$ ，

体积增加量为 $V_{\text{新}} - V_{\text{原始}} = (60 + 60a + 15a^2) - 60 = 60a + 15a^2$.

故答案为： $60a + 15a^2$.

8. 已知整式 $3x^2y^2 - xy^3 + 2x^4y - 7y^5 + x^3$ ，其中字母 y 的最高次数的项是_____.

【答案】 $-7y^5$

【解析】

【分析】本题考查多项式的项、次数的概念，熟练掌握相关概念是解题的关键. 需要确定整式中字母 y 的指数最大的项，通过计算各项中 y 的指数并比较即可.

【详解】整式 $3x^2y^2 - xy^3 + 2x^4y - 7y^5 + x^3$ 的各项中 y 的指数分别为：

$3x^2y^2$ 中 y 的指数为 2;

$-xy^3$ 中 y 的指数为 3;

$2x^4y$ 中 y 的指数为 1;

$-7y^5$ 中 y 的指数为 5;

比较各指数, 最高为 5, 因此字母 y 的最高次数的项是 $-7y^5$.

故答案为: $-7y^5$.

9. 把整式 $3x^2y^2 - xy^3 + 2x^4y - 7y^5 + x^3$ 按字母 x 的升幂排列是_____.

【答案】 $-7y^5 - xy^3 + 3x^2y^2 + x^3 + 2x^4y$

【解析】

【分析】 本题考查了多项式, 正确理解升幂排列的含义是解题的关键. 按字母 x 的升幂排列, 即根据 x 的指数从小到大的顺序排列各项.

【详解】 解: 按 x 的指数从小到大排列为: $-7y^5 - xy^3 + 3x^2y^2 + x^3 + 2x^4y$.

故答案为: $-7y^5 - xy^3 + 3x^2y^2 + x^3 + 2x^4y$.

10. 计算: $5x^2 \cdot (-x^4) =$ _____.

【答案】 $-5x^6$

【解析】

【分析】 本题考查了单项式的乘法运算, 需分别计算系数和同底数幂的乘法. 根据单项式乘单项式及同底数幂相乘的运算法则计算即可.

【详解】 解: $5x^2 \cdot (-x^4) = -5x^6$.

故答案为: $-5x^6$.

11. 计算: $(x^m - y^n)(x^m + y^n) - x^m(x^m - x^n) =$ _____.

【答案】

$$x^{m+n} - y^{2n}$$

【解析】

【分析】本题考查幂的混合运算及平方差公式，利用平方差公式，幂的乘方即同底数幂的乘法运算法则计算，最后合并同类项即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: } & (x^m - y^n)(x^m + y^n) - x^m(x^m - x^n) \\ &= (x^m)^2 - (y^n)^2 - (x^m \cdot x^m - x^m \cdot x^n) \\ &= x^{2m} - y^{2n} - x^{2m} + x^{m+n} \\ &= x^{m+n} - y^{2n}. \end{aligned}$$

故答案为: $x^{m+n} - y^{2n}$.

12. 计算: $a^5b^3 \div (-8a^3b^3) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $-\frac{a^2}{8}$

【解析】

【分析】本题主要考查了同底数幂的除法法则，正确运用同底数幂的除法法则是解答本题的关键. 根据同底数幂的除法法则，系数相除，同底数幂相除时指数相减.

$$\begin{aligned} \text{【详解】} & a^5b^3 \div (-8a^3b^3) \\ &= \frac{a^5b^3}{-8a^3b^3} \\ &= -\frac{1}{8} \cdot a^{5-3} \cdot b^{3-3} \\ &= -\frac{1}{8} \cdot a^2 \cdot b^0 \\ &= -\frac{1}{8} a^2 \cdot 1 \\ &= -\frac{a^2}{8}. \end{aligned}$$

故答案为: $-\frac{a^2}{8}$.

13. 因式分解: $y^{n+2} - 8y^{n+1} + 12y^n = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】

$$y^n(y-2)(y-6)$$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解，观察表达式，先提取公因式 y^n ，再利用十字相乘法进行分解即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: } & y^{n+2} - 8y^{n+1} + 12y^n \\ &= y^n (y^2 - 8y + 12) \\ &= y^n (y - 2)(y - 6). \end{aligned}$$

故答案为: $y^n (y - 2)(y - 6)$.

