

上海浦东新区民办欣竹中学 2025 学年第一学期

数学学科七年级期中考试卷

(考试时间: 90 分钟, 满分 100 分)

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 下列运算中, 结果正确的是 ()

- A. $(a^3)^2 = a^5$ B. $a^2 + a^2 = a^4$ C. $a^2 \cdot a^2 = a^4$ D. $(-a)^2 = -a^2$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查幂的乘方与积的乘方, 同底数幂的乘法, 合并同类项, 利用幂的乘方与积的乘方的法则, 同底数幂的乘法的法则, 合并同类项对各项进行运算即可.

【详解】解: A. $(a^3)^2 = a^6$, 故该选项不正确, 不符合题意;

B. $a^2 + a^2 = 2a^2$, 故该选项不正确, 不符合题意;

C. $a^2 \cdot a^2 = a^4$, 故该选项正确, 符合题意;

D. $(-a)^2 = a^2$, 故该选项不正确, 不符合题意;

故选: C.

2. 化简 $\frac{x^2}{x-y} + \frac{y^2}{y-x}$ 的结果为 ()

- A. $x-y$ B. $x+y$ C. $\frac{x+y}{x-y}$ D. $\frac{x-y}{x-y}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查的是分式的化简, 先变形得到 $\frac{x^2}{x-y} - \frac{y^2}{x-y}$, 再计算得到 $\frac{x^2-y^2}{x-y}$, 根据完全平方公式得到 $\frac{(x+y)(x-y)}{x-y}$, 化简即可得到答案. 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

【详解】 $\frac{x^2}{x-y} + \frac{y^2}{y-x}$

$$= \frac{x^2}{x-y} - \frac{y^2}{x-y}$$

$$= \frac{x^2 - y^2}{x-y}$$

$$= \frac{(x+y)(x-y)}{x-y}$$

$$= x+y.$$

故选：B.

3. 已知 $x^2 + mx + 36$ 是完全平方式，则 m 的值为（ ）

A. 12

B. 6

C. ± 12

D. ± 6

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了完全平方公式，将 $x^2 + mx + 36$ 写成 $(x \pm 6)^2$ 是解答本题的关键. 先将 $x^2 + mx + 36$ 变为 $(x \pm 6)^2$ ，可得 $mx = \pm 12x$ ，即可求得 m 的值.

【详解】解： $\because x^2 + mx + 36$ 是完全平方式，

$$\therefore x^2 + mx + 36 = (x \pm 6)^2$$

$$\therefore x^2 + mx + 36 = x^2 \pm 12x + 36,$$

$$\therefore mx = \pm 12x,$$

$$\text{即 } m = \pm 12.$$

故选：C.

4. 下列等式从左到右的变形，是因式分解的是（ ）.

A. $(a+2)(a-2) = a^2 - 4$

B. $m^2 - m - 1 = m(m-1) - 1$

C. $x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

D. $x^2 - 2x - 3 = x\left(x - 2 - \frac{3}{x}\right)$

【答案】C

【解析】

【分析】根据因式分解概念进行逐项分析，即可作答.

【详解】解：A、 $a^2 - 4 = (a + 2)(a - 2)$ 是因式分解， $(a + 2)(a - 2) = a^2 - 4$ 不是因式分解，故该选项是错误的；

B、 $m^2 - m - 1$ 这个多项式没办法进行因式分解， $m^2 - m - 1 = m(m - 1) - 1$ 不是因式分解，故该选项是错误的；

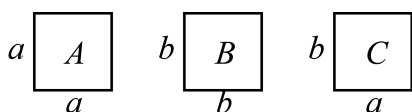
C、 $x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ 是因式分解，故该选项是正确的；

D、 $x^2 - 2x - 3$ 这个多项式没办法进行因式分解， $x^2 - 2x - 3 = x\left(x - 2 - \frac{3}{x}\right)$ 不是因式分解，故该选项是错误的；

故选：C

【点睛】本题考查了因式分解的概念，一个多项式化为几个整式的积的过程叫因式分解；难度较小。

5. 如图，正方形卡片 A 类、B 类和长方形卡片 C 类各若干张，如果要拼一个长为 $(a + 3b)$ ，宽为 $(2a + b)$ 的大长方形，则需要 A 类、B 类和 C 类卡片的张数分别为（ ）



