

2025 学年度第一学期期中考试七年级数学学科试卷

(满分 100 分，考试时间 90 分钟)

一、选择题 (本大题共 6 题，每题 2 分，共 12 分)

1. 单项式 $-5a^2b$ 的次数是 ()

A. 2

B. -5

C. 3

D. -10

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题主要考查了单项式的次数，熟练掌握单项式次数的定义，是解题的关键. 根据单项式次数的定义，“单项式的次数是单项式中所有字母的指数和”，进行解答即可.

【详解】 解：根据单项式定义得： $-5a^2b$ 的次数为： $2+1=3$.

故选： C.

2. 若 $-2a^nb^5$ 与 $5a^3b^{2m+n}$ 是同类项， m 值是 ()

A. 2

B. 0

C. -1

D. 1

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题主要考查了同类项的定义，熟练掌握所含字母相同，且相同字母的指数相同的两个单项式，称为同类项是解题的关键.

根据同类项的定义，可得 $n=3$ ， $2m+n=5$ ，即可求解.

【详解】 解： $\because -2a^nb^5$ 与 $5a^3b^{2m+n}$ 是同类项，

$\therefore n=3$ ， $2m+n=5$ ，

解得： $n=3$ ， $m=1$ ，

故选： D

3. 下列各式计算正确的是 ()

A. $2x^2 - x^2 = 1$

B. $x^2 \cdot x^3 = x^6$

C. $(2x^2)^3 = 6x^6$

D. $x^3 \div x^2 = x$

【答案】 D

【解析】

【分析】 直接利用合并同类项法则以及同底数幂的乘除运算法则、积的乘方运算法则分别计算，进而得出答案.

【详解】A. $2x^2 - x^2 = x^2$ ，故此选项不合题意；

B. $x^2 \times x^3 = x^5$ ，故此选项不合题意；

C. $(2x^2)^3 = 8x^6$ ，故此选项不合题意；

D. $x^3 \div x^2 = x$ ，故此选项符合题意.

故选：D.

【点睛】此题主要考查了合并同类项以及同底数幂的乘除运算、积的乘方运算，正确掌握相关运算法则是解题关键.

4. 下列等式从左到右的变形，是因式分解的是（ ）

A. $2x(x-3) = 2x^2 - 6x$

B. $12m^2n = 3m^2 \times 4n$

C. $a^2 - 2ab + b^2 - 1 = (a-b)^2 - 1$

D. $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了因式分解，因式分解是把一个多项式转化成几个整式积的形式. 根据定义逐一判定即可得答案.

【详解】解：A、 $2x(x-3) = 2x^2 - 6x$ ，是整式乘法，不是因式分解，故本选项不合题意；

B、 $12m^2n = 3m^2 \times 4n$ ，等式左边不是多项式，不是因式分解，故本选项不合题意；

C、 $a^2 - 2ab + b^2 - 1 = (a-b)^2 - 1$ ，等式的右边不是积的形式，不是因式分解，故本选项不合题意；

D、 $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ ，是因式分解，故本选项符合题意；

故选：D.

5. 已知 $(x-2021)^2 + (x-2025)^2 = 34$ ，则 $(x-2023)^2$ 的值是（ ）

A. 5

B. 9

C. 13

D. 17

【答案】C

【解析】

【分析】设 $A = x - 2021$ ， $B = x - 2025$ ，根据完全平方公式的变形求出 $AB = 9$ ，则 $[(x-2023)+2][(x-2023)-2] = 9$ ，即可利用平方差公式求出 $(x-2023)^2 = 13$.

【详解】解：设 $A = x - 2021$ ， $B = x - 2025$ ，

$$\therefore A^2 + B^2 = 34, A - B = 4,$$

$$\therefore (A - B)^2 = 16,$$

$$\therefore -2AB = (A - B)^2 - (A^2 + B^2) = -18,$$

$$\therefore AB = 9,$$

$$\therefore (x - 2021)(x - 2025) = 9,$$

$$\therefore [(x - 2023) + 2][(x - 2023) - 2] = 9,$$

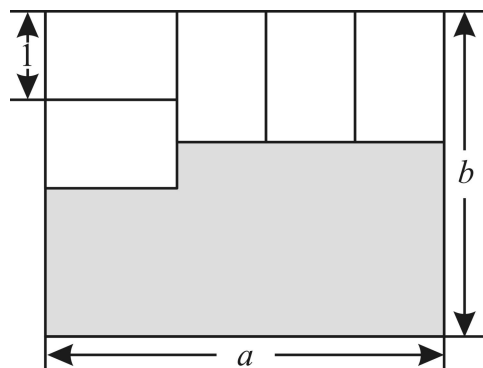
$$\therefore (x - 2023)^2 - 4 = 9,$$

$$\therefore (x - 2023)^2 = 13,$$

故选：C.

