

2025 学年第一学期期中七年级数学试

(考试时间: 90 分钟, 满分: 100 分)

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 2 分, 共 12 分)

1. 下列计算正确的是 ()

A. $(a^3)^2 = a^5$ B. $a^6 \div a^2 = a^3$ C. $(-a)^2 + a^2 = 0$ D. $a^2 \cdot a^3 = a^5$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了幂的乘方计算, 同底数幂乘法计算, 合并同类项, 根据对应的计算法则求出对应选项中式子的结果即可得到答案.

【详解】解: A. $(a^3)^2 = a^{3 \times 2} = a^6 \neq a^5$, 原式计算错误, 不符合题意;

B. $a^6 \div a^2 = a^{6-2} = a^4 \neq a^3$, 原式计算错误, 不符合题意;

C. $(-a)^2 = a^2$, 则 $a^2 + a^2 = 2a^2 \neq 0$, 原式计算错误, 不符合题意;

D. $a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5$, 原式计算正确, 符合题意.

故选: D.

2. 下列各式从左到右是因式分解的是 ()

A. $a^2 + 3a - 2 = a(a+3) - 2$ B. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

C. $x^2 - 2x - 1 = x\left(x - 2 - \frac{1}{x}\right)$ D. $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查因式分解的概念: 把一个多项式化为几个整式的积的形式, 叫做因式分解, 据此判断即可.

【详解】解: A. $a^2 + 3a - 2 = a(a+3) - 2$, 等式右边不是积的形式, 不是因式分解, 不符合题意;

B. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 是整式乘法, 不是因式分解, 不符合题意;

C. $x^2 - 2x - 1 = x\left(x - 2 - \frac{1}{x}\right)$ 右边含分式, 不是因式分解, 不符合题意;

D. $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$ 是因式分解, 符合题意;

故选：D.

3. 下列多项式中可以用完全平方公式进行因式分解的是 ()

- A. $a^2 + a + 1$ B. $4a^2 - a + 1$ C. $a^2 - a + \frac{1}{4}$ D. $a^2 - 2a + 4$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了运用完全平方公式分解因式，熟知完全平方式 $a^2 \pm 2ab + b^2$ 的特点是解题关键，根据完全平方式的特点“两个数的平方和，加（减）它们积的2倍”逐项判断即可求解.

【详解】解：A. $a^2 + a + 1$ 不是完全平方式，不能用完全平方公式分解，不合题意；

B. $4a^2 - a + 1$ 不是完全平方式，不能用完全平方公式分解，不合题意；

C. $a^2 - a + \frac{1}{4}$ 是完全平方式，能用完全平方公式分解，分解为 $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2$ ，符合题意；

D. $a^2 - 2a + 4$ 不是完全平方式，不能用完全平方公式分解，不合题意.

故选：C

4. 计算： $\left[(x-y)^m\right]^n \cdot \left[(x-y)^n\right]^m$ 等于 ()

- A. $2(x-y)^{2m+2n}$ B. $(x-y)^{(mn)^2}$ C. $(x-y)^{2mn}$ D. $(x-y)^{2m+2n}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了幂的乘方计算，同底数幂乘法计算，把 $(x-y)$ 看作一个整体，先计算幂的乘方，再根据同底数幂乘法计算法则求解即可.

【详解】解： $\left[(x-y)^m\right]^n \cdot \left[(x-y)^n\right]^m$
 $= (x-y)^{mn} \cdot (x-y)^{mn}$
 $= (x-y)^{mn+mn}$
 $= (x-y)^{2mn},$

故选：C.

5. 如果 $x^{m+n} = 4, x^n = \frac{1}{2}$ ，那么 x^{2m} 的值是 ()

- A. 4 B. 8 C. 64 D. 16

【答案】C

【解析】

【分析】逆用同底数幂乘法、幂的乘方公式，将式子进行变形是关键.

【详解】因为 $x^{m+n} = 4, x^n = \frac{1}{2}$

所以 $x^{m+n} = x^m \cdot x^n = 4$

所以 $x^m \times \frac{1}{2} = 4$

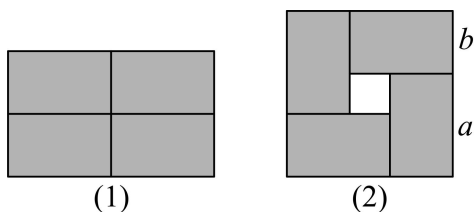
所以 $x^m = 8$

所以 $x^{2m} = (x^m)^2 = 64$

故选：C

【点睛】考核知识点：同底数幂乘法、幂的乘方. 运用同底数幂乘法、幂的乘方法则将式子适当变形是关键.

