

上海市建平实验中学 2025 学年第一学期期中阶段练习

初一数学

(完卷时间: 90 分钟 满分: 100 分)

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每题 3 分, 共 18 分)

1. 下列单项式中, 与 a^2b 是同类项的是 ()

A. $-2a^2b$

B. a^2b^2

C. $-ab^2$

D. $3ab$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了同类项的定义, 所含字母相同, 并且相同字母的指数也相同的单项式是同类项, 据此可得答案.

【详解】解: 根据同类项的定义可知, 四个式子中只有式子 $-2a^2b$ 与 a^2b 是同类项,
故选: A.

2. 下列计算正确的是 ()

A. $x^3 + x^3 = x^6$

B. $x^6 \div x^3 = x^2$

C. $(-x^3)^2 = x^6$

D. $(-x^2y)^3 = x^6y^3$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查幂的运算性质, 包括同底数幂的除法、幂的乘方以及积的乘方; 需要根据运算法则逐一判断每个选项是否正确.

【详解】解: $\because$ 选项 A: 根据合并同类项 $x^3 + x^3 = 2x^3 \neq x^6$, 故 A 错误;
 $\because$ 选项 B: 同底数幂相除, 指数相减, 即 $x^6 \div x^3 = x^{6-3} = x^3 \neq x^2$, 故 B 错误;
 $\because$ 选项 C: 幂的乘方, 指数相乘, 且负数的偶次幂为正, 即 $(-x^3)^2 = (-1)^2 \cdot (x^3)^2 = 1 \cdot x^6 = x^6$, 故 C 正确;
 $\because$ 选项 D: 积的乘方, 等于乘方的积, 且负数的奇次幂为负, 即
 $(-x^2y)^3 = (-1)^3 \cdot (x^2)^3 \cdot y^3 = -1x^6y^3 = -x^6y^3 \neq x^6y^3$, 故 D 错误;
故选: C.

3. 下列从左到右的变形是因式分解的是 ()

A. $(x+2)(x-2)=x^2-4$

B. $x^3-4x^2+x=x(x^2-4x)$

C. $x^2-4=(x+2)(x-2)$

D. $x^2-2x-3=(x-1)^2-4$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查因式分解的定义，把一个多项式化为几个整式的积的形式叫做因式分解，需检查各选项左边是否为多项式，右边是否为整式的积，且等式成立.

【详解】解：A、 $(x+2)(x-2)=x^2-4$ 的等式右边不是乘积形式，不是因式分解，不符合题意；

B、 $x^3-4x^2+x \neq x(x^2-4x)=x^3-4x^2$ ，不是因式分解，不符合题意；

C、 $x^2-4=(x+2)(x-2)$ 是因式分解，符合题意；

D、 $x^2-2x-3=(x-1)^2-4$ 的等式右边不是乘积形式，不是因式分解，不符合题意；

故选：C.

4. 如果 $(x+1)(3x+a)$ 的乘积中不含 x 的一次项，则 a 为 ()

A. 3

B. -3

C. $\frac{1}{3}$

D. $-\frac{1}{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】先对 $(x+1)(3x+a)$ 进行化简，然后再根据乘积中不含 x 的一次项建立方程求解即可.

【详解】解：由题意得： $(x+1)(3x+a)=3x^2+(a+3)x+a$ ，

$\therefore$ 乘积中不含 x 的一次项，

$$\therefore a+3=0,$$

$$\therefore a=-3;$$

故选 B.

【点睛】本题主要考查多项式乘多项式，熟练掌握多项式乘多项式是解题的关键.

5. 对于任何正整数 x ，多项式 $(4x-3)^2-1$ 的值都能 ()

A. 都能被 x 整除

B. 都能被 $x+1$ 整除

C. 都能被 $2x+1$ 整除

D. 都能被 8 整除

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了因式分解的应用，掌握解答的方法是关键；

通过平方差公式分解多项式，得到表达式含有因子 8，因此对于任何正整数 x ，其值都能被 8 整除.