【点睛】本题主要考查了完全平方公式的变形求值，平方差公式，正确推出 $(x - 2021)(x - 2025) = 9$ 是解题的关键.

6. 如图，长为 a ，宽为 b 的大长方形被分割为 6 块，除阴影 A 外，其余 5 块是形状、大小完全相同的小长方形，其较短的边长为 1，那么阴影 A 的周长是（ ）



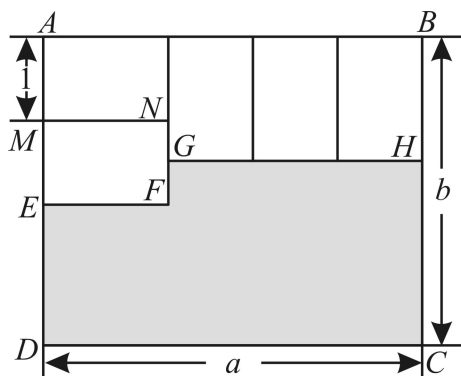
- A. $2b + a + 4$ B. $3b + 4$ C. $2b + 6$ D. $2b + 3a$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查的是列代数式，合并同类项，先标注字母，求解 $DE = b - 2$ ， $EF = a - 3 = BH$ ， $HC = b - a + 3$ ，再利用周长公式列式计算即可.

【详解】解：标注字母如图所示：



由题意可得： $DE = b - 2$ ， $EF = a - 3 = BH$ ， $HC = b - a + 3$ ， $GF = 5 - a$

阴影 A 的周长为： $a + b - 2 + a - 3 + 5 - a + 3 + b - a + 3 = 2b + 6$ ，

故选： C.

二、填空题（本大题共 14 题，每题 2 分，共 28 分）

7. 计算： $4m - 9m = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-5m$

【解析】

【分析】 本题考查合并同类项，根据合并同类项法则进行计算即可.

【详解】 解： $4m - 9m = (4 - 9)m = -5m$ ；

故答案为： $-5m$.

8. 计算： $(-2a^2)(a - 3) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-2a^3 + 6a^2$

【解析】

【分析】 本题考查单项式乘以多项式，根据单项式乘以多项式的法则进行计算即可.

【详解】 解： $(-2a^2)(a - 3) = -2a^3 + 6a^2$ ；

故答案为： $-2a^3 + 6a^2$.

9. 计算： $(a - b)(b - a)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ （结果用幂的形式表示）.

【答案】 $(a - b)^3$

【解析】

【详解】 分析： 本题首先转化为同底数，然后根据同底数幂的乘法计算法则即可得出答案.

详解： 原式 $= (a - b)(a - b)^2 = (a - b)^3$.

点睛：本题主要考查的就是同底数幂的乘法计算法则，属于基础题型．互为相反数的两个数的偶数次幂相等是解决这个问题的关键．

10. 计算： $3x^4 \div 2x^2 =$ _____.

【答案】 $\frac{3}{2}x^2$

【解析】

【分析】 本题考查单项式除以单项式，利用单项式除以单项式的法则进行计算即可．

【详解】 解： $3x^4 \div 2x^2 = \frac{3}{2}x^2$ ；

故答案为： $\frac{3}{2}x^2$.

11. 计算： $(x-2y+1)^2 =$ _____.

【答案】 $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 4y + 1$

【解析】

【分析】 本题考查完全平方公式，把 $x-2y$ 看作一个整体，利用完全平方公式进行计算即可．

【详解】 解： 原式 $= (x-2y)^2 + 2(x-2y) + 1$

$= x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 4y + 1$.