14. 两名学生将一个二次三项式因式分解，一名学生看错了一次项系数，因式分解的结果为 $(x + 2)(x + 3)$ ；另一名学生看错了常数项，因式分解的结果为 $(x - 6)(x + 1)$ ，那么这个二次三项式正确的因式分解结果是_____.

【答案】 $(x - 2)(x - 3)$

【解析】

【分析】 该题考查了整式乘法和因式分解，根据第一个学生的分解结果，常数项正确，得出 $c = 6$ ，根据第二个学生的分解结果，一次项系数正确，得出 $b = -5$ ，从而得到正确的二次三项式，再因式分解.

【详解】解: 设正确的二次三项式为 $ax^2 + bx + c$.

由第一个学生因式分解的结果 $(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$ ，由于看错了一次项系数，但常数项正确，故 $c = 6$ ， $a = 1$.

由第二个学生因式分解的结果 $(x - 6)(x + 1) = x^2 - 5x - 6$ ，由于看错了常数项，但一次项系数正确，故 $b = -5$ ， $a = 1$.

因此正确的二次三项式为 $x^2 - 5x + 6$ ，

$$\text{故 } x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3).$$

故答案为: $(x - 2)(x - 3)$.

15. 已知 $4a^2 + b^2 + 2a - 2b + 1 = 0$ ，那么 $a^2 + b^2$ 的值是_____.

【答案】 $\frac{17}{16}$

【解析】

【分析】该题考查了完全平方公式，通过将原方程分组并配成完全平方形式，得到两个非负式之和等于零，从而求出 a 和 b 的值，再计算 $a^2 + b^2$ 。

【详解】解： $\because 4a^2 + b^2 + 2a - 2b + 1 = 0$,

$$\therefore 4\left(a + \frac{1}{4}\right)^2 + (b-1)^2 = 0,$$

$$\therefore 4\left(a + \frac{1}{4}\right)^2 = 0, (b-1)^2 = 0,$$

解得： $a = -\frac{1}{4}, b = 1$ 。

因此 $a^2 + b^2 = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + 1^2 = \frac{1}{16} + 1 = \frac{17}{16}$ 。

故答案为： $\frac{17}{16}$ 。

16. 如果 $a - b - 5 = 0$ ，那么代数式 $a^2 - b^2 - 10b$ 的值是_____。

【答案】 25

【解析】

【分析】本题考查代数式求值，将原式进行正确的变形是解题的关键。

由已知条件得到 $a - b = 5$ ，将代数式 $a^2 - b^2 - 10b$ 利用平方差公式分解为 $(a - b)(a + b) - 10b$ ，然后代入 $a - b = 5$ ，化简计算即可。

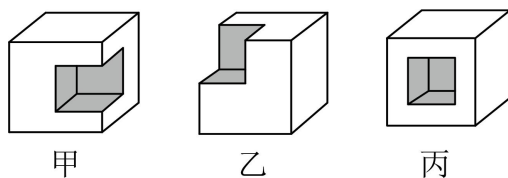
【详解】由 $a - b - 5 = 0$ ，得 $a - b = 5$ ，

$$\text{原式} = a^2 - b^2 - 10b = (a - b)(a + b) - 10b,$$

$$\text{代入 } a - b = 5, \text{ 得 } 5(a + b) - 10b = 5a + 5b - 10b = 5a - 5b = 5(a - b) = 5 \times 5 = 25.$$

故答案为： 25。

17. 某玩具厂生产配件，需要分别从棱长为 a 的正方体木块中，挖去一个棱长为 b ($b < a$) 的小正方体木块，得到甲、乙、丙三种型号的玩具配件 (如图所示)，将甲、乙、丙这三种配件的表面积分别记为 $S_{\text{甲}}$ 、 $S_{\text{乙}}$ 、 $S_{\text{丙}}$ ，那么这三者的大小关系是_____ (请用 “<” 连接)。