【详解】解： $\because (4x-3)^2-1$

$$= (4x-3)^2-1^2$$
$$= (4x-3-1)(4x-3+1)$$
$$= (4x-4)(4x-2)$$
$$= 4(x-1) \times 2(2x-1)$$
$$= 8(x-1)(2x-1),$$

$\therefore$ 对于任何正整数 x ，该多项式的值都是 8 的倍数，因此都能被 8 整除

故选：D.

6. 数学服务于生活，灵活运用数学知识解决生活中的问题是需要倡导的重要理念. 在日常生活中如取款上网等都需要有密码，有一种用“因式分解”法产生的密码，方便记忆. 原理：如多项式 x^4-y^4 因式分解的结果为 $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$ ，当 $x=9$ ， $y=9$ 时，各因式的值是 $x-y=0$ ， $x+y=18$ ， $x^2+y^2=162$ ，于是密码就可以为 018162，也可以是 180162，对于多项式 $9x^3-xy^2$ ，取 $x=12$ ， $y=12$ 时，密码不可能为 ()

- A. 124824 B. 241248 C. 122448 D. 482124

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查因式分解的应用，涉及提公因式法和平方差公式，理解新定义，正确因式分解，是解答的关键. 先对多项式 $9x^3-xy^2$ 进行因式分解，提取公因式后应用平方差公式，得到 $x(3x-y)(3x+y)$ ，代入 $x=12$ 和 $y=12$ ，计算各因式的值，得到 12、24、48；密码由这三个数字按任意顺序拼接成六位数，列出所有可能组合，与选项对比即可判断.

【详解】解： $\because 9x^3-xy^2 = x(9x^2-y^2) = x(3x-y)(3x+y)$ ，

且 $x=12$ ， $y=12$ ，

$\therefore x=12$ ，

$3x-y = 3 \times 12 - 12 = 24$ ，

$$3x + y = 3 \times 12 + 12 = 48,$$

∴ 因式值为 12、24、48,

可能密码有: 122448、124824、241248、244812、481224、482412

选项 A (124824)、B (241248)、C (122448) 均符合,

选项 D (482124) 无法拆分为 12、24、48 的任意排列,

∴ 密码不可能为 D.

故选: D.

二、填空题 (本大题共 12 小题, 每题 2 分, 共 24 分)

7. 单项式 $-\frac{2xy^5}{3}$ 的次数是_____.

【答案】 6

【解析】

【分析】 本题主要考查了求单项式的次数, 单项式的次数是该单项式中所有字母的指数之和, 据此求解即可.

【详解】 解: 单项式 $-\frac{2xy^5}{3}$ 的次数是 $1+5=6$.

故答案为: 6.

8. 用代数式表示 “ x 与 y 的差的平方的一半”: _____.

【答案】 $\frac{1}{2}(x-y)^2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了列代数式, 由 x 与 y 的差表示为 $(x-y)$, 其平方为 $(x-y)^2$, 一半为 $\frac{1}{2}(x-y)^2$ 解答即可.

【详解】 解: 用代数式表示 “ x 与 y 的差的平方的一半” 为 $\frac{1}{2}(x-y)^2$,

故答案为: $\frac{1}{2}(x-y)^2$.

9. 把多项式 $3x^2y - 6xy^2 + 4x^3y^3 - 1$ 按字母 x 进行降幂排列_____.

【答案】 $4x^3y^3 + 3x^2y - 6xy^2 - 1$

【解析】

【分析】 先确定各项中 x 的指数, 再按各项中 x 指数由大到小顺序排列即可.

【详解】解：把多项式 $3x^2y - 6xy^2 + 4x^3y^3 - 1$ 按字母 x 进行降幂排列为 $4x^3y^3 + 3x^2y - 6xy^2 - 1$ ，

故答案为： $4x^3y^3 + 3x^2y - 6xy^2 - 1$

【点睛】此题考查了将多项式按某字母进行降幂排列，关键是能准确理解并运用将多项式按某字母进行降幂排列的知识.

