

交中（初中）教育集团
2025 学年第一学期期中联合质量检测
七年级数学试卷

(考试时间：90 分钟 满分 100 分)

考生注意：请将所有答案写在答题卡上，写在试卷上不计分

一、选择题（本大题共 6 题，每题 3 分，共 18 分）

1. 下列运算中，正确的是（ ）

A. $(a^3)^2 = a^5$

B. $(a^2b^3)^2 = a^4b^6$

C. $(ab^2)^3 = ab^6$

D. $a^3 \cdot a^2 = a^6$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查幂的乘方、积的乘方以及同底数幂的乘法运算，解题的关键是熟练掌握幂的运算性质。分别根据幂的乘方、积的乘方、同底数幂的乘法法则对每个选项进行计算，然后判断对错。

【详解】解：A、根据幂的乘方法则， $(a^m)^n = a^{mn}$ ，所以 $(a^3)^2 = a^{3 \times 2} = a^6 \neq a^5$ ，错误；

B、根据积的乘方法则， $(ab)^n = a^n b^n$ ，所以 $(a^2b^3)^2 = a^{2 \times 2} b^{3 \times 2} = a^4 b^6$ ，正确；

C、根据积的乘方法则， $(ab^2)^3 = a^3 (b^2)^3 = a^3 b^6 \neq ab^6$ ，错误；

D、根据同底数幂的乘法法则， $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ，所以 $a^3 \cdot a^2 = a^{3+2} = a^5 \neq a^6$ ，错误。

故选：B.

2. 下面各式从左到右的变形，属于因式分解的是（ ）

A. $x^2 - x - 1 = x(x-1) - 1$

B. $x^2 - 1 = x\left(x - \frac{1}{x}\right)$

C. $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

D. $x(x-1) = x^2 - x$

【答案】C

【解析】

【分析】根据因式分解的定义，逐项判断即可。

【详解】解：A、结果不是几个整式的积的形式，不是因式分解，该选项不符合题意；

B、结果含有分式，不是因式分解，该选项不符合题意；

C、是因式分解，该选项符合题意；

D、结果不是几个整式的积的形式，不是因式分解，该选项不符合题意.

故选：C.

【点睛】本题主要考查因式分解的定义（把一个多项式化成几个整式的积的形式，叫做这个多项式的因式分解），牢记因式分解的定义是解题的关键.

3. 下列分式中是最简分式的是（ ）

A. $\frac{x+1}{x^2-1}$

B. $\frac{xy}{x^2-3x}$

C. $\frac{x^2+y^2}{x+y}$

D. $\frac{10y-4x}{6x-15y}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用最简分式的意义：一个分式的分子与分母没有非零次的公因式时(即分子与分母互素)叫最简分式最简分式；由此逐一分析探讨得出答案即可.

【详解】A. $\frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1}$ ，故A不是最简分式；

B. $\frac{xy}{x^2-3x} = \frac{xy}{x(x-3)} = \frac{y}{x-3}$ ，故B不是最简分式；

C. $\frac{x^2+y^2}{x+y}$ 分子分母没有非零次的公因式，所以C是最简分式；

D. $\frac{10y-4x}{6x-15y} = \frac{-2(2x-5y)}{3(2x-5y)} = -\frac{2}{3}$ ，故D不是最简分式.

故选：C.

【点睛】本题考查了最简分式的意义，要把分子与分母因式分解彻底，进一步判定即可.

4. 下列多项式乘以多项式能用平方差公式计算的是（ ）

A. $(3y-x)(-3y-x)$

B. $(x+3y)(-x-3y)$

C. $(x-5y)(-x+3y)$

D. $(-x-3y)(-x-3y)$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了平方差公式，平方差公式为 $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ ，据此逐一判断即可.

【详解】解：A、 $(3y-x)(-3y-x)=-9y^2+x^2$ ，能用平方差公式计算，符合题意；

B、 $(x+3y)(-x-3y) = -(x+3y)^2$ ，不能用平方差公式计算，不符合题意；

C、 $(x-5y)(-x+3y)$ ，不能用平方差公式计算，不符合题意；

D、 $(-x-3y)(-x-3y)$ ，不能用平方差公式计算，不符合题意；

故选：A.

5. 设 M 是五次多项式， N 是六次多项式，下列说法正确的是（ ）

A. $M+N$ 是五次整式

B. $M+N$ 是六次整式

C. $M \cdot N$ 是五次整式

D. $M \cdot N$ 是六次整式

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了整式的乘法，整式的加法. 根据整式的乘法，整式的加法运算解答即可.