12. 将多项式 $-3xy^4 + x^3y + 5x^2y^2 - 2$ 按 x 的降幂排列是_____.

【答案】 $x^3y + 5x^2y^2 - 3xy^4 - 2$

【解析】

【分析】 本题考查了多项式的重新排列，我们把一个多项式的各项按照某个字母的指数从大到小或从小到大的顺序排列，称为按这个字母的降幂或升幂排列．要注意，在排列多项式各项时，要保持其原有的符号．此题还要注意分清按照哪个字母的降幂或升幂排列．

【详解】 解： $-3xy^4 + x^3y + 5x^2y^2 - 2$ 按 x 的降幂排列是 $x^3y + 5x^2y^2 - 3xy^4 - 2$.

故答案为： $x^3y + 5x^2y^2 - 3xy^4 - 2$.

13. 已知 $a+2b-3=0$ ，则 $3^a \cdot 3^{2b} =$ _____.

【答案】 27

【解析】

【分析】 本题考查了同底数幂的乘法，熟练掌握运算是解题的关键.

根据同底数幂的乘法法则计算即可.

【详解】 解： $\because a+2b-3=0$,

$$\therefore a+2b=3,$$

$$\therefore 3^a \cdot 3^{2b} = 3^{a+2b} = 3^3 = 27,$$

故答案为： 27.

14. 分解因式： $6xy^2 - 9x^2y = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $3xy(2y-3x)$

【解析】

【分析】 本题考查因式分解，利用提公因式法因式分解即可.

【详解】 解： $6xy^2 - 9x^2y = 3xy(2y-3x)$.

故答案为： $3xy(2y-3x)$.

15. 已知 $a+b=2$ ， $ab=-8$ ， 则 $a^2+b^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 20

【解析】

【分析】 本题主要考查了完全平方公式的变形求值，熟练掌握完全平方公式，是解题的关键. 根据

$a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ ， 结合 $a+b=2$ ， $ab=-8$ ， 进行求值即可.

【详解】 解： $\because a+b=2$ ， $ab=-8$ ，

$$\therefore a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 2^2 - 2 \times (-8) = 4 + 16 = 20.$$

故答案为： 20.

16. 如果 $x^2 + (2k-1)x + 9$ 是一个完全平方式， 那么常数 k 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{7}{2}$ 或 $-\frac{5}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查完全平方式，根据完全平方式的特点，进行求解即可.

【详解】 解： $\because x^2 + (2k-1)x + 9$ 是一个完全平方式，

$$\therefore (2k-1)x = \pm 2 \times 3x = \pm 6x,$$

$$\therefore 2k-1=\pm 6,$$

$$\therefore k=\frac{7}{2} \text{ 或 } -\frac{5}{2};$$

$$\text{故答案为: } \frac{7}{2} \text{ 或 } -\frac{5}{2}$$

17. 若 $(x^2+2x-1)(ax-b)$ 的乘积中不含二次项, 且一次项的系数为 1, 则 $a-b=$ _____.

【答案】 $\frac{1}{5}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了整式化简中无关类问题, 解二元一次方程组, 熟练掌握整式运算法则是解题关键.

根据题意利用多项式乘以多项式将原式括号去掉, 然后化简, 然后由 $(x^2+2x-1)(ax-b)$ 的乘积中不含二次项, 且一次项的系数为 1, 得到关于 a, b 的二元一次方程组, 再解方程组即可.

【详解】 解: $(x^2+2x-1)(ax-b)$

$$=ax^3-bx^2+2ax^2-2bx-ax+b,$$

$$=ax^3+(2a-b)x^2+(-2b-a)x+b,$$

$$\therefore (x^2+2x-1)(ax-b) \text{ 的乘积中不含二次项, 且一次项的系数为 1,}$$

$$\therefore \begin{cases} 2a-b=0 \\ -2b-a=1 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=-\frac{1}{5} \\ b=-\frac{2}{5} \end{cases},$$

$$\therefore a-b=-\frac{1}{5}-\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{5},$$

$$\text{故答案为: } \frac{1}{5}.$$

18. 已知 $m^2+m-5=0$, , 则 $m^4+m^3+5m-5=$ _____.

【答案】 20

【解析】

【分析】 本题考查了代数式的求值，掌握已知式子的值求代数式的值的计算方法是解题的关键.