10. 已知单项式 $-2x^{n+2}y^3$ 与 $\frac{1}{3}xy^{m-1}$ 是同类项，则 $n^m =$ _____.

【答案】 1

【解析】

【分析】本题主要考查了同类项的定义，代数式求值，所含字母相同，并且相同字母的指数也相同的单项式是同类项，据此求出 m 、 n 的值，再代入计算即可得到答案.

【详解】解： $\because$ 单项式 $-2x^{n+2}y^3$ 与 $\frac{1}{3}xy^{m-1}$ 是同类项，

$$\therefore n+2=1, \quad m-1=3,$$

$$\therefore m=4, \quad n=-1,$$

$$\therefore n^m = (-1)^4 = 1,$$

故答案为： 1.

11. 计算： $2ab^2 \cdot 3abc =$ _____.

【答案】 $6a^2b^3c$

【解析】

【分析】本题考查了单项式与单项式的乘法运算，直接根据单项式与单项式的乘法运算法则求解即可.

【详解】解： $2ab^2 \cdot 3abc = 6a^2b^3c$ ，

故答案为： $6a^2b^3c$.

12. 计算： $-2(x+y)(y-x) =$ _____.

【答案】 $2x^2 - 2y^2$

【解析】

【分析】本题考查了平方差公式，单项式乘多项式和合并同类项，根据平方差公式以及单项式乘多项式的计算方法进行计算即可，掌握平方差公式的结构特征以及单项式乘多项式的计算方法是解题的关键.

【详解】原式 $= -2(x+y)(y-x)$

解：原式 $= -2(-x^2 + y^2)$

$$= -2 \cdot (-x^2) + (-2) \cdot y^2$$

$$= 2x^2 - 2y^2$$

故答案为： $2x^2 - 2y^2$.

13. 计算： $(ax^2 + 2ax) \div ax = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x + 2$ ## $2 + x$

【解析】

【分析】 本题主要考查了多项式除以单项式， 直接根据多项式除以单项式的计算法则求解即可.

【详解】 解： $(ax^2 + 2ax) \div ax = x + 2$,

故答案为： $x + 2$.

14. 计算： $(a + 2b - 3)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $a^2 + 4ab + 4b^2 - 6a - 12b + 9$

【解析】

【分析】 本题考查完全平方公式的应用，把 $a + 2b - 3$ 看成 $(a + 2b) - 3$ ， 然后根据完全平方公式计算即可.

【详解】 解： $(a + 2b - 3)^2$

$$= [(a + 2b) - 3]^2$$

$$= (a + 2b)^2 - 6(a + 2b) + 9$$

$$= a^2 + 4ab + 4b^2 - 6a - 12b + 9 .$$

故答案为： $a^2 + 4ab + 4b^2 - 6a - 12b + 9$.

15. 计算： $\left(-\frac{1}{4}\right)^{12} \times 8^8 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 1

【解析】

【分析】 利用积的乘方公式逆用简便计算即可.

【详解】 $\left(-\frac{1}{4}\right)^{12} \times 8^8$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{24} \times 2^{24}$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times 2\right)^{24}$$

$$= 1^{24}$$

$$= 1.$$

故答案为：1.

【点睛】 本题主要考查积的乘方，能够熟练逆运用积的乘方公式是解题关键

16. 因式分解： $4x^2 - 15x + 9 =$ _____.

【答案】 $(4x-3)(x-3)$

【解析】

【分析】 本题考查因式分解，利用十字相乘法对二次三项式进行因式分解；通过寻找两个数，其乘积为二次项系数与常数项的乘积，且和为一次项系数，从而分解因式.