A. 2, 5, 3

B. 3, 7, 2

C. 2, 3, 7

D. 2, 5, 7

【答案】C

【解析】

【分析】根据长方形的面积=长×宽，求出长为 $a+3b$ ，宽为 $2a+b$ 的大长方形的面积是多少，判断出需要 A 类、B 类、C 类卡片各多少张即可。

【详解】解：长为 $a+3b$ ，宽为 $2a+b$ 的长方形的面积为：

$$(a+3b)(2a+b) = 2a^2 + 7ab + 3b^2,$$

∵ A 类卡片的面积为 a^2 ，B 类卡片的面积为 b^2 ，C 类卡片的面积为 ab ，

∴ 需要 A 类卡片 2 张，B 类卡片 3 张，C 类卡片 7 张。

故选 C。

【点睛】此题主要考查了多项式乘多项式的运算方法，熟练掌握运算是解题的关键。

6. 关于 x 的分式方程 $\frac{2}{x-2} + \frac{mx}{x^2-4} = \frac{3}{x+2}$ 会产生增根，则 m 的值为（ ）

A. -4

B. 6 或 -4

C. -6 或 4

D. 6

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查分式方程的解法，熟练掌握分式方程的解法是解题的关键；分式方程产生增根时，增根为使分母为零的值，即 $x = 2$ 或 $x = -2$ ，代入去分母后的整式方程求解 m 即可.

【详解】解：方程两边同乘公分母 $(x+2)(x-2)$ ，得：

$$2(x+2)+mx=3(x-2),$$

$$\text{化简得：} (m-1)x+10=0,$$

$$\therefore \text{增根为 } x=2 \text{ 或 } x=-2,$$

$$\text{当 } x=2 \text{ 时，代入得：} 2(m-1)+10=0, \text{ 解得 } m=-4;$$

$$\text{当 } x=-2 \text{ 时，代入得：} -2(m-1)+10=0, \text{ 解得 } m=6;$$

$$\therefore m \text{ 的值为 } 6 \text{ 或 } -4;$$

故选 B.

二、填空题（本大题共 12 小题，每题 2 分，满分 24 分）

7. 单项式 $-\frac{5x^3y^4}{11}$ 的系数是_____.

【答案】 $-\frac{5}{11}$

【解析】

【分析】本题考查了单项式的系数，掌握单项式的系数的定义是解题的关键. 直接根据单项式的系数的定义得出答案，单项式中的数字因数叫做单项式的系数.

【详解】解：单项式 $-\frac{5x^3y^4}{11}$ 的系数是 $-\frac{5}{11}$ ；

故答案为： $-\frac{5}{11}$

8. 计算： $(-3xy^3)^2 =$ _____.

【答案】 $9x^2y^6$

【解析】

【分析】本题考查了积的乘方运算，根据积的乘方运算和幂的乘方运算法则计算即可求解，掌握以上知识点是解题的关键.

【详解】解： $(-3xy^3)^2 = (-3)^2 \cdot x^2 \cdot (y^3)^2 = 9x^2y^6$ ，

故答案为： $9x^2y^6$ 。

9. 将整式 $3qr - r^2 + \frac{4}{7}q^2r^3 - 13$ 按 r 升幂排列：_____。

【答案】 $-13 + 3qr - r^2 + \frac{4}{7}q^2r^3$

【解析】

【分析】 本题考查多项式，根据含 r 的项中 r 的指数从低到高的顺序排列即可。

【详解】解： 将整式 $3qr - r^2 + \frac{4}{7}q^2r^3 - 13$ 按 r 升幂排列为 $-13 + 3qr - r^2 + \frac{4}{7}q^2r^3$ ，