【答案】 $S_{乙} < S_{甲} < S_{丙}$

【解析】

【分析】 本题考查了正方体的表面积，整式加减的应用，能表示出所求几何体的表面积是解题的关键；由正方体的表面积得 $S_{甲} = 6a^2 - 2b^2 + 4b^2$, $S_{乙} = 6a^2 - 3b^2 + 3b^2$, $S_{丙} = 6a^2 - b^2 + 5b^2$ ，分别进行整式加减运算后，进行比较大小，即可求解；

【详解】 解：由题意得 $S_{甲} = 6a^2 - 2b^2 + 4b^2 = 6a^2 + 2b^2$ ，

$$S_{乙} = 6a^2 - 3b^2 + 3b^2 = 6a^2,$$

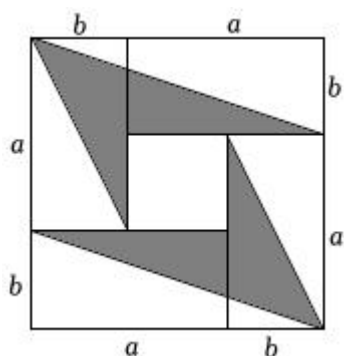
$$S_{丙} = 6a^2 - b^2 + 5b^2 = 6a^2 + 4b^2,$$

$$\therefore 6a^2 < 6a^2 + 2b^2 < 6a^2 + 4b^2,$$

$$\therefore S_{乙} < S_{甲} < S_{丙},$$

故答案为： $S_{乙} < S_{甲} < S_{丙}$.

18. 用 4 张长为 a 、宽为 b ($a > b$) 的长方形纸片，按如图的方式拼成一个边长为 $(a+b)$ 的正方形，图中空白部分的面积为 S_1 ，阴影部分的面积为 S_2 ．若 $S_1 = 2S_2$ ，则 a 、 b 之间存在的数量关系是_____.

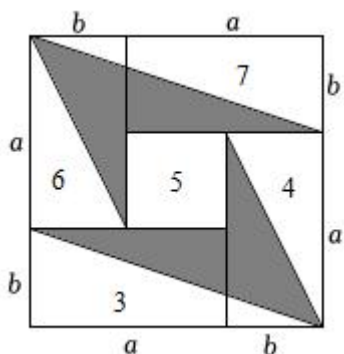


【答案】 $a=2b$

【解析】

【分析】 如下图，先求出空白部分的面积，然后求出阴影部分的面积，利用 $S_1 = 2S_2$ ，可得出 a 、 b 之间的关系.

【详解】如下图



则空白部分的面积 $S_1 = S_6 + S_7 + S_3 + S_4 + S_5$

$$S_6 = S_4 = \frac{1}{2}ab$$

$$S_7 = S_3 = \frac{1}{2}b(a+b)$$

$$S_5 = (a-b)(a-b)$$

$$\text{化简得: } S_1 = a^2 + 2b^2$$

$$S_2 = (a+b)(a+b) - S_1 = 2ab - b^2$$

$$\therefore S_1 = 2S_2$$

$$\therefore a^2 + 2b^2 = 2(2ab - b^2)$$

$$\text{化简得: } (a-2b)^2 = 0$$

$$\therefore a=2b$$

故答案为: $a=2b$.

【点睛】 本题考查完全平方公式的计算与化简, 解题关键是先求出 S_1 和 S_2 的面积.

三、解答题 (本大题共 9 题, 19~24 题每题 6 分, 25 题 8 分, 26~27 题每题 10 分, 共 64 分)

19. 计算: $[-2(a-b)^3]^2 + 3(a-b) \cdot (b-a)^5$ (结果用幂的形式表示).

【答案】 $(a-b)^6$

【解析】

【分析】 本题主要考查了积的乘方、幂的乘方和同底数幂的乘法, 先将 $(b-a)^5$ 转化为 $(a-b)^5$, 再根据积的乘方、幂的乘方和同底数幂的乘法法则进行计算.