【详解】 解： $4x^2 - 15x + 9$

$$\text{原式} = (4x-3)(x-3)$$

故答案为： $(4x-3)(x-3)$.

17. 已知若 $x - \frac{1}{x} = 3$ ，则 $x^2 + \frac{1}{x^2} =$ _____ .

【答案】 11

【解析】

【分析】 本题主要考查了分式的求值，根据完全平方公式可得 $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = 9$ ，据此可得答案.

【详解】 解： $\because x - \frac{1}{x} = 3$,

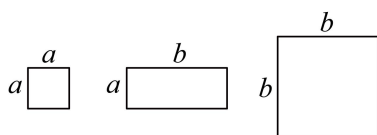
$$\therefore \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 3^2,$$

$$\therefore x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = 9,$$

$$\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = 11,$$

故答案为：11.

18. 若取图中的若干个（三种图形都要取到）拼成一个长方形，使其面积为 $4a^2 + mab + 5b^2$ ，则 m 的值为 _____.



A类

B类

C类

【答案】 9 或 12 或 21

【解析】

【分析】 本题主要考查了因式分解，根据题意可得 $4a^2 + mab + 5b^2 = (a+b)(4a+5b)$ 或 $4a^2 + mab + 5b^2 = (a+5b)(4a+b)$ 或 $4a^2 + mab + 5b^2 = (2a+b)(2a+5b)$ ，据此可得答案.

【详解】 解： $\because 5 = 1 \times 5, 4 = 1 \times 4 = 2 \times 2$ ，

$$\therefore 4a^2 + mab + 5b^2 = (a+b)(4a+5b) = 4a^2 + 9ab + 5b^2 \text{ 或}$$

$$4a^2 + mab + 5b^2 = (a+5b)(4a+b) = 4a^2 + 21ab + 5b^2 \text{ 或}$$

$$4a^2 + mab + 5b^2 = (2a+b)(2a+5b) = 4a^2 + 12ab + 5b^2,$$

$\therefore m$ 的值可以是 9 或 12 或 21,

故答案为： 9 或 12 或 21.

三、简答题 (本大题共 6 小题，每题 5 分，共 30 分)

19. 计算： $-x^2 \cdot [(-x)^2]^3$

【答案】 $-x^8$

【解析】

【分析】 本题主要考查了同底数幂的乘法计算，幂的乘方计算，先计算幂的乘方，再计算同底数幂乘法即可得到答案.

【详解】 解： $-x^2 \cdot [(-x)^2]^3$

$$= -x^2 \cdot (x^2)^3$$

$$= -x^2 \cdot x^6$$

$$= -x^8.$$

20. 计算： $(2a-b)(2a+b) - (2a+1)(2a-b-1)$

【答案】 $2ab + b - b^2 + 1$

【解析】

【分析】 本题考查整式混合运算，掌握平方差公式，正确计算是本题的解题关键；

用平方差公式和单项式乘多项式的法则进行计算，然后合并同类项.

【详解】 解： 原式 $= (2a)^2 - b^2 - (4a^2 - 2ab - 2a + 2a - b - 1)$

$$= 4a^2 - b^2 - 4a^2 + 2ab + 2a - 2a + b + 1$$

$$= 2ab + b - b^2 + 1.$$

21. 计算： $2x^2y^3(2x^2 - 3xy + 5y^2) \div (-4x^2y^2)$

【答案】 $-x^2y + \frac{3}{2}xy^2 - \frac{5}{2}y^3$

【解析】

【分析】 本题考查了单项式乘以多项式和多项式除以单项式，根据单项式乘以多项式法则和多项式除以单项式法则计算即可.