【详解】解：∵ M 是五次多项式， N 是六次多项式，

∴ M 的最高次项为五次项， N 的最高次项为六次项，

∴ $M+N$ 的最高次项为 N 的六次项，次数为 6，即 $M+N$ 是六次整式，故 A 选项错误，B 选项正确；

$M \cdot N$ 的最高次项为十一次项，即 $M \cdot N$ 是十一次整式，故 C，D 选项错误.

故选：B

6. 对于任意一元整式 $f(x)$ ，其奇次项系数之和为 m ，偶次项系数之和为 n ，若 $m=n$ ，则 $f(-1)=0$ ，

若 $m=-n$ ，则 $f(1)=0$ ，在 x^3-5x^2+4 中，因为 $m=1$ ， $n=-5+4=-1$ ，所以把 $x=1$ 代入整式

x^3-5x^2+4 ，得其值为 0，由此确定整式 x^3-5x^2+4 中有因式 $(x-1)$. 于是可设

$x^3-5x^2+4=(x-1)(x^2+px+q)$ ，分别求出 p ， q 值，就可以把整式 x^3-5x^2+4 因式分解，这种因式分

解的方法叫做“试根法”. 上述式子中 p 、 q 的值分别为（ ）

A. 4，4

B. 4，-4

C. -4，4

D. -4，-4

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了多项式乘多项式、解方程组等知识点，掌握“试根法”是解题的关键.

根据“试根法”可得多项式 x^3-5x^2+4 的奇次项系数之和 $m=1$ ，偶次项系数之和 $n=-1$ ，满足 $m=-n$ ，

因此 $f(1)=0$ ，有因式 $(x-1)$. 通过比较系数法求 p 和 q 即可.

【详解】解：∵ $x^3-5x^2+4=(x-1)(x^2+px+q)$ ，

展开右边 $(x-1)(x^2+px+q)=x^3+px^2+qx-x^2-px-q=x^3+(p-1)x^2+(q-p)x-q$ 与原多项式比较系数,

$$\therefore \begin{cases} p-1=-5 \\ q-p=0 \\ -q=4 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} p=-4 \\ q=-4 \end{cases}.$$

$\therefore p$ 和 q 的值分别为 -4 和 -4 .

故选 D.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 2 分, 共 24 分)

7. 单项式 $x^m y^3$ 与单项式 $2x^2 y^n$ 是同类项, 则 $m+n$ 的值是_____.

【答案】 5

【解析】

【详解】 试题解析: 根据题意得: $\begin{cases} m=2 \\ n=3 \end{cases}$,

则 $m+n=2+3=5$.

故答案是: 5.

8. 分式 $\frac{x-3}{x+2}$ 有意义的条件是_____.

【答案】 $x \neq -2$

【解析】

【分析】 根据分式有意义的条件, 分母不能为 0, 列不等式求解即可.

【详解】 解: 由题意得: $x+2 \neq 0$

解得: $x \neq -2$

故答案为: $x \neq -2$.

【点睛】 本题考查了分式有意义的条件, 熟知分母不为零是解题的关键.

9. 将多项式 $3a^3 + ab^2 - 2a^2b - 4b^3$ 按字母 b 进行降幂排列: _____

【答案】 $-4b^3 + ab^2 - 2a^2b + 3a^3$

【解析】

【分析】 本题主要考查了多项式的排列问题, 从左往右把原多项式按照 b 的指数从大到小排列即可.

【详解】 解: 将多项式 $3a^3 + ab^2 - 2a^2b - 4b^3$ 按字母 b 进行降幂排列为 $-4b^3 + ab^2 - 2a^2b + 3a^3$,

故答案为: $-4b^3 + ab^2 - 2a^2b + 3a^3$.

10. 计算: $3a^2 \cdot (a^2 - a + 1) =$ _____.

【答案】 $3a^4 - 3a^3 + 3a^2$

【解析】

【分析】 本题考查整式的乘法运算, 熟练掌握运算法则是解题关键.

根据单项式与多项式相乘的法则, 用单项式分别乘多项式的每一项, 再将所得的积相加.

【详解】 解: 原式 $= 3a^2 \cdot a^2 + 3a^2 \cdot (-a) + 3a^2 \cdot 1$

$$= 3a^4 - 3a^3 + 3a^2.$$

故答案为 $3a^4 - 3a^3 + 3a^2$.

11. 已知 $a^2 + a - 5 = 0$, 则 $6 - 2a^2 - 2a =$ _____.

【答案】 -4

【解析】

【分析】 本题主要考查了代数式求值, 掌握整体代入思想是解题的关键.