故答案为： $-13 + 3qr - r^2 + \frac{4}{7}q^2r^3$ 。

10. 计算： $8^8 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{20} =$ _____。

【答案】 16

【解析】

【分析】 本题考查幂的综合运算，涉及幂的乘方，同底数幂的除法等知识，运用相关公式计算即可。

【详解】解： $8^8 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{20} = (2^3)^8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$

$$= 2^{24} \times \frac{1}{2^{20}}$$

$$= \frac{2^{24}}{2^{20}}$$

$$= 2^4$$

$$= 16,$$

故答案为： 16。

11. 已知 $a + b = 4$ ， $a - b = 6$ ， 则 $a^2 - b^2$ 的值是_____。

【答案】 24

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解的应用，根据平方差公式直接计算即可求解。

【详解】解： $\because a + b = 4$ ， $a - b = 6$ ，

$$\therefore a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = 4 \times 6 = 24,$$

故答案为：24.

12. 当 $m = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 分式 $\frac{(m-1)(m-3)}{m^2-3m+2}$ 的值为零.

【答案】3

【解析】

【分析】本题考查了分式的值为零的条件：分母不为0，分子为0. 先令分子等于0得到 $m=1$ 或 $m=3$ ，再分别代入分母进行计算得到当 $m=1$ 时， $m^2-3m+2=0$ ，当 $m=3$ 时， $m^2-3m+2 \neq 0$ ，由此得到 $m=3$.

【详解】解： $\because (m-1)(m-3)=0$,

$\therefore m=1$ 或 $m=3$,

当 $m=1$ 时， $m^2-3m+2=0$,

当 $m=3$ 时， $m^2-3m+2 \neq 0$,

$\therefore$ 当 $m=3$ 时，分式 $\frac{(m-1)(m-3)}{m^2-3m+2}$ 的值为零.

故答案为：3.

13. 已知 $5^m = a$ ， $5^n = b$ ，则 $5^{2m+3n} = \underline{\hspace{2cm}}$. (请用含有 a ， b 的代数式表示)

【答案】 a^2b^3

【解析】

【分析】本题考查了同底数幂乘法逆运算，幂的乘方的逆运算，利用同底数幂乘法和幂的乘方的逆运算进行计算即可，掌握以上知识点是解题的关键.

【详解】解： $\because 5^m = a$ ， $5^n = b$,

$\therefore 5^{2m+3n} = 5^{2m} \cdot 5^{3n} = (5^m)^2 \cdot (5^n)^3 = a^2 b^3$,

故答案为： $a^2 b^3$.

14. 若 $(3x-a)(x+2) = 3x^2 + 4x - b$ ，则 $b^a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】16

【解析】

【分析】本题考查多项式乘多项式、代数式求值，先根据多项式乘多项式将等式左边展开化简，再使得等式左右对应项的系数相等即可求解.

【详解】解： $\because (3x-a)(x+2) = 3x^2 + 6x - ax - 2a = 3x^2 + (6-a)x - 2a$,

又 $(3x-a)(x+2) = 3x^2 + 4x - b$,

$$\therefore 6-a=4, \quad 2a=b,$$

解得 $a=2, \quad b=4$,

$$\therefore b^a = 4^2 = 16,$$

故答案为：16.

15. 若 $x+y=2$, $xy=-2$, 则 $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} =$ _____.

【答案】 -4

【解析】

【分析】 本题考查分式的化简求值，原式通分并利用同分母分式的加法法则计算，再利用完全平方公式变形，把已知等式代入计算即可求出值. 熟练掌握相应的运算法则是解题的关键.

【详解】解： $\because x+y=2, \quad xy=-2$,

$$\therefore \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \frac{y^2 + x^2}{xy} = \frac{(x+y)^2 - 2xy}{xy} = \frac{2^2 - 2 \times (-2)}{-2} = -4,$$

$$\text{即 } \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = -4.$$

故答案为：-4.

16. 已知 $x^2 - 4x + 1 = 0$, 则 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 的值是_____.

【答案】 14

【解析】

【分析】 根据题意可得 $x \neq 0$, 将已知等式两边同时除以 x , 得到 $x + \frac{1}{x} = 4$, 进而根据完全平方公式的变形即可求解.