6. 图（1）是一个长为 $2a$ ，宽为 $2b$ ($a > b$) 的长方形，用剪刀沿图中虚线（对称轴）剪开把它分成四块形状和大小都一样的小长方形，然后按图（2）那样拼成一个正方形，则中间空余的部分的面积是（ ）



A. ab

B. $(a+b)^2$

C. $(a-b)^2$

D. $a^2 - b^2$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了完全平方公式的几何背景. 中间部分的四边形是正方形，表示出其边长，则面积可以求得.

【详解】解：中间部分的四边形是正方形，边长是 $a + b - 2b = a - b$ ，
则面积是 $(a - b)^2$.

故选：C.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 2 分，共 24 分）

7. 用代数式表示： x 与 y 的差的立方_____.

【答案】 $(x - y)^3$

【解析】

【分析】本题考查列代数式，根据题意，用代数式表示出 x 与 y 的差，再表示出这个差的立方即可得到答案.

【详解】解： x 与 y 的差的立方可以表示为 $(x-y)^3$.

故答案为 $(x-y)^3$.

8. 单项式 $-\frac{2x^2y^2z^3}{7}$ 的系数是_____.

【答案】 $-\frac{2}{7}$

【解析】

【分析】本题主要考查了单项式系数的定义，单项式中数字因数叫做这个单项式的系数，据此可得答案.

【详解】解：单项式 $-\frac{2x^2y^2z^3}{7}$ 的系数是 $-\frac{2}{7}$,

故答案为： $-\frac{2}{7}$.

9. 如果单项式 $\frac{2x^{m-1}y}{3}$ 与 $-\frac{mx^3y^{2n}}{2}$ 相加以后结果仍是单项式，那么 $mn =$ _____.

【答案】 2

【解析】

【分析】本题主要考查了合并同类项，同类项的定义，代数式求值，根据题意可得单项式 $\frac{2x^{m-1}y}{3}$ 与 $-\frac{mx^3y^{2n}}{2}$

是同类项，则 $m-1=3, 2n=1$ ，据此求出 $m、n$ 的值，再代值计算即可得到答案.

【详解】解： $\because$ 单项式 $\frac{2x^{m-1}y}{3}$ 与 $-\frac{mx^3y^{2n}}{2}$ 相加以后结果仍是单项式，

$\therefore$ 单项式 $\frac{2x^{m-1}y}{3}$ 与 $-\frac{mx^3y^{2n}}{2}$ 是同类项，

$\therefore m-1=3, 2n=1$,

$\therefore m=4, n=\frac{1}{2}$,

$\therefore mn=4 \times \frac{1}{2}=2$,

故答案为： 2.

10. 将整式 $\frac{4}{5}y^2 - 32x^3y + \frac{1}{3}xy - 12x^2$ 按字母 x 的降幂排列是_____.

【答案】 $-32x^3y - 12x^2 + \frac{1}{3}xy + \frac{4}{5}y^2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了多项式的降幂排列问题，按字母 x 的降幂排列，即根据 x 的指数从大到小排列各项，并保持各项原有的符号，据此求解即可.

【详解】 解： 将整式 $\frac{4}{5}y^2 - 32x^3y + \frac{1}{3}xy - 12x^2$ 按字母 x 的降幂排列是 $-32x^3y - 12x^2 + \frac{1}{3}xy + \frac{4}{5}y^2$,

故答案为： $-32x^3y - 12x^2 + \frac{1}{3}xy + \frac{4}{5}y^2$.

11. 计算： $-x^3y^5 \div \left(-\frac{1}{3}xy^2\right)^2 =$ _____.

【答案】 $-9xy$

【解析】

【分析】 本题主要考查了单项式除以单项式，积的乘方计算，先计算积的乘方，再根据单项式除以单项式的计算法则求解即可.

【详解】 解： $-x^3y^5 \div \left(-\frac{1}{3}xy^2\right)^2$

$$= -x^3y^5 \div \frac{1}{9}x^2y^4$$

$$= -9xy,$$

故答案为： $-9xy$.