【详解】 解： 原式 $= (4x^4y^3 - 6x^3y^4 + 10x^2y^5) \div (-4x^2y^2)$

$$= 4x^4y^3 \div (-4x^2y^2) - 6x^3y^4 \div (-4x^2y^2) + 10x^2y^5 \div (-4x^2y^2)$$

$$= -x^2y + \frac{3}{2}xy^2 - \frac{5}{2}y^3.$$

22. 因式分解： $x^2 + 3y - xy - 3x$

【答案】 $(x-3)(x-y)$

【解析】

【分析】 本题考查因式分解，解题的关键是掌握提公因式法进行求解；

利用分组分解法对 $x^2 + 3y - xy - 3x$ 进行因式分解，再提取公因式，即可得到答案.

【详解】 解： 原式 $= x^2 - xy + 3y - 3x$

$$= x(x-y) - 3(x-y)$$

$$= (x-y)(x-3).$$

23. 因式分解： $4x^2 - 4xy + y^2 - 9$

【答案】 $(2x-y+3)(2x-y-3)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了因式分解，先由完全平方公式把前三项因式分解，再利用平方差公式因式分解即

可.

【详解】解: $4x^2 - 4xy + y^2 - 9$

$$= (2x - y)^2 - 3^2$$

$$= (2x - y + 3)(2x - y - 3).$$

24. 因式分解: $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12$

【答案】 $(x - 2)(x + 1)(x - 3)(x + 2)$

【解析】

【分析】 本题考查因式分解, 先整体思想, 利用十字相乘法进行因式分解即可.

【详解】解: 原式 $= (x^2 - x - 2)(x^2 - x - 6)$

$$= (x - 2)(x + 1)(x - 3)(x + 2).$$

四、解答题 (本大题共 4 小题, 25-27 题每题 6 分, 28 题 10 分, 共 28 分)

25. 先化简, 再求值: $(ab + 1)(ab - 2) - 2a^2b^2 + 2$ 除以 $-\frac{1}{2}ab$, 其中, $a = \frac{3}{5}$, $b = -\frac{10}{7}$.

【答案】 $2ab + 2$; $\frac{2}{7}$

【解析】

【分析】 本题考查整式的化简求值, 解题的关键是熟练运用整式的运算法则.

先利用多项式乘法法则展开括号内的式子, 合并同类项后再进行除法运算化简, 最后代入 a, b 的值计算即可.

【详解】解: $[(ab + 1)(ab - 2) - 2a^2b^2 + 2] \div \left(-\frac{1}{2}ab\right)$

$$= [a^2b^2 - 2ab + ab - 2 - 2a^2b^2 + 2] \div \left(-\frac{1}{2}ab\right)$$

$$= (a^2b^2 - ab - 2a^2b^2) \div \left(-\frac{1}{2}ab\right)$$

$$= (-a^2b^2 - ab) \div \left(-\frac{1}{2}ab\right)$$

$$= (-a^2b^2) \div \left(-\frac{1}{2}ab\right) + (-ab) \div \left(-\frac{1}{2}ab\right)$$

$$= 2ab + 2$$

将 $a = \frac{3}{5}, b = -\frac{10}{7}$ 代入上式:

$$2 \times \frac{3}{5} \times \left(-\frac{10}{7}\right) + 2$$

$$= 2 \times \left(-\frac{6}{7}\right) + 2$$

$$= -\frac{12}{7} + \frac{14}{7}$$

$$= \frac{2}{7}.$$

26. 已知 $3^m = 6$, $3^n = 2$, 求 3^{m-n} , 3^{2m+3n} 的值.

【答案】 3; 288

【解析】

【分析】 本题主要考查了同底数幂的乘法的逆运算, 幂的乘方的逆运算, 解题的关键在于能够熟练掌握相关计算法则.

【详解】 解: ① $3^{m-n} = 3^m \div 3^n = 6 \div 2 = 3$;

$$\textcircled{2} 3^{2m+3n} = (3^m)^2 \times (3^n)^3 = 6^2 \times 2^3 = 288.$$

27. 已知 $P = 3x^2 + mx - \frac{1}{3}y + 4$, $Q = 2x - 3y + 1 - nx^2$.