【详解】解： $\because x^2 - 4x + 1 = 0$, 且由题意可得 $x \neq 0$,

$$\therefore \frac{x^2}{x} - \frac{4x}{x} + \frac{1}{x} = 0,$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = 4,$$

$$\therefore \text{原式} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 4^2 - 2 = 14,$$

故答案为：14

【点睛】 本题考查了完全平方公式，掌握完全平方公式是解题的关键.

17. 若 x 取整数，则使分式 $\frac{6x-3}{2x+1}$ 的值为整数的 x 的值有_____个.

【答案】 4

【解析】

【分析】 本题考查的知识点是分式的值是整数的条件，分离假分式是解此题的关键，通过分变形得到 $3 - \frac{6}{2x+1}$ ，从而使问题简单. 先将假分式 $\frac{6x-3}{2x+1}$ 变形得 $3 - \frac{6}{2x+1}$ ，根据题意只需 $2x+1$ 是 6 的整数约数即可.

【详解】 解： $\frac{6x-3}{2x+1} = \frac{3(2x+1)-6}{2x+1} = 3 - \frac{6}{2x+1}$

由题意可知， $2x+1$ 是 6 的整数约数，

$\therefore 2x+1=1, 2, 3, 6, -1, -2, -3, -6,$

解得： $x=0, \frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}, -1, -\frac{3}{2}, -2, -\frac{7}{2},$

其中 x 的值为整数有： $x=0, 1, -1, -2$ 共 4 个.

故答案为： 4.

18. 若 $abc=1$ ， $a+b+c=2$ ， $a^2+b^2+c^2=3$ ， 则 $\frac{1}{ab+c-1} + \frac{1}{bc+a-1} + \frac{1}{ac+b-1} =$ _____.

【答案】 $-\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 首先求出 $ab+ac+bc=\frac{1}{2}$ ， 将原代数式的分母变形为

$\frac{1}{(a-1)(b-1)} + \frac{1}{(b-1)(c-1)} + \frac{1}{(c-1)(a-1)}$ ， 将该式进一步化简变形， 借助已知条件即可解决问题.

【详解】 解： $\because a+b+c=2$ ，

$\therefore a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=4$ ，

$\because a^2+b^2+c^2=3$ ，

$\therefore ab+bc+ac=\frac{1}{2}$ ，

$\because a+b+c=2$ ，

$$\therefore c-1=1-a-b,$$

$$\therefore ab+c-1=ab+1-a-b=(a-1)(b-1),$$

$$\text{同理可得: } bc+a-1=(b-1)(c-1), \quad ac+b-1=(a-1)(c-1),$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{1}{(a-1)(b-1)} + \frac{1}{(b-1)(c-1)} + \frac{1}{(c-1)(a-1)}$$

$$= \frac{c-1+a-1+b-1}{(a-1)(b-1)(c-1)}$$

$$= \frac{-1}{abc-ab-ac-bc+a+b+c-1}$$

$$= \frac{-1}{abc-(ab+ac+bc)+(a+b+c)-1}$$

$$= \frac{-1}{1-\frac{1}{2}+2-1}$$

$$= -\frac{2}{3},$$

$$\text{故答案为: } -\frac{2}{3}.$$

【点睛】 本题主要考查了分式的化简求值，解题的关键是根据已知条件的结构特点，灵活运用有关公式将所给的代数式恒等变形，准确化简，对综合的分析问题、解决问题的能力提出了较高的要求.

三、简答题 (共 3 题, 第 19 题 8 分, 第 20 题 8 分, 第 21 题 6 分, 满分 22 分)

19. 计算:

$$(1) \quad 2a^2 \cdot a^4 + (-a^3)^2 - 3a^6$$

$$(2) \quad \frac{1}{2m} - \frac{1}{m-n} \cdot \left(\frac{m-n}{2m} - m+n \right)$$

【答案】 (1) 0 (2) 1

【解析】

【分析】 本题考查了单项式乘单项式，幂的乘方，合并同类项，分式的混合运算，正确掌握相关性质内容是解题的关键.

(1) 先运算单项式乘单项式，幂的乘方，再合并同类项，即可作答.