12. 计算： $\left(-a + \frac{1}{2}b^3\right)^2 =$ _____.

【答案】 $a^2 - ab^3 + \frac{1}{4}b^6$

【解析】

【分析】 本题考查了完全平方公式计算，根据完全平方公式进行计算即可求解.

【详解】 解： $\left(-a + \frac{1}{2}b^3\right)^2 = (-a)^2 + 2 \cdot (-a) \left(\frac{1}{2}b^3\right) + \left(\frac{1}{2}b^3\right)^2 = a^2 - ab^3 + \frac{1}{4}b^6$.

故答案为: $a^2 - ab^3 + \frac{1}{4}b^6$

13. 比较大小: $(-9)^{20}$ _____ 82^{10} . (填 “>”, “<” 或 “=”)

【答案】<

【解析】

【分析】本题主要考查了幂的乘方计算, 幂的乘方的逆运算, 根据幂的乘方及其逆运算法则可得 $(-9)^{20} = 81^{10}$, 再由 $81^{10} < 82^{10}$, 可得 $(-9)^{20} < 82^{10}$.

【详解】解: $(-9)^{20} = [(-9)^2]^{10} = 81^{10}$,

$\because 81 < 82$,

$\therefore 81^{10} < 82^{10}$,

$\therefore (-9)^{20} < 82^{10}$,

故答案为: <.

14. 因式分解: $2(x-y) - 3(y-x)^2 =$ _____.

【答案】 $(x-y)(2-3x+3y)$

【解析】

【分析】本题考查因式分解, 熟练掌握因式分解的方法, 是解题的关键. 利用提公因式法进行因式分解即可.

【详解】解: 原式 $= 2(x-y) - 3(x-y)^2$

$= (x-y)[2 - 3(x-y)]$

$= (x-y)(2 - 3x + 3y)$;

故答案为: $(x-y)(2 - 3x + 3y)$

15. 因式分解: $20x^2 - 5y^2 =$ _____.

【答案】 $5(2x+y)(2x-y)$

【解析】

【分析】本题主要考查了分解因式, 先提取公因数 5, 再利用平方差公式分解因式即可.

【详解】解: $20x^2 - 5y^2$

$$= 5(4x^2 - y^2)$$

$$= 5(2x + y)(2x - y),$$

故答案为: $5(2x + y)(2x - y)$.

16. 若 $a^2 - a - 10 = 0$, 求 $(6 - a)(5 + a)$ 的值是_____.

【答案】 20

【解析】

【分析】 本题考查了多项式乘以多项式, 求代数式的值等知识. 根据 $a^2 - a - 10 = 0$ 得到 $a^2 - a = 10$, 计算 $(6 - a)(5 + a)$ 得到 $30 + a - a^2$ 变形为 $30 - (a^2 - a)$ 整体代入即可求解.

【详解】 解: $\because a^2 - a - 10 = 0$,

$$\therefore a^2 - a = 10,$$

$$\therefore (6 - a)(5 + a) = 30 + 6a - 5a - a^2 = 30 + a - a^2 = 30 - (a^2 - a) = 30 - 10 = 20.$$

故答案为: 20

17. 已知整式 $mx^2 - 11x - 10$ 可以写成两个因式的积, 其中一个因式是 $2x - 5$, 则 $m =$ _____.

【答案】 6

【解析】

【分析】 根据因式分解的定义, 多项式乘以多项式等知识. 设另一个因式为一次式 $ax + b$, 即可得到 $mx^2 - 11x - 10 = (2x - 5)(ax + b)$, 变形为 $mx^2 - 11x - 10 = 2ax^2 + (2b - 5a)x - 5b$, 从而得到

$$\begin{cases} m = 2a \\ -11 = 2b - 5a, \\ -10 = -5b \end{cases} \text{ 即可求出 } m = 6.$$

【详解】 解: 设另一个因式为 $ax + b$, 则 $mx^2 - 11x - 10 = (2x - 5)(ax + b)$,

$$\therefore (2x - 5)(ax + b) = 2ax^2 + (2b - 5a)x - 5b,$$

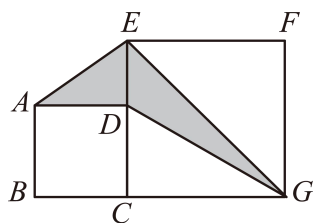
$$\therefore mx^2 - 11x - 10 = 2ax^2 + (2b - 5a)x - 5b,$$

$$\therefore \begin{cases} m = 2a \\ -11 = 2b - 5a, \\ -10 = -5b \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a=3 \\ b=2 \\ m=6 \end{cases}$$

故答案为：6

18. 如图，正方形 $CEFG$ 与正方形 $ABCD$ 的面积差是 5，则阴影部分的面积是_____.