【详解】解： $\left[-2(a-b)^3\right]^2 + 3(a-b) \cdot (b-a)^5$
 $= 4(a-b)^6 - 3(a-b) \cdot (a-b)^5$
 $= 4(a-b)^6 - 3(a-b)^6$
 $= (a-b)^6.$

20. 利用乘法公式简便运算： $999.5^2 - 1000.5^2$

【答案】 -2000

【解析】

【分析】 本题主要考查利用平方差公式进行简便计算，将原式转化为两个数的和与差的乘积，从而简化运算.

【详解】解： $999.5^2 - 1000.5^2 = (999.5 + 1000.5) \times (999.5 - 1000.5)$
 $= 2000 \times (-1)$
 $= -2000.$

21. 计算： $(x - 2y - 3z)(x + 2y - 3z).$

【答案】

$$x^2 - 6xz + 9z^2 - 4y^2$$

【解析】

【分析】 本题考查了乘法公式，牢记公式是解题的关键. 根据平方差公式和完全平方公式进行计算即可.

【详解】解： $(x - 2y - 3z)(x + 2y - 3z)$
 $= [(x - 3z) - 2y][(x - 3z) + 2y]$
 $= (x - 3z)^2 - (2y)^2$
 $= x^2 - 6xz + 9z^2 - 4y^2.$

22. 因式分解： $(x^2 + x)(x^2 + x - 5) - 6.$

【答案】 $(x + 3)(x - 2)(x^2 + x + 1)$

【解析】

【分析】 此题主要考查因式分解，解题的关键是熟知整体法与十字相乘法的应用.

把 $x^2 + x$ 当做一个整体利用十字相乘法因式分解，再分解到不能分为止.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解：} & (x^2 + x)(x^2 + x - 5) - 6 \\ &= (x^2 + x)^2 - 5(x^2 + x) - 6 \\ &= (x^2 + x - 6)(x^2 + x + 1) \\ &= (x + 3)(x - 2)(x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

23. 先化简，再求值： $4(x + 2y)(x - 2y) + 5(x - 2y)^2 - (x + 2y)^2$ ，其中 $x = \frac{3}{2}$ ， $y = \frac{1}{3}$.

【答案】 $8x^2 - 24xy$ ，6

【解析】

【分析】原式利用平方差公式，完全平方公式化简，去括号合并得到最简结果，把 x 与 y 的值代入计算即可求出值.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解：原式} &= 4(x^2 - 4y^2) + 5(x^2 - 4xy + 4y^2) - (x^2 + 4xy + 4y^2) \\ &= 4x^2 - 16y^2 + 5x^2 - 20xy + 20y^2 - x^2 - 4xy - 4y^2 \\ &= 8x^2 - 24xy, \\ \text{当 } x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{3} \text{ 时,} \\ \text{原式} &= 8 \times \frac{9}{4} - 24 \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} \\ &= 18 - 12 \\ &= 6. \end{aligned}$$

【点睛】此题考查了整式的混合运算-化简求值，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

24. 阅读下列材料：计算： $(2 + 1) \times (2^2 + 1) \times (2^4 + 1)$.

$$\begin{aligned} \text{解：原式} &= (2 - 1) \times (2 + 1) \times (2^2 + 1) \times (2^4 + 1) \\ &= [(2 - 1) \times (2 + 1)] \times (2^2 + 1) \times (2^4 + 1) \\ &= (2^2 - 1) \times (2^2 + 1) \times (2^4 + 1) \\ &= (2^4 - 1) \times (2^4 + 1) \\ &= 2^8 - 1 \end{aligned}$$

= 255 .

运用上述方法计算: $\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\times\left(1+\frac{1}{3^4}\right)\times\left(1+\frac{1}{3^8}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3^{15}}$.

【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了平方差公式, 熟练掌握平方差公式是解题的关键.

依据材料将算式变形为 $\frac{3}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\times\left(1+\frac{1}{3^4}\right)\times\left(1+\frac{1}{3^8}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3^{15}}$, 然后根据平方差公式进行计算即可求解.