(2) 先整理括号内，再运用乘法运算律，最后运算加减法，即可作答.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } 2a^2 \cdot a^4 + (-a^3)^2 - 3a^6$$

$$= 2a^6 + a^6 - 3a^6$$

$$= 3a^6 - 3a^6$$

$$= 0;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \frac{1}{2m} - \frac{1}{m-n} \cdot \left(\frac{m-n}{2m} - m+n \right)$$

$$= \frac{1}{2m} - \frac{1}{m-n} \cdot \left[\frac{m-n}{2m} - (m-n) \right]$$

$$= \frac{1}{2m} - \frac{1}{m-n} \cdot \frac{m-n}{2m} + \frac{1}{m-n} \cdot (m-n)$$

$$= \frac{1}{2m} - \frac{1}{2m} + 1$$

$$= 1$$

20. 因式分解:

$$(1) \quad 4y + 25x^2 - 1 - 4y^2$$

$$(2) \quad 4x^2 + 4xy + 12x + 6y + y^2 + 8$$

【答案】 (1) $(5x + 2y - 1)(5x - 2y + 1)$

(2) $(2x + y + 4)(2x + y + 2)$

【解析】

【分析】 本题考查了分组分解法，公式法进行分解因式，十字相乘法分解因式。正确掌握相关性质内容是解题的关键。

(1) 先把原式整理得 $(5x)^2 - (2y-1)^2$ ，再运用平方差公式进行因式分解，即可作答。

(2) 先把原式整理得 $(2x+y)^2 + 6(2x+y) + 8$ ，再运用十字相乘法进行因式分解，即可作答。

【小问 1 详解】

$$\text{解: } 4y + 25x^2 - 1 - 4y^2$$

$$= 25x^2 - (4y^2 - 4y + 1)$$

$$= (5x)^2 - (2y-1)^2$$

$$= (5x+2y-1)(5x-2y+1);$$

【小问2详解】

$$\text{解: } 4x^2 + 4xy + 12x + 6y + y^2 + 8$$

$$= 4x^2 + 4xy + y^2 + 12x + 6y + 8$$

$$= (2x+y)^2 + 6(2x+y) + 8$$

$$= (2x+y+4)(2x+y+2).$$

$$21. \text{ 解方程: } \frac{6}{x^2-25} = \frac{3}{x^2+8x+15} + \frac{5}{x^2-2x-15}.$$

【答案】 $x=4$

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程，解分式方程的基本思想是把分式方程转化为整式方程，注意要验根.

将原方程化为 $\frac{6}{(x+5)(x-5)} = \frac{3}{(x+3)(x+5)} + \frac{5}{(x+3)(x-5)}$ ，方程两边都乘以 $(x+3)(x+5)(x-5)$ ，

得到 $6(x+3) = 3(x-5) + 5(x+5)$ ，再解整式方程即可得到答案.

$$\text{【详解】 解: } \because \frac{6}{x^2-25} = \frac{3}{x^2+8x+15} + \frac{5}{x^2-2x-15},$$

$$\therefore \frac{6}{(x+5)(x-5)} = \frac{3}{(x+3)(x+5)} + \frac{5}{(x+3)(x-5)},$$

方程两边都乘以 $(x+3)(x+5)(x-5)$ ，

$$\text{得: } 6(x+3) = 3(x-5) + 5(x+5),$$

$$\text{去括号得: } 6x+18 = 3x-15+5x+25,$$

$$\text{移项得: } 6x-3x-5x = -15+25-18,$$

$$\text{合并同类项得: } -2x = -8,$$

$$\text{系数化为1得: } x = 4,$$

经检验, $x=4$ 是分式方程的解,

$\therefore$ 原方程的解是 $x=4$.

四、解答题 (本大题共4题, 第22.23题各7分, 第24题10分. 第25题12分, 满分36分)

$$22. \text{ 先化简, 再求值: } -\left(\frac{a+b}{a}\right)^{-1} + \frac{a^2+ab}{a^2+3ab+2b^2} \div \frac{a^2-b^2}{a^2+2ab}, \text{ 其中 } a=20, b=24.$$

【答案】 $\frac{ab}{(a+b)(a-b)}; -\frac{30}{11}$

【解析】

【分析】 本题考查分式的化简求值，负整数指数幂等知识，先按相关法则化简，再代入求值即可.