由 $a^2 + a - 5 = 0$ 得 $a^2 + a = 5$, 然后再对 $6 - 2a^2 - 2a$ 变形后, 将 $a^2 + a = 5$ 整体代入计算即可.

【详解】 解: $\because a^2 + a - 5 = 0$,

$$\therefore a^2 + a = 5,$$

$$\therefore 6 - 2a^2 - 2a = 6 - 2(a^2 + a) = 6 - 2 \times 5 = 6 - 10 = -4.$$

故答案为 -4 .

12. 已知 $x^m = -6$, $x^n = 3$, 则 x^{m-n} 的值为_____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题考查了同底数幂的除法逆用, 解题的关键是熟知其运算法则.

根据同底数幂的除法逆用得到 $x^{m-n} = x^m \div x^n$, 再代入求值即可.

【详解】 解: $x^{m-n} = x^m \div x^n = (-6) \div 3 = -2$,

故答案为: -2 .

13. 分解因式: $x^3 - x =$ _____.

【答案】 $x(x-1)(x+1)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了因式分解，综合运用提取公因式和平方差公式因式分解是解题的关键.
先提取公因式 x ，再运用平方差公式进行因式分解即可.

【详解】 解： $x^3 - x$

$$= x(x^2 - 1)$$

$$= x(x-1)(x+1).$$

故答案为： $x(x-1)(x+1)$.

14. 比较大小： 2^{444} ____ 3^{333}

【答案】 $<$

【解析】

【分析】 把它们化为指数相同的幂，再比较大小即可.

【详解】 解： $\because 2^{444} = (2^4)^{111} = 16^{111}$ ， $3^{333} = (3^3)^{111} = 27^{111}$ ，

而 $16^{111} < 27^{111}$ ，

$$\therefore 2^{444} < 3^{333},$$

故答案为： $<$.

【点睛】 本题主要考查了幂的乘方以及有理数大小比较，熟记幂的运算法则是解答本题的关键.

15. 若 $(1-x)^{1-3x} = 1$ ，则 x 的值是_____.

【答案】 0 或 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了有理数乘方、零次幂等知识点，掌握分类讨论思想是解题的关键.

方程 $(1-x)^{1-3x} = 1$ 成立的条件有三种：底数为 1 ；底数为 -1 且指数为偶数；指数为 0 且底数不为 0 . 分别求解并验证即可解答.

【详解】 解：设底数 $a = 1-x$ ，指数 $b = 1-3x$.

当 $a = 1$ 时， $1-x = 1$ ，解得 $x = 0$ ，此时 $b = 1-3 \times 0 = 1$ ，故 $1^1 = 1$ ，成立；

当 $a = -1$ 时， $1-x = -1$ ，解得 $x = 2$ ，此时 $b = 1-3 \times 2 = -5$ 为奇数，故 $(-1)^{-5} = -1 \neq 1$ ，不成立；

当 $b=0$ 时, $1-3x=0$, 解得 $x=\frac{1}{3}$, 此时 $a=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\neq 0$, 故 $\left(\frac{2}{3}\right)^0=1$, 成立.

此外, 底数 $a=0$ 时无意义, 故不考虑.

综上, x 的值为 0 或 $\frac{1}{3}$.

故答案为: 0 或 $\frac{1}{3}$.

16. 若整数 x 使式子 $\frac{2x}{x-3} \div \frac{x(x^2-1)}{(x+1)(x-3)}$ 的值为整数, 则满足条件的 x 的值有_____个.

【答案】1

【解析】

【分析】本题考查分式的计算. 先化简分式, 再求使该式为整数的整数 x , 同时考虑分母不为零的限制条件.

【详解】解: $\frac{2x}{x-3} \div \frac{x(x^2-1)}{(x+1)(x-3)} = \frac{2x}{x-3} \times \frac{(x+1)(x-3)}{x(x+1)(x-1)} = \frac{2}{x-1}$,

原分式分母不为零, 则 $x \neq 3, x \neq -1$,

原分式除式不为零, 则 $x \neq \pm 1, x \neq 0$,

$\therefore x \neq \pm 1, x \neq 0, x \neq 3$,

原式化简为 $\frac{2}{x-1}$, 要使式子的值为整数, 则 $x-1$ 必须为 2 的约数, 即 $x-1 = \pm 1$ 或 ± 2 , 解得 $x = 2, 0, 3, -1$. 又

由 $x \neq \pm 1, x \neq 0, x \neq 3$ 排除后, 仅 $x = 2$ 满足条件. 故满足条件的 x 的值有 1 个.

故答案为: 1 .