【答案】 2.5

【解析】

【分析】 本题考查平方差公式在几何图形中的应用，解题的关键是用含 a 、 b 的代数式表示出阴影部分的面积. 设正方形 $ABCD$ 与正方形 $CEFG$ 的边长分别为 a 和 b ，根据两者面积差为 5，可得 $b^2 - a^2 = 5$. 利用含 a 、 b 的代数式表示出阴影部分的面积，将 $b^2 - a^2 = 5$ 整体代入即可求解.

【详解】 解：设正方形 $ABCD$ 与正方形 $CEFG$ 的边长分别为 a 和 b ，

由题意得： $b^2 - a^2 = 5$.

由图形可得： $S_{\text{阴}} = \frac{1}{2}a(b-a) + \frac{1}{2}b(b-a)$

$$= \frac{1}{2}(b-a)(b+a)$$

$$= \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

$$= \frac{1}{2} \times 5$$

$$= 2.5.$$

故阴影部分的面积为 2.5.

故答案为： 2.5.

三、计算题（本大题共 4 题，每题 4 分，共 16 分）

19. 计算： $(5a^2 - 3ab + 7) - 7(5ab - 4a^2 + 7)$

【答案】 $33a^2 - 38ab - 42$

【解析】

【分析】 本题主要考查了整式的加减计算，先去括号，然后合并同类项即可得到答案.

【详解】解： $(5a^2 - 3ab + 7) - 7(5ab - 4a^2 + 7)$

$$= 5a^2 - 3ab + 7 - 35ab + 28a^2 - 49$$

$$= 33a^2 - 38ab - 42 .$$

20. 计算： $5x(x^2 + 2x + 1) - (2x + 3)(x - 5)$

【答案】 $5x^3 + 8x^2 + 12x + 15$

【解析】

【分析】 本题主要考查了整式的混合运算. 先进行乘法运算，然后去括号，最后合并同类项即可解答.

【详解】解： $5x(x^2 + 2x + 1) - (2x + 3)(x - 5)$

$$= 5x^3 + 10x^2 + 5x - (2x^2 - 7x - 15)$$

$$= 5x^3 + 10x^2 + 5x - 2x^2 + 7x + 15$$

$$= 5x^3 + 8x^2 + 12x + 15 .$$

21. 计算： $(a + 2b - 3c)(-a + 2b + 3c)$

【答案】 $4b^2 - a^2 + 6ac - 9c^2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了乘法公式，先把原式变形为 $[2b + (a - 3c)][2b - (a - 3c)]$ ，再利用平方差公式和完全平方公式求解即可.

【详解】解： $(a + 2b - 3c)(-a + 2b + 3c)$

$$= [2b + (a - 3c)][2b - (a - 3c)]$$

$$= 4b^2 - (a - 3c)^2$$

$$= 4b^2 - (a^2 - 6ac + 9c^2)$$

$$= 4b^2 - a^2 + 6ac - 9c^2$$

22. 计算： $\left[\frac{9}{2}ab \cdot \left(-\frac{1}{3}a\right)^2 + (-a^2b)^2 \right] \div (-2a)^3$

【答案】 $-\frac{b}{16} - \frac{ab^2}{8}$

【解析】

【分析】 本题考查了整式的混合运算，根据运算法则“先算乘方，再算乘除，最后算加减，有括号的先算括号内的运算顺序进行计算”即可求解.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & \left[\frac{9}{2}ab \cdot \left(-\frac{1}{3}a\right)^2 + (-a^2b)^2 \right] \div (-2a)^3 \\ &= \left[\frac{9}{2}ab \cdot \frac{1}{9}a^2 + a^4b^2 \right] \div (-8a^3) \\ &= \left(\frac{1}{2}a^3b + a^4b^2 \right) \div (-8a^3) \\ &= -\frac{b}{16} - \frac{ab^2}{8}. \end{aligned}$$