根据题意可得 $m^2 + m = 5$ ，将代数式变形得 $m^4 + m^3 + 5m - 5 = m^2(m^2 + m) + 5m - 5$ ，代入计算即可求解.

【详解】 解： $\because m^2 + m - 5 = 0$ ，

$$\therefore m^2 + m = 5,$$

$$\therefore m^4 + m^3 + 5m - 5 = m^2(m^2 + m) + 5m - 5,$$

$$\therefore = 5m^2 + 5m - 5$$

$$= 5(m^2 + m) - 5$$

$$= 5 \times 5 - 5$$

$$= 20,$$

故答案为：20.

19. 已知： $(x+2)^{x+5} = 1$ ，则 $x =$ _____.

【答案】 -5 或 -1 或 -3

【解析】

【分析】 根据零指数幂和 1 的任何次幂都等于 1 分情况讨论求解.

【详解】 解：根据 0 指数的意义得：

当 $x+2 \neq 0$ 时， $x+5=0$ ，解得： $x=-5$.

当 $x+2=1$ 时， $x=-1$ ，

当 $x+2=-1$ 时， $x=-3$ ， $x+5=2$ ，指数为偶数，符合题意.

故答案为：-5 或 -1 或 -3.

【点睛】 本题考查零指数幂和有理数的乘方，掌握零指数幂和 1 的任何次幂都是 1 是本题的解题关键.

20. 规定：如果两数 a 、 b 满足 $a^m = b$ ，则记为 $(a,b) = m$. 例如：因为 $2^3 = 8$ ，所以 $(2,8) = 3$. 我们还可

以利用该规定来说明等式 $(3,3) + (3,5) = (3,15)$ 成立. 证明如下：设 $(3,3) = m$ ， $(3,5) = n$ ，则 $3^m = 3$ ， $3^n = 5$ ，

故 $3^m \times 3^n = 3^{m+n} = 3 \times 5 = 15$ ，则 $(3,15) = m+n$ ，即 $(3,3) + (3,5) = (3,15)$. 如果

$(3,m+17) = 4$ ， $(27,2m) = n$ ，那么 $(3, \quad) = 3n$.

【答案】 128

【解析】

【分析】本题考查幂的乘方，同底数幂的乘法，熟练掌握幂的乘方，同底数幂的乘法的运算法则，弄懂定义是解题的关键.

由题意可得 $3^4 = m + 17$ ，解得 $m = 64$ ，再由 $27^n = 3^{3n} = 128$ ，结合规定即可求解.

【详解】 $\because (3, m+17) = 4$,

$$\therefore 3^4 = m + 17,$$

解得 $m = 64$,

$$\therefore (27, 2m) = n,$$

$$\therefore 27^n = 2m,$$

$$\therefore 27^n = 3^{3n} = 2 \times 64 = 128,$$

$$\therefore (3, 128) = 3n,$$

故答案为: 128.

三、简答题 (本大题共 6 题, 每题 5 分, 共 30 分)

21. 计算: $2(x^2 + 4x + 5) - (3x^2 - 7x + 5)$.

【答案】 $-x^2 + 15x + 5$

【解析】

【分析】本题考查整式的加减运算，去括号，合并同类项进行计算即可.

【详解】解: 原式 $= 2x^2 + 8x + 10 - 3x^2 + 7x - 5$

$$= (2-3)x^2 + (8+7)x + 10-5$$

$$= -x^2 + 15x + 5.$$

22. 计算: $(-2a^2b)^3 \cdot (-b)^2 + (3a^3b^4)^2 \div b^3$.

【答案】 a^6b^5

【解析】

【分析】本题主要考查了积的乘方计算，单项式乘以单项式，单项式除以单项式，先计算积的乘方，再计算单项式乘以单项式，单项式除以单项式，最后合并同类项即可得到答案.

【详解】解: $(-2a^2b)^3 \cdot (-b)^2 + (3a^3b^4)^2 \div b^3$

$$= -8a^6b^3 \cdot b^2 + 9a^6b^8 \div b^3$$

$$= -8a^6b^5 + 9a^6b^5$$

$$= a^6b^5.$$

23. 计算: $\left(4x^3y^2 - 3x^2y^2 - \frac{1}{2}x^2y^5\right) \div \left(-\frac{1}{2}xy\right).$

【答案】 $-8x^2y + 6xy + xy^4$

【解析】

【分析】 本题主要考查了多项式除以单项式，直接根据多项式除以单项式的计算法则求解即可.