(1) 关于 x , y 的式子 $P - 2Q$ 不存在字母 x 的一次项和二次项, 求式子 $(m + 3n) - (3m - n)$ 的值;

(2) 当 $x \neq 0$ 且 $y \neq 0$ 时, 若 $3P - \frac{1}{3}Q = \frac{35}{3}$ 恒成立, 求 m 、 n 的值.

【答案】 (1) -14

$$(2) n = -27, m = \frac{2}{9}$$

【解析】

【分析】 (1) 首先化简 $P - 2Q$, 然后根据其取值与字母 x 的取值无关列出 m 、 n 的方程, 求出 m 、 n 的值, 再代入求值即可;

(2) 首先根据 $3P - \frac{1}{3}Q = \frac{35}{3}$ 恒成立列出 m 、 n 的方程, 求出 m 、 n 的值即可.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } P-2Q = \left(3x^2 + mx - \frac{1}{3}y + 4\right) - 2(2x - 3y + 1 - nx^2)$$

$$= 3x^2 + mx - \frac{1}{3}y + 4 - 4x + 6y - 2 + 2nx^2$$

$$= (3+2n)x^2 + (m-4)x + \frac{17}{3}y + 2$$

$\therefore$ 关于 x, y 的式子 $P-2Q$ 不存在字母 x 的一次项和二次项

$$\therefore 3+2n=0 \text{ 或 } m-4=0,$$

$$\therefore n = -\frac{3}{2}, \quad m = 4,$$

$$\therefore \text{将 } n = -\frac{3}{2}, \quad m = 4 \text{ 代入 } (m+3n) - (3m-n) = m+3n-3m+n = 4n-2m \text{ 得}$$

$$\text{原式 } 4 \times \left(-\frac{3}{2}\right) - 2 \times 4 = -14,$$

【小问 2 详解】

$$\therefore \text{若 } 3P - \frac{1}{3}Q = \frac{35}{3} \text{ 恒成立}$$

$$\therefore 3\left(3x^2 + mx - \frac{1}{3}y + 4\right) - \frac{1}{3}(2x - 3y + 1 - nx^2) = \frac{35}{3}$$

$$(9x^2 + 3mx - y + 12) - \left(\frac{2}{3}x - y + \frac{1}{3} - \frac{n}{3}x^2\right) = \frac{35}{3}$$

$$9x^2 + 3mx - y + 12 - \frac{2}{3}x + y - \frac{1}{3} + \frac{n}{3}x^2 = \frac{35}{3}$$

$$\left(9 + \frac{n}{3}\right)x^2 + \left(3m - \frac{2}{3}\right)x + \frac{35}{3} = \frac{35}{3}$$

$$\left(9 + \frac{n}{3}\right)x^2 + \left(3m - \frac{2}{3}\right)x = 0$$

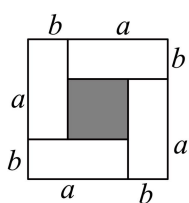
$$\therefore x \neq 0 \text{ 且 } y \neq 0$$

$$\therefore 9 + \frac{n}{3} = 0, \quad 3m - \frac{2}{3} = 0$$

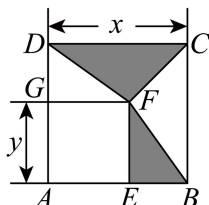
$$\therefore n = -27, \quad m = \frac{2}{9}$$

【点睛】 本题主要考查了整式的加减运算，熟练掌握去括号法则与合并同类项法则是解题关键.

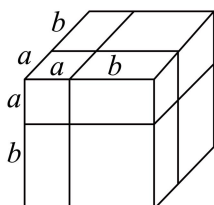
28. 通常，用两种不同的方法计算同一个图形的面积，可以得到一个恒等式.