四、分解因式 (本大题共 4 题, 每题 4 分, 共 16 分)

23. 分解因式: $-15x^3y + 10x^2y^4 - 20x^4y^2$

【答案】 $-5x^2y(3x - 2y^3 + 4x^2y)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了分解因式，直接提取公因式 $-5x^2y$ 进行分解因式即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & -15x^3y + 10x^2y^4 - 20x^4y^2 \\ &= -5x^2y(3x - 2y^3 + 4x^2y). \end{aligned}$$

24. 分解因式: $x^2y^2 - 5xy - 14$

【答案】 $(xy - 7)(xy + 2)$

【解析】

【分析】 本题考查了十字相乘法因式分解. 根据十字相乘法公式 $x^2 + (p+q)x + pq = (x+p)(x+q)$ 进行分解即可.

$$\text{【详解】 解: } x^2y^2 - 5xy - 14 = (xy - 7)(xy + 2).$$

25. 因式分解: $4x^3 - 4x^2y - xy^2 + y^3$

【答案】 $(2x+y)(2x-y)(x-y)$

【解析】

【分析】利用分组分解法、提取公因式和平方差公式进行因式分解.

【详解】 $4x^3 - 4x^2y - xy^2 + y^3 = 4x^2(x-y) - y^2(x-y) = (4x^2 - y^2)(x-y) = (2x+y)(2x-y)(x-y)$.

故答案为: $(2x+y)(2x-y)(x-y)$.

【点睛】考查了综合因式分解法, 其中分组分解法适用于多项式不能直接使用提取公因式法、公式法与十字相乘法的多项式分解情况, 但分组分解法又比较灵活, 其分解的关键在于分组要适当, 因而我们需要牢记它的分组原则: ①分组后能直接提取公因式; ②分组后能直接运用公式.

26. 分解因式: $(m^2 - 1)^2 - 6(m^2 - 1) + 9$

【答案】 $(m-2)^2(m+2)^2$

【解析】

【分析】本题主要考查了分解因式, 先把 $m^2 - 1$ 看做一个整体, 利用完全平方公式分解因式, 再利用平方差公式分解因式即可.

【详解】解: $(m^2 - 1)^2 - 6(m^2 - 1) + 9$
 $= (m^2 - 1 - 3)^2$
 $= (m^2 - 4)^2$
 $= [(m-2)(m+2)]^2$
 $= (m-2)^2(m+2)^2$.

五、解答题 (本大题共 5 题, 27—30 每题 6 分, 31 题 8 分, 共 32 分)

27. 已知 $(x^2 + 4x + 2)(px - q)$ 的展开式中不含 x^2 项, 且一次项的系数为 14, 求常数 p 、 q 的值.

【答案】 $p = -1$, $q = -4$

【解析】

【分析】根据多项式乘以多项式的运算法则展开化简, 依题意, x^2 项的系数为 0, 一次项系数为 14, 列方程组求解即可

【详解】 $(x^2 + 4x + 2)(px - q)$
 $= px^3 + 4px^2 + 2px - qx^2 - 4qx - 2q$
 $= px^3 + (4p - q)x^2 + (2p - 4q)x - 2q$

依题意，得：

$$\begin{cases} 4p - q = 0 \\ 2p - 4q = 14 \end{cases}$$

$$\text{解得：} \begin{cases} p = -1 \\ q = -4 \end{cases}$$

$$\therefore p = -1, \quad q = -4$$

【点睛】 本题考查了整式的混合运算和多项式的定义，涉及的知识有：多项式乘以多项式，同底数幂的乘法，熟练掌握运算法则以及依据题意得到方程组是解本题的关键.

28. 已知 $(a^m)^n = a^3$ ， $2^m \div 2^{2n} = 16$ ，求 $(m + 2n)^2$ 的值.

【答案】 40

【解析】

【分析】 本题考查了幂的乘方，同底数幂除法，完全平方公式的变形等知识. 先根据 $(a^m)^n = a^3$ ， $2^m \div 2^{2n} = 16$ ，求出 $mn = 3$ ， $m - 2n = 4$ ，再将 $(m + 2n)^2$ 变形为 $(m - 2n)^2 + 8mn$ ，整体代入即可求解.