【详解】 解: $\left(4x^3y^2 - 3x^2y^2 - \frac{1}{2}x^2y^5\right) \div \left(-\frac{1}{2}xy\right)$

$$= -8x^2y + 6xy + xy^4.$$

24. 计算: $(3a - b + 2)(3a + b - 2).$

【答案】 $9a^2 - b^2 + 4b - 4$

【解析】

【分析】 本题考查整式的乘法，利用乘法公式进行计算即可.

【详解】 解: 原式 $= [3a - (b - 2)][3a + (b - 2)]$

$$= (3a)^2 - (b - 2)^2$$

$$= 9a^2 - (b - 4b + 4)$$

$$= 9a^2 - b^2 + 4b - 4.$$

25. 利用乘法公式计算 $2025^2 - 2024 \times 2026.$

【答案】 1

【解析】

【分析】 本题主要考查了运用平方差公式进行简便计算. 根据算式中数字的特点把 2024×2026 写成 $(2025 - 1)(2025 + 1)$ 的形式，然后运用平方差公式展开，得到: 原式 $= 2025^2 - (2025^2 - 1)$ ，去括号合并同类项可得结果.

【详解】 解: $2025^2 - 2024 \times 2026$

$$= 2025^2 - (2025-1)(2025+1)$$

$$= 2025^2 - (2025^2 - 1)$$

$$= 2025^2 - 2025^2 + 1$$

$$= 1.$$

26. 因式分解: $2m(m-3)^2 - 6m^2(3-m) + 8m(m-3)$.

【答案】 $2m(m-3)(4m+1)$

【解析】

【分析】 本题考查因式分解, 熟练掌握因式分解的方法是解题的关键, 利用提公因式法进行因式分解即可.

【详解】 解: 原式 $= 2m(m-3)^2 + 6m^2(m-3) + 8m(m-3)$

$$= 2m(m-3)[(m-3) + 3m + 4]$$

$$= 2m(m-3)(4m+1).$$

四、解答题 (本大题共 4 题, 第 27、28 题每题 6 分, 第 29 题 8 分, 第 30 题 10 分, 共 30 分)

27. 先化简, 再求值: $\left(\frac{1}{2}x+y\right)\left(\frac{1}{2}x-y\right) - (2x-y)(x+2y) + (x-3y)^2$, 其中 $x = -\frac{2}{3}$, $y = -1$.

【答案】 $-\frac{3}{4}x^2 - 9xy + 10y^2$, $\frac{11}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了整式的化简求值, 先根据乘法公式和多项式乘以多项式的计算法则去括号, 然后合并同类项化简, 最后代值计算即可得到答案.

【详解】 解: $\left(\frac{1}{2}x+y\right)\left(\frac{1}{2}x-y\right) - (2x-y)(x+2y) + (x-3y)^2$

$$= \frac{1}{4}x^2 - y^2 - (2x^2 + 4xy - xy - 2y^2) + x^2 - 6xy + 9y^2$$

$$= \frac{1}{4}x^2 - y^2 - 2x^2 - 3xy + 2y^2 + x^2 - 6xy + 9y^2$$

$$= -\frac{3}{4}x^2 - 9xy + 10y^2,$$

当 $x = -\frac{2}{3}$, $y = -1$ 时, 原式 $= -\frac{3}{4} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 9 \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times (-1) + 10 \times (-1)^2$

$$= -\frac{1}{3} - 6 + 10$$

$$= \frac{11}{3}.$$

28. 小杰准备完成题目：已知整式 $A = kx^m + 6x + 9 + nx^2$ ， $B = 6x + 4x^2 - 7 + px^m$ 求 $A - B$ 。但他发现 k 、 m 、 n 、 p 中有一部分印刷不清。