【详解】 解：原式 $= -\frac{a}{a+b} + \frac{a(a+b)}{(a+b)(a+2b)} \times \frac{a(a+2b)}{(a+b)(a-b)}$

$$= -\frac{a}{a+b} + \frac{a^2}{(a+b)(a-b)}$$

$$= \frac{-a(a-b)}{(a+b)(a-b)} + \frac{a^2}{(a+b)(a-b)}$$

$$= \frac{-a^2 + ab + a^2}{(a+b)(a-b)}$$

$$= \frac{ab}{(a+b)(a-b)}$$

当 $a = 20$ ， $b = 24$ 时，原式 $= \frac{20 \times 24}{(20+24) \times (20-24)} = -\frac{30}{11}$.

23. 小明乘出租车去体育场，有两条路线可供选择：路线一的全程是 20 千米，但交通比较拥堵；路线二的全程是 27 千米，平均车速比走路线一的平均车速能提高 60%，因此比走路线一少用 10 分钟到达. 求路线一的平均车速.

【答案】 18.75 千米/小时

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程的应用，根据路线二的全程是 27 千米，平均车速比走路线一的平均车速能提高 60%，得路线二的平均车速为 $(1+60\%)r$ 千米/小时，又因为路线二比走路线一少用 10 分钟到达，进行列式计算，即可作答.

【详解】 解：设路线一的平均车速为 r 千米/小时，
则路线二的平均车速为 $(1+60\%)r$ 千米/小时，

依题意， $\frac{20}{r} - \frac{27}{(1+60\%)r} = \frac{10}{60}$,

$\therefore \frac{20}{r} - \frac{27}{1.6r} = \frac{1}{6}$,

$\therefore 1.6r = 192 - 162$,

解得 $r = 18.75$,

经检验: 当 $r = 18.75$ 时, $1.6r \neq 0$,

故 $r = 18.75$ 是原分式方程的解.

$\therefore$ 路线一的平均车速是 18.75 千米/小时

24. 若关于 x 的方程 $\frac{1}{x-1} + \frac{m}{x-2} = \frac{2m+2}{(x-1)(x-2)}$ 无解, 求 m 的值.

【答案】 -1.5 或 -2 或 -1

【解析】

【分析】 直接利用分式方程的解的意义分别分析得出答案.

【详解】 解: 方程两边同乘以 $(x-2)(x-1)$, 得:

$$x-2+m(x-1)=2m+2,$$

$$\text{化简得: } (1+m)x=3m+4,$$

当 $m=-1$ 时, 原方程无解,

x 可能的增根是 $x=1$ 或 $x=2$,

当 $x=1$ 时, $m=-1.5$,

当 $x=2$ 时, $m=-2$,

$\therefore$ 当 $m=-1.5$ 或 -2 时, 原方程无解,

$\backslash m=-1.5$ 或 -2 或 -1 时原方程无解.

【点睛】 本题考查了分式方程的解, 正确分类讨论是解题的关键.

25. 如果两个分式 M 与 N 的和为常数 k , 且 k 正整数, 则称 M 与 N 互为“和整分式”, 常数 k 称为“和整值”. 如分式 $M = \frac{x}{x+1}$, $N = \frac{1}{x+1}$, $M+N = \frac{x+1}{x+1} = 1$, 则 M 与 N 互为“和整分式”, “和整值” $k=1$.

值”. 如分式 $M = \frac{x}{x+1}$, $N = \frac{1}{x+1}$, $M+N = \frac{x+1}{x+1} = 1$, 则 M 与 N 互为“和整分式”, “和整值” $k=1$.

(1) 已知分式 $A = \frac{x-7}{x-2}$, $B = \frac{x^2+6x+9}{x^2+x-6}$, 判断 A 与 B 是否互为“和整分式”, 若不是, 请说明理由;

若是, 请求出“和整值” k ;

(2) 已知分式 $C = \frac{3x-4}{x-2}$, $D = \frac{G}{x^2-4}$, C 与 D 互为“和整分式”, 且“和整值” $k=3$, 若 x 为正整数,

分式 D 的值为正整数 t .