【详解】 解： $\because (a^m)^n = a^3$ ，

$$\therefore a^{mn} = a^3,$$

$$\therefore mn = 3,$$

$$\because 2^m \div 2^{2n} = 16,$$

$$\therefore 2^{m-2n} = 2^4,$$

$$\therefore m - 2n = 4,$$

$$\therefore (m + 2n)^2$$

$$= m^2 + 4n^2 + 4mn$$

$$= m^2 + 4n^2 - 4mn + 8mn$$

$$= (m - 2n)^2 + 8mn$$

$$= 4^2 + 8 \times 3$$

$$= 40.$$

29. 已知 $x - y = 5$, $x^2 + y^2 = 13$, 求代数式 $\frac{1}{3}x^4y^2 - \frac{2}{3}x^3y^3 + \frac{1}{3}x^2y^4$ 的值.

【答案】 300

【解析】

【分析】 本题考查了完全平方公式，因式分解等知识. 先根据 $x - y = 5$, $x^2 + y^2 = 13$, 得到 $xy = -6$, 再把 $\frac{1}{3}x^4y^2 - \frac{2}{3}x^3y^3 + \frac{1}{3}x^2y^4$ 因式分解为 $\frac{1}{3}x^2y^2(x - y)^2$, 再整体代入即可求解.

【详解】 解: $\because x - y = 5$,

$$\therefore (x - y)^2 = 25,$$

$$\text{即 } x^2 + y^2 - 2xy = 25,$$

$$\because x^2 + y^2 = 13,$$

$$\therefore 2xy = -12,$$

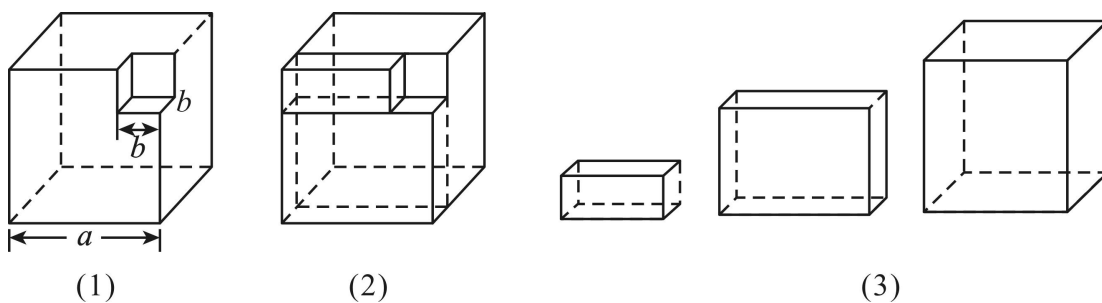
$$\therefore xy = -6.$$

$$\begin{aligned} \therefore & \frac{1}{3}x^4y^2 - \frac{2}{3}x^3y^3 + \frac{1}{3}x^2y^4 \\ &= \frac{1}{3}x^2y^2(x^2 - 2xy + y^2) \\ &= \frac{1}{3}x^2y^2(x - y)^2 \\ &= \frac{1}{3} \times (-6)^2 \times 25 \\ &= 300 \end{aligned}$$

30. 阅读材料:

在乘法公式的学习中, 我们通过用不同的方法求同一平面图形的面积验证了平方差公式和完全平方公式. 这种方法称为等面积法. 类似地, 通过不同的方法求同一个立体图形的体积, 称为等体积法. 根据课堂学习的经验, 解决下列问题:

在一个棱长为 a 的正方体中挖出一个棱长为 b 的正方体, 如图 (1) 所示. 然后切割剩余的立体图形, 如图 (2) 所示. 将之分成三部分, 如图 (3) 所示. 这三部分长方体的体积依次为 $b^2(a - b)$ 、 $ab(a - b)$ 、 $a^2(a - b)$.



- (1) 将图 (3) 中三块长方体体积和因式分解: $a^2(a-b) + ab(a-b) + b^2(a-b) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (2) 图 (1) 中立方体的体积和图 (3) 中三块长方体体积和相同, 利用等体积法能得到等式: $\underline{\hspace{2cm}}$.
- (3) 利用在 (2) 中所得到的等式进行因式分解: $x^3 - 27 = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (4) 应用: 若已知 $2a - 3b = 3$, $ab = 1$, 则 $8a^4b - 27ab^4$ 的值.