(1) 他把 m 猜成 3，且 $k = 1$ 、 $n = 0$ 、 $p = 0$ ，求 $A - B$ ；

(2) 小红说：“你猜的 m 不对，我看到的题目里 m 是一个正整数，且 $A - B$ 的结果是常数。”若已知 $k = 2$ 、 $p = 1$ ，试确定 m 和 n 的值，使得 $A - B$ 为常数，并求出这个常数。

【答案】(1) $x^3 - 4x^2 + 16$

(2) $m = 2$ ， $n = 3$ ， $A - B = 16$

【解析】

【分析】本题考查整式的加减运算，熟练掌握相关运算法则是解题的关键：

(1) 利用整式的加减运算法则进行计算即可；

(2) 根据整式的加减运算法则进行计算，再根据差为常数，进行求解即可。

【小问 1 详解】

解：由题意， $A = x^3 + 6x + 9$ ， $B = 6x + 4x^2 - 7$ ，

$$\therefore A - B = x^3 + 6x + 9 - (6x + 4x^2 - 7)$$

$$= x^3 + 6x + 9 - 6x - 4x^2 + 7$$

$$= x^3 - 4x^2 + 16;$$

【小问 2 详解】

由题意， $A = 2x^m + 6x + 9 + nx^2$ ， $B = 6x + 4x^2 - 7 + x^m$ ，

$$\therefore A - B = 2x^m + 6x + 9 + nx^2 - (6x + 4x^2 - 7 + x^m)$$

$$= 2x^m + 6x + 9 + nx^2 - 6x - 4x^2 + 7 - x^m$$

$$= x^m + (n - 4)x^2 + 16;$$

$\because m$ 为正整数，且 $A - B$ 为常数，

$$\therefore x^m + (n - 4)x^2 = 0, \quad A - B = 16;$$

$$\therefore m = 2, \quad n - 4 = -1,$$

$\therefore n = 3;$

综上： $m = 2, n = 3, A - B = 16.$

29. 【数学背景】幻方是一种中国传统益智游戏，它是将数字安排在正方形格子中使每行、每列及对角线上的数字和都相等的方法.

【问题提出】

(1) 如表①，将 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 九个数填入到 3×3 的方格内，使每行、每列及对角线上的数字和都相等，则这个和是_____.

表①

【模型迁移】

(2) 表②是显示部分式子的幻方，用含 b 的式子表示 a .

表②

$3b$		
$2a$		$5b$
		$-2b$

(3) 表③是显示部分式子的幻方，求 x 的值.

表③

$m^2 - m + 3$	$2m^2 + 3m - 3$	
$-3m^2 + 4m + x$		$2m^2 + 3m$
		$2m + 5$

【答案】(1) 15；(2) $a = -2b$ ；(3) 18

【解析】

【分析】 本题考查有理数运算的实际应用，一元一次方程的实际应用，正确的列出算式和方程是解题的关

键:

(1) (1) 分析题意, 确定答案即可; 填入符合要求的数字即可;

(2) 根据题意可得 $2a + 5b = 3b + (-2b)$, 整理即可获得答案;

(3) 结合题意, 先求得 $m^2 - 3m = 5$, 进而计算出 $x = 2m^2 - 6m + 8$, 然后整体代入求值即可.

【详解】解: (1) 将 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 九个数填入到 3×3 的方格内,

若使每行、每列及对角线上的数字和都相等, 则这个和是 $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) \div 3 = 15$.

故答案为: 15;

在图①中填入数字, 如下图;

2	9	4
7	5	3
6	1	8

(2) 根据题意, 可得 $2a + 5b = 3b + (-2b)$,

整理可得 $a = -2b$;

(3) 根据题意, 可有 $m^2 - m + 3 + 2m^2 + 3m - 3 = 2m^2 + 3m + 2m + 5$,

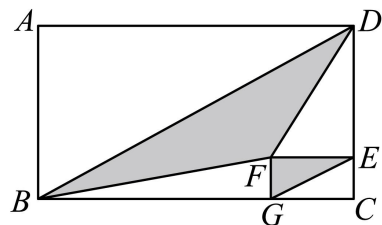
整理, 可得 $m^2 - 3m = 5$,

又因为 $-3m^2 + 4m + x + 2m^2 + 3m = m^2 - m + 3 + 2m + 5$,

所以 $x = 2m^2 - 6m + 8 = 2(m^2 - 3m) + 8 = 2 \times 5 + 8 = 18$.