17. 若实数 a, b 满足 $a^2 + a = b^2 + b = 4$, $a \neq b$, 则 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ 的值是_____.

【答案】 $-\frac{9}{4}$

【解析】

【分析】由题意可知 a, b 分别是方程 $t^2 + t - 4 = 0$ 的两个实数根, 可得 $a+b=-1$. $ab=-4$, 据此即可求解.

【详解】解: $\because a^2 + a = b^2 + b = 4$,

$\therefore a^2 + a = 4, b^2 + b = 4, a \neq b$,

$\therefore a, b$ 分别是方程 $t^2 + t - 4 = 0$ 的两个实数根,

$$\therefore a+b=-1, \quad ab=-4,$$

$$\therefore \frac{b}{a} + \frac{a}{b} = \frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab} = \frac{(-1)^2 - 2 \times (-4)}{-4} = -\frac{9}{4},$$

故答案为: $-\frac{9}{4}$.

【点睛】 本题考查了一元二次方程根与系数的关系，代数式求值问题，熟练掌握和运用一元二次方程根与系数的关系是解决本题的关键.

18. 定义新运算 $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $m * n = \frac{mn+1}{m+n}$, 若 $A = (\cdots((100 * 99) * 98) * \cdots * 3) * 2$, 计算 $f(A) =$ _____.

【答案】 5050

【解析】

【分析】 本题考查了新定义运算，分式的混合运算

通过分析新运算的性质，发现 $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ 满足 $f(m * n) = f(m) \cdot f(n)$ ，其中 $m * n = \frac{mn+1}{m+n}$. 利用

这一性质，将 $f(A)$ 转化为从 $k=2$ 到 $k=100$ 的 $f(k)$ 的乘积，通过约分简化计算.

【详解】 解: $\because f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $m * n = \frac{mn+1}{m+n}$

$$\therefore f(m * n) = \frac{\frac{mn+1}{m+n} + 1}{\frac{mn+1}{m+n} - 1} = \frac{mn+1+m+n}{mn+1-m-n}$$

$$f(m)f(n) = \frac{m+1}{m-1} \cdot \frac{n+1}{n-1} = \frac{mn+m+n+1}{mn-m-n+1},$$

$$\therefore f(m * n) = f(m) \cdot f(n)$$

$$\therefore f(A) = f(100) \cdot f(99) \cdot f(98) \cdots f(3) \cdot f(2)$$

$$= \frac{101}{99} \cdot \frac{100}{98} \cdot \frac{99}{97} \cdots \frac{4}{2} \cdot \frac{3}{1}.$$

$$= \frac{101 \times 100}{2 \times 1} = \frac{10100}{2} = 5050.$$

故答案为: 5050.

三、简答题 (本大题共 6 题, 共 30 分)

19. 计算: $-x^5 \cdot x^7 - (x^4)^3 - x^{10} \div x^2$

【答案】 $-2x^{12} - x^8$

【解析】

【分析】 本题主要考查了幂的混合运算、同底数幂相乘、幂的乘方、同底数幂的除法等知识点，掌握相关运算法则是解题的关键.

先运用同底数幂相乘、幂的乘方、同底数幂除法法则计算，然后再合并同类项即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & -x^5 \cdot x^7 - (x^4)^3 - x^{10} \div x^2 \\ & = -x^{12} - x^{12} - x^8 \\ & = -2x^{12} - x^8. \end{aligned}$$

20. 计算: $(a-b+3c)(a+2b-c)$

【答案】 $a^2 + ab + 2ac - 2b^2 + 7bc - 3c^2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了多项式乘多项式，掌握多项式乘多项式的运算法则是解题的关键.
直接利用多项式乘多项式的运算法则求解即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & (a-b+3c)(a+2b-c) \\ & = a^2 + 2ab - ac - ab - 2b^2 + bc + 3ac + 6bc - 3c^2 \\ & = a^2 + (2ab - ab) + (3ac - ac) - 2b^2 + (bc + 6bc) - 3c^2 \\ & = a^2 + ab + 2ac - 2b^2 + 7bc - 3c^2. \end{aligned}$$

21. 因式分解: $(a+b)(x-y) + (a-b)(y-x)$

【答案】 $2b(x-y)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了因式分解，灵活运用提取公因式法进行因式分解是解题的关键.
先凑出公因式 $(x-y)$ ，然后再提取公因式即可解答.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & (a+b)(x-y) + (a-b)(y-x) \\ & = (a+b)(x-y) - (a-b)(x-y) \\ & = (x-y)[(a+b) - (a-b)] \\ & = (x-y)2b \end{aligned}$$

$$= 2b(x-y).$$

22. 因式分解: $2x^3y + 2x^2y^2 - 12xy^3$

【答案】 $2xy(x+3y)(x-2y)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了因式分解，灵活运用提取公因式法和十字相乘法进行因式分解是解题的关键.