【答案】(1) $(a-b)(a^2 + ab + b^2)$

(2) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

(3) $(x-3)(x^2 + 3x + 9)$

(4) 81

【解析】

【分析】此题主要考查了因式分解的应用, 立方差公式的几何背景, 乘法公式在因式分解中的应用, 正方体的体积公式等, 理解题意, 熟练掌握因式分解的方法与技巧, 乘法公式的结构特征是解决问题的关键.

(1) 根据提公因式法可得;

(2) 由 (1) 可得, 立体图形体积等于图 3 的三个立体图形的体积和, 可得立体图形体积关系是:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2);$$

(3) 根据 $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$, 可进一步分解因式;

(4) 根据上述公式进行因式分解, 同时运用完全平方公式进行变形可得.

【小问 1 详解】

解: 分解因式: $a^2(a-b) + ab(a-b) + b^2(a-b) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$,

故答案为: $(a-b)(a^2 + ab + b^2)$;

【小问 2 详解】

解: 图 (1) 中立方体的体积可表示为 $a^3 - b^3$;

图 (1) 中立方体的体积也可表示为 $a^2(a-b) + ab(a-b) + b^2(a-b)$ 即 $(a-b)(a^2 + ab + b^2)$;

利用等体积法, 能得到公式: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$,

故答案为: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$;

【小问 3 详解】

解: $x^3 - 27 = x^3 - 3^3 = (x-3)(x^2 + 3x + 9)$;

【小问 4 详解】

解: 因为 $2a - 3b = 3$, $ab = 1$,

所以 $8a^4b - 27ab^4 = ab[(2a)^3 - (3b)^3] = ab(2a - 3b)(4a^2 + 6ab + 9b^2)$

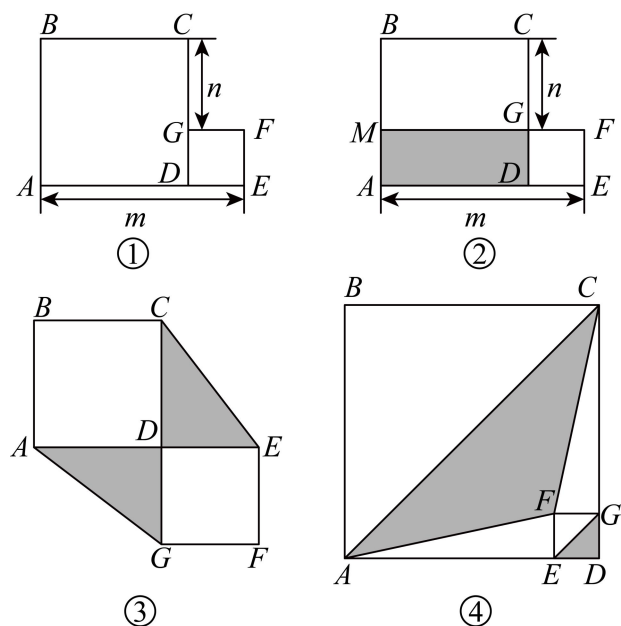
$= ab(2a - 3b)[(2a - 3b)^2 + 18ab]$

$= 1 \times 3 \times (3^2 + 18 \times 1)$

$= 3 \times 27 = 81$,

故答案为: 81.

31. 现有若干个正方形纸片, 从中任取两个大小不等的正方形如下图摆放, A 、 D 、 E 三点在一条直线上.



(1) 如图①, $AE = m$, $CG = n$, 这两个正方形的面积之差是_____。(用 m 、 n 的代数式表示)

(2) 如图②, 如果大正方形 $ABCD$ 和小正方形 $DEFG$ 的面积之和是 4, 图中阴影部分的面积为 1, 则 $(mn)^2$ 是_____.

(3) 如图③, 大正方形 $ABCD$ 和小正方形 $DEFG$ 的面积之和是 25, AE 的长度等于 7, 图中阴影部分的

面积是_____.

(4) 如图④, 正方形 $ABCD$ 和正方形 $DEFG$ 的边长分别为 a 、 b ($a > b$), 如果 $a + b = 10$, $ab = 6$, 求图中阴影部分面积之和是多少?

【答案】 (1) mn

(2) 12

(3) 12 (4) 38

【解析】

【分析】 本题主要考查了完全平方公式在几何图形中的应用, 二元一次方程组的应用, 三角形面积计算, 正方形面积计算, 长方形面积计算, 解题的关键是数形结合, 熟练掌握完全平方公式.