30. 对于任意四个有理数 a 、 b 、 c 、 d , 可以组成两个有理数对 (a, b) 与 (c, d) , 我们规定:

$(a, b) \square (c, d) = a^2 + d^2 - bc$. 例如: $(1, 2) \square (3, 4) = 1^2 + 4^2 - 2 \times 3 = 11$.



(1) 若 $(x, kx) \square (y, -y)$ 是一个完全平方式, 求常数 k 的值;

(2) 若 $2x + y = 10$, 且 $(3x + y, 2x^2 + 3y^2) \square (3, x - 3y) = 84$, 求 xy 的值;

(3) 在 (2) 的条件下, 将长方形 $ABCD$ 及长方形 $CEFG$ 按照如图方式放置, 其中点 E 、 G 分别在边 CD 、 BC 上, 连接 BD 、 BF 、 DF 、 EG , 若 $AB = 2x$, $BC = 8x$, $CE = y$, $CG = 4y$, 求图中阴影部分的面积.

【答案】(1) ± 2

(2) 4 (3) 136

【解析】

【分析】(1) 由题目中的规定可知 $(x, kx) \square (y, -y) = x^2 - kxy + y^2$, 根据完全平方公式的特征确定答案即可;

(2) 根据题目中的规定求出 $(3x + y, 2x^2 + 3y^2) \square (3, x - 3y) = 84$ 等号左边部分, 可得 $4x^2 + y^2 = 84$, 再借助完全平方公式, 将 $2x + y = 10$ 代入求解即可;

(3) 根据三角形面积公式将阴影部分的面积表示出来, 得到含 $2x + y$, xy 的整式, 再代入求值即可.

【小问 1 详解】

解: 根据题意, 可得 $(x, kx) \square (y, -y) = x^2 + (-y)^2 - kx \cdot y = x^2 - kxy + y^2$,

$\therefore (x, kx) \square (y, -y)$ 是一个完全平方式,

$$\therefore -kxy = \pm 2xy,$$

解得 $k = \pm 2$;

【小问 2 详解】

根据题意, 可得 $(3x + y, 2x^2 + 3y^2) \square (3, x - 3y)$

$$= (3x + y)^2 + (x - 3y)^2 - 3(2x^2 + 3y^2)$$

$$= (9x^2 + 6xy + y^2) + (x^2 - 6xy + 9y^2) - (6x^2 + 9y^2)$$

$$= 4x^2 + y^2$$

$$= 84,$$

$$\therefore 2x + y = 10,$$

$$\therefore (2x + y)^2 = 4x^2 + 4xy + y^2 = 100,$$

$$\therefore 4xy = 100 - 84 = 16,$$

$$\therefore xy = 4;$$

【小问 3 详解】

由 (2) 可知, $2x + y = 10$, $xy = 4$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 和四边形 $CEFG$ 均为长方形,

$$\therefore CD = AB = 2x, \quad BC = AD = 8x, \quad CG = EF = 4y, \quad CE = FG = y,$$

$$\therefore DE = 2x - y, \quad BG = 8x - 4y,$$

$\therefore$ 阴影部分的面积为

$$\begin{aligned} S &= S_{\triangle BCD} - S_{\triangle BFG} - S_{\triangle DEF} - S_{\triangle CEG} \\ &= \frac{1}{2}BC \cdot CD - \frac{1}{2}BG \cdot FG - \frac{1}{2}EF \cdot DE - \frac{1}{2}CG \cdot CE \\ &= \frac{1}{2} \times 8x \cdot 2x - \frac{1}{2}(8x - 4y) \cdot y - \frac{1}{2} \times 4y(2x - y) - \frac{1}{2} \times 4y \cdot y \\ &= 8x^2 - 4xy + 2y^2 - 4xy + 2y^2 - 2y^2 \\ &= 8x^2 - 8xy + 2y^2 \\ &= 2(2x + y)^2 - 16xy \\ &= 2 \times 10^2 - 16 \times 4 \\ &= 136. \end{aligned}$$

【点睛】 本题主要考查了整式混合运算、完全平方公式的应用、代数式求值等知识, 熟练掌握完全平方公式并灵活运用是解题关键.