①求 G 所代表的代数式;

②求 x 的值;

(3) 在 (2) 的条件下, 已知分式 $P = \frac{3x-5}{x-3}$, $Q = \frac{mx-3}{3-x}$, 且 $P+Q=t$, 若该关于 x 的方程无解, 求实数 m 的值.

【答案】 (1) A 与 B 是互为“和整分式”, “和整值” $k=2$;

(2) ① $G = -2x-4$; ② $x=1$

(3) m 的值为: 1 或 $\frac{7}{3}$.

【解析】

【分析】 (1) 先计算 $A+B$, 再根据结果可得结果;

(2) ①先求解 $C+D = \frac{3x^2+2x-8+G}{(x-2)(x+2)}$, 结合新定义可得 $3x^2+2x-8+G = 3(x-2)(x+2) = 3x^2-12$,

从而可得答案; ②由 $D = -\frac{2}{x-2}$, 且分式 D 的值为正整数 t . x 为正整数, 可得 $x-2 = -1$ 或 $x-2 = -2$,

从而可得答案;

(3) 由题意可得: $t = D = -\frac{2}{1-2} = 2$, 可得 $\frac{3x-5-mx+3}{x-3} = 2$, 整理得: $(1-m)x = -4$, 由方程无解, 可得 $1-m=0$ 或方程有增根 $x=3$, 再分两种情况求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because A = \frac{x-7}{x-2}$, $B = \frac{x^2+6x+9}{x^2+x-6}$,

$$\therefore A+B = \frac{x-7}{x-2} + \frac{x^2+6x+9}{x^2+x-6}$$

$$= \frac{x-7}{x-2} + \frac{(x+3)^2}{(x+3)(x-2)}$$

$$= \frac{x-7}{x-2} + \frac{x+3}{x-2}$$

$$= \frac{2(x-2)}{x-2}$$

$$= 2.$$

$\therefore A$ 与 B 是互为“和整分式”, “和整值” $k=2$;

【小问 2 详解】

$$\textcircled{1} \because C = \frac{3x-4}{x-2}, D = \frac{G}{x^2-4},$$

$$\therefore C+D=\frac{(3x-4)(x+2)}{(x-2)(x+2)}+\frac{G}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{3x^2+2x-8+G}{(x-2)(x+2)}$$

$\therefore C$ 与 D 互为“和整分式”，且“和整值” $k=3$,

$$\therefore 3x^2+2x-8+G=3(x-2)(x+2)=3x^2-12,$$

$$\therefore G=3x^2-12-3x^2-2x+8=-2x-4;$$

$$\textcircled{2} \therefore D=\frac{G}{x^2-4}=\frac{-2(x+2)}{(x+2)(x-2)}=-\frac{2}{x-2}, \text{ 且分式 } D \text{ 的值为正整数 } t. x \text{ 为正整数,}$$

$$\therefore x-2=-1 \text{ 或 } x-2=-2,$$

$$\therefore x=1 \quad (x=0 \text{ 舍去});$$

【小问 3 详解】

$$\text{由题意可得: } t=D=-\frac{2}{1-2}=2,$$

$$\therefore P+Q=\frac{3x-5}{x-3}+\frac{mx-3}{3-x}=2,$$

$$\therefore \frac{3x-5-mx+3}{x-3}=2,$$

$$\therefore (3-m)x-2=2x-6,$$

$$\text{整理得: } (1-m)x=-4,$$

$\therefore$ 方程无解,

$$\therefore 1-m=0 \text{ 或方程有增根 } x=3,$$

$$\text{解得: } m=1,$$

当 $1-m \neq 0$, 方程有增根 $x=3$,

$$\therefore \frac{-4}{1-m}=3,$$

$$\text{解得: } m=\frac{7}{3},$$

综上: m 的值为: 1 或 $\frac{7}{3}$.

【点睛】 本题考查的是新定义运算的理解, 分式的加减运算, 分式方程的解法, 分式方程无解问题, 理解题意是解本题的关键.