(1) 设正方形 $ABCD$ 的边长为 x , 正方形 $DEFG$ 的边长为 y , ($x > y$), 根据题意得出 $\begin{cases} x + y = m \\ x - y = n \end{cases}$, 求出

$$\begin{cases} x = \frac{m+n}{2} \\ y = \frac{m-n}{2} \end{cases}, \text{再根据正方形的面积公式求差即可;}$$

(2) 根据大正方形 $ABCD$ 和小正方形 $DEFG$ 的面积之和是 4, 图中阴影部分的面积为 1, 结合解析 (1)

$$\text{可得} \begin{cases} \frac{m^2 + n^2}{2} = 4 \\ \frac{m+n}{2} \times \frac{m-n}{2} = 1 \end{cases}, \text{求出} \begin{cases} m^2 = 6 \\ n^2 = 2 \end{cases}, \text{最后求出结果即可;}$$

(3) 设正方形 $ABCD$ 的边长为 x , 正方形 $DEFG$ 的边长为 y , 根据大正方形 $ABCD$ 和小正方形 $DEFG$ 的面积之和是 25, AE 的长度等于 7, 得出 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = AE = 7 \end{cases}$, 求出 $xy = 12$, 再根据三角形面积公式求出结果即可;

(4) 根据 $a + b = 10$, $ab = 6$, 求出 $(a - b)^2 = 76$, 根据阴影部分的面积为 $\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2 - 2 \times \frac{1}{2}b(a - b)$, 然后再变形求值即可.

【小问 1 详解】

解: 设正方形 $ABCD$ 的边长为 x , 正方形 $DEFG$ 的边长为 y , ($x > y$),

$$\text{根据题意得} \begin{cases} x + y = m \\ x - y = n \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = \frac{m+n}{2} \\ y = \frac{m-n}{2} \end{cases},$$

∴ 这两个正方形的面积之差是:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 - \left(\frac{m-n}{2}\right)^2 \\ &= \frac{(m+n)^2}{4} - \frac{(m-n)^2}{4} \\ &= \frac{m^2 + 2mn + n^2}{4} - \frac{m^2 - 2mn + n^2}{4} \\ &= \frac{4mn}{4} \\ &= mn. \end{aligned}$$

【小问 2 详解】

解: 由 (1) 可得 $x^2 + y^2$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m-n}{2}\right)^2 \\ &= \frac{(m+n)^2}{4} + \frac{(m-n)^2}{4} \\ &= \frac{m^2 + 2mn + n^2}{4} + \frac{m^2 - 2mn + n^2}{4} \\ &= \frac{2m^2 + 2n^2}{4} \\ &= \frac{m^2 + n^2}{2}. \end{aligned}$$

∵ 大正方形 $ABCD$ 和小正方形 $DEFG$ 的面积之和是 4, 图中阴影部分的面积为 1,

$$\therefore \begin{cases} \frac{m^2 + n^2}{2} = 4 \\ \frac{m+n}{2} \cdot \frac{m-n}{2} = 1 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} m^2 = 6 \\ n^2 = 2 \end{cases},$$

$$\therefore (mn)^2 = m^2 n^2 = 6 \times 2 = 12.$$

【小问 3 详解】

解：设正方形 $ABCD$ 的边长为 x ，正方形 $DEFG$ 的边长为 y ，

$$\text{根据题意得} \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = AE = 7 \end{cases},$$

$$\therefore xy = \frac{(x+y)^2 - (x^2 + y^2)}{2} = \frac{7^2 - 25}{2} = 12,$$

$$\therefore \text{阴影部分的面积之和为 } 2 \times \frac{1}{2} xy = xy = 12.$$

【小问 4 详解】

解： $\because a + b = 10, ab = 6,$

$$\therefore (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$$

$$= 10^2 - 4 \times 6$$

$$= 100 - 24$$

$$= 76,$$

$\therefore$ 阴影部分的面积为：

$$\frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{2} b^2 - 2 \times \frac{1}{2} b(a-b)$$

$$= \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{2} b^2 - ab + b^2$$

$$= \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2 - ab$$

$$= \frac{1}{2} (a-b)^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 76$$

$$= 38.$$