【详解】 解:
$$\begin{aligned} & \left(1+\frac{1}{3}\right)\times\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\times\left(1+\frac{1}{3^4}\right)\times\left(1+\frac{1}{3^8}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3^{15}} \\ &= \frac{3}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\times\left(1+\frac{1}{3^4}\right)\times\left(1+\frac{1}{3^8}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3^{15}} \\ &= \frac{3}{2}\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\times\left(1+\frac{1}{3^4}\right)\times\left(1+\frac{1}{3^8}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3^{15}} \\ &= \frac{3}{2}\times\left(1-\frac{1}{3^4}\right)\times\left(1+\frac{1}{3^4}\right)\times\left(1+\frac{1}{3^8}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3^{15}} \\ &= \frac{3}{2}\times\left(1-\frac{1}{3^8}\right)\times\left(1+\frac{1}{3^8}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3^{15}} \\ &= \frac{3}{2}\times\left(1-\frac{1}{3^{16}}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3^{15}} \\ &= \frac{3}{2}-\frac{3}{2}\times\frac{1}{3^{16}}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3^{15}} \\ &= \frac{3}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3^{15}}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3^{15}} \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

25. 乐乐在学习了因式分解之后, 尝试对多项式 x^2-36y^2+x-6y 进行因式分解

x^2-36y^2+x-6y	①提公因式法;
解: 原式 = $(x^2-36y^2)+(x-6y)$ 第一步	②公式法;

$= (x-6y)(x+6y) + (x-6y)$ 第二步	③十字相乘法.
$= (x-6y)(x+6y+1)$. 第三步	

(1) 乐乐从第一步到第二步因式分解运用的方法是_____法，第二步到第三步因式分解运用的方法是_____法（从右框中分别选择一种方法填入序号）；

(2) 请你按照上述方法分解因式： $x^2 - 6xy + 9y^2 - 3x + 9y$.

【答案】(1) ②, ① (2) $(x-3y)(x-3y-3)$

【解析】

【分析】本题考查了因式分解的方法，熟练掌握因式分解的方法是解题的关键.

(1) 根据平方差公式和提取公因式的概念填空即可.

(2) 先将多项式分组，再在组内利用完全平方公式和提公因式法分解，最后再整体提公因式即可求解；

【小问 1 详解】

解：乐乐从第一步到第二步因式分解运用的方法是平方差公式，

第二步到第三步因式分解运用的方法是提公因式法.

故答案为：②, ①.

【小问 2 详解】

解： $x^2 - 6xy + 9y^2 - 3x + 9y$

$= (x-3y)^2 - 3(x-3y)$

$= (x-3y)(x-3y-3)$.

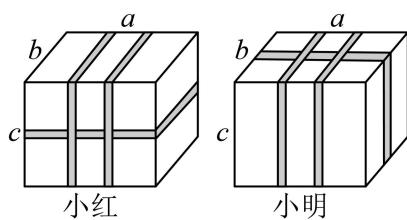
26. 综合与实践

问题情境

劳动基地的蔬菜都成熟了，学校计划将蔬菜送给敬老院的老人，现有长为 a 厘米，宽为 b 厘米，高为 c 厘米的箱子若干，将蔬菜装满每个盒子后需利用打包带进行打包.

方案设计

如图，小红和小明各设计了一种打包方式（接头处的长度不计，本题所有问题只考虑打包带的长度，不考虑其他影响因素）.



问题解决

(1) 用含 a , b , c 的式子表示这两种打包方式所用的打包带的长度：小红的方案中所用打包带的长度为 _____ 厘米；小明的方案中所用打包带的长度为 _____ 厘米。