先提取公因式 $2xy$ ，然后再运用十字相乘法进行因式分解即可.

【详解】 解: $2x^3y + 2x^2y^2 - 12xy^3$

$$= 2xy(x^2 + xy - 6y^2)$$

$$= 2xy(x+3y)(x-2y).$$

23. 计算: $\frac{2}{a-1} - \frac{6}{a^2-1} - \frac{3}{a+1}$

【答案】 $-\frac{1}{a-1}$

【解析】

【分析】 本题考查了分式的减法，先通分，再利用分式的减法法则计算即可，掌握运算法则是解题的关键.

【详解】 解: $\frac{2}{a-1} - \frac{6}{a^2-1} - \frac{3}{a+1}$

$$= \frac{2(a+1)}{(a+1)(a-1)} - \frac{6}{(a+1)(a-1)} - \frac{3(a-1)}{(a+1)(a-1)}$$

$$= \frac{2(a+1) - 6 - 3(a-1)}{(a+1)(a-1)}$$

$$= \frac{2a+2-6-3a+3}{(a+1)(a-1)}$$

$$= \frac{-a-1}{(a+1)(a-1)}$$

$$= \frac{-(a+1)}{(a+1)(a-1)}$$

$$= -\frac{1}{a-1}.$$

24. 因式分解: $a(a+2b) + (b+1)(b-1)$

【答案】 $(a+b-1)(a+b+1)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了因式分解、整式的混合运算等知识点，掌握运用平方差公式进行因式分解是解题的关键.

先根据整式的混合运算法则化简，然后再运用平方差公式分解即可.

【详解】 解： $a(a+2b)+(b+1)(b-1)$

$$= a^2 + 2ab + b^2 - 1$$
$$= (a+b)^2 - 1$$
$$= (a+b-1)(a+b+1).$$

四、解答题（本大题共 4 题，25 题 6 分，26-27 题 7 分，28 题 8 分，共 28 分）

25. 已知关于 x 的整式 $A = x^2 + mx + 1$ ， $B = nx^2 + 3x + 2m$ (m, n 为常数). 若整式 $A+B$ 的取值与 x 无关，求 $m-n$ 的值.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题主要考查了整式的加减法则，熟练掌握运算法则是解决本题的关键.

列出 $A+B$ 的式子，令含 x 的式子前的系数为 0 求解即可.

【详解】 解： $\because A = x^2 + mx + 1$ ， $B = nx^2 + 3x + 2m$ ，

$$\therefore A+B = x^2 + mx + 1 + nx^2 + 3x + 2m = (1+n)x^2 + (m+3)x + 1 + 2m,$$

$\because$ 整式 $A+B$ 的取值与 x 无关，

$$\therefore 1+n=0, \quad m+3=0,$$

解得： $n=-1$ ， $m=-3$ ，

则 $m-n = -3 - (-1) = -3 + 1 = -2$.

26. 先化简再求值： $\left(\frac{x^2}{x+1} - x + 1 \right) \div \frac{x-1}{x^2+2x+1}$. 其中 x 从 $-1, 0, 1$ 中任取一个合适的值.

【答案】 $\frac{x+1}{x-1}$ ， $x=0$ 时，原式 $= -1$

【解析】

【分析】 本题考查了分式的化简求值，解题的关键是正确进行分式的通分、因式分解与约分，并选取使分

式有意义的 x 的值.

先对括号内的分式通分计算, 再将除法转化为乘法, 通过因式分解和约分化简, 最后选取使分式有意义的 $x=0$ 代入求值.

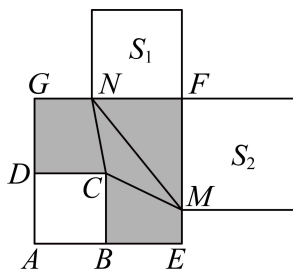
$$\begin{aligned} \text{【详解】解: } & \left(\frac{x^2}{x+1} - x + 1 \right) \div \frac{x-1}{x^2+2x+1} \\ &= \left[\frac{x^2}{x+1} - (x-1) \right] \div \frac{x-1}{(x+1)^2} \\ &= \left[\frac{x^2}{x+1} - \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} \right] \times \frac{(x+1)^2}{x-1} \\ &= \frac{x^2 - (x^2 - 1)}{x+1} \times \frac{(x+1)^2}{x-1} \\ &