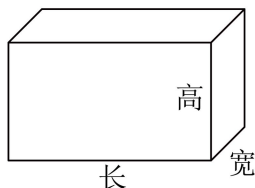
①



②



③



(1) 请利用图①所得的恒等式解决如下问题：若 $(a+b)^2 = 9$ ， $a-b=1$ ，求 ab 的值；

(2) 正方形 $ABCD$ 、正方形 $AEGF$ 如图②所示方式摆放，边长分别为 x 、 y 。若 $x^2 + y^2 = 74$ ， $BE = 2$ ，求图中阴影部分的面积；

(3) 类似的，用两种不同的方法计算同一个几何体的体积，也可以得到一个恒等式。图③是由 2 个正方体和 6 个长方体拼成的一个大正方体，请直接写出一个恒等式：_____；注：长方体体积 = 长 $\times$ 宽 $\times$ 高

(4) 已知 $a+b=4$ ， $ab=3$ ，利用 (3) 中的恒等式求 $\frac{a^3+b^3}{2}$ 的值。

【答案】 (1) 2 (2) 12

$$(3) a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2$$

(4) 14

【解析】

【分析】 本题考查完全平方公式和立方公式，利用数形结合的思想求解是解题的关键；

(1) 用两种方式表示出大正方形面积即可求解；

(2) 根据四边形 $ABCD$ 和 $AEGF$ 都是正方形，可得 $BC = AB = DC = x$ ， $AE = AG = EF = y$ ，则 $BE = x - y = 2$ ，再根据 $x^2 + y^2 = 74$ 结合 (1) 所求求出 $x + y$ ，根据 $S_{\text{阴影}} = S_{\triangle DFC} + S_{\triangle EBF}$ ，即可求解；

(3) 根据题意可得，正方体体积表示为 $(a+b)^3$ 或 $a^3 + a^2b + a^2b + ab^2 + a^2b + ab^2 + ab^2 + b^3$ ，即可求解；

(4) 根据 $a+b=4$ ， $ab=3$ ，结合 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 即可求解；

【小问 1 详解】

解：由图①可知，大正方形面积为 $(a+b)^2$ 或 $(a-b)^2 + 4ab$ ，

$$\therefore (a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab,$$

$$\because (a+b)^2 = 9, a-b=1,$$

$$\therefore 9 = 1^2 + 4ab,$$

$$\therefore ab = 2$$

【小问 2 详解】

解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 和 $AEFG$ 都是正方形，

$$\therefore BC = AB = DC = x, \quad AE = AG = EF = y,$$

$$\because BE = 2$$

$$\therefore x - y = BE = 2,$$

$$\therefore (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = 4,$$

$$\text{又} \because x^2 + y^2 = 74,$$

$$\therefore xy = 35,$$

$$\therefore (x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy = 2^2 + 35 \times 4 = 144,$$

$$\because x + y > 0,$$

$$\therefore x + y = 12$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\triangle DFC} + S_{\triangle EBF}$$

$$= \frac{1}{2}x(x - y) + \frac{1}{2} \times 2y$$

$$= \frac{1}{2} \times 2(x + y)$$

$$= x + y$$

$$= 12,$$

即阴影部分的面积为 12；

【小问 3 详解】

解：由图③得，正方形体积表示为 $(a + b)^3$ ，

也可以表示为 $a^3 + a^2b + a^2b + ab^2 + a^2b + ab^2 + ab^2 + b^3$ ，

$$\therefore (a + b)^3 = a^3 + a^2b + a^2b + ab^2 + a^2b + ab^2 + ab^2 + b^3,$$

$$\text{即 } a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3a^2b - 3ab^2$$

【小问 4 详解】

解：由 (3) 可得 $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3a^2b - 3ab^2$ ，

$$= (a+b)^3 - 3ab(a+b),$$

$$\because a+b=4, \quad ab=3,$$

$$\therefore a^3 + b^3 = 4^3 - 3 \times 3 \times 4 = 28,$$

$$\therefore \frac{a^3 + b^3}{2} = 14.$$