(2) 当 $a = 50$ 厘米， $b = 30$ 厘米， $c = 40$ 厘米时，小红和小明设计的这两种打包方式所用的打包带的长度分别是多少？

(3) 当 $a > c > b$ 时，比较小红和小明设计的方案中，哪种所用的打包带的长度更短。

【答案】 (1) $(2a + 6b + 4c)$ ； $(2a + 4b + 6c)$

(2) 小红和小明设计的这两种打包方式所用的打包带的长度分别是 440 厘米，460 厘米

(3) 小红所用的打包带的长度更短

【解析】

【分析】 本题考查了列代数式、求代数式的值、整式的加减的应用。

(1) 根据题意列出代数式即可；

(2) 求出当 $a = 50$ 厘米， $b = 30$ 厘米， $c = 40$ 厘米时，两种打包方式用的打包带，比较即可得解；

(3) 求出 $(2a + 6b + 4c) - (2a + 4b + 6c)$ 的值，判断即可得解。

【小问 1 详解】

解：由题意可得：小红的方案中所用打包带的长度为 $(2a + 6b + 4c)$ 厘米；

小明的方案中所用打包带的长度为 $(2a + 4b + 6c)$ 厘米；

【小问 2 详解】

解：当 $a = 50$ 厘米， $b = 30$ 厘米， $c = 40$ 厘米时，

小红的方案中所用打包带的长度为： $2 \times 50 + 6 \times 30 + 4 \times 40 = 440$ 厘米

小明的方案中所用打包带的长度为： $2 \times 50 + 4 \times 30 + 6 \times 40 = 460$ 厘米

答：小红和小明设计的这两种打包方式所用的打包带的长度分别是 440 厘米，460 厘米；

【小问 3 详解】

解：小红所用的打包带的长度更短。

$$(2a+6b+4c)-(2a+4b+6c)$$

$$=2a+6b+4c-2a-4b-6c$$

$$=2b-2c,$$

$$\therefore a > c > b,$$

$$\therefore 2b-2c < 0$$

$$\therefore 2a+6b+4c < 2a+4b+6c$$

$\therefore$ 小红用的打包带的长度更短.

27. 阅读材料, 回答问题.

材料一: 因为 $2^3 = 2 \times 2 \times 2$, $2^2 = 2 \times 2$, 所以 $2^3 \times 2^2 = (2 \times 2 \times 2)(2 \times 2) = 2^5$.

材料二: 求 $3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6$ 的值.

解: 设 $S = 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6$ ①

则 $3S = 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7$ ②

用 ②-① 得, $3S - S = (3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7) - (3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6) = 3^7 - 3$,

所以 $2S = 3^7 - 3$, 即 $S = \frac{3^7 - 3}{2}$, 所以 $3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 = \frac{3^7 - 3}{2}$.

这种方法我们称为“错位相减法”.

(1) 填空: $5^7 \cdot 5^8 = 5^{(\quad)}$, $a^2 \times a^5 = a^{(\quad)}$.

(2) “棋盘摆米”是一个著名的数学故事: 阿基米德与国王下棋, 国王输了, 国王问阿基米德要什么奖赏. 阿基米德对国王说: “我只要在棋盘上第一格放一粒米, 第二格放二粒, 第三格放四粒, 第四格放八粒...按这个方法放满整个棋盘就行” 国王以为要不了多少粮食, 就随口答应了.

①国际象棋共有 64 个格子, 则在第 64 格中应放_____粒米. (用幂表示)

②设国王输给阿基米德的总米粒数为 S , 求 S .

【答案】 (1) 9; 7 (2) ① 2^{63} ; ② $S = 2^{64} - 1$

【解析】

【分析】 本题考查了数字类规律探索, 弄清材料中的求解方法是解题的关键.

(1) 根据材料一给出的方法进行求解即可;

(2) ①根据题意先确定出前几个格中每个格放的米粒数, 从中发现规律即可得答案;

②先列出式子，再根据材料二的方法进行求解即可.

【小问 1 详解】

解：由题意得： $5^9 \cdot 5^8 = 5^9$, $a^2 \cdot a^5 = a^7$,

故答案为：9；7.

【小问 2 详解】

①由题意得，第一格放的米粒数为 $1 = 2^0$ ；

第二格放的米粒数为 $2 = 2^1$ ；

第三格放的米粒数为 $4 = 2^2$ ；

第四格放的米粒数为 $8 = 2^3$ ；

.....

$\therefore$ 第 n 格放的米粒数为 2^{n-1} ,

$\therefore$ 在第 64 格中应放 2^{63} 粒米；

故答案为： 2^{63} .

②由题意得，

$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63},$$

$$2S = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{64},$$

$$\therefore 2S - S = 2^{64} - 1,$$

$$\text{即 } S = 2^{64} - 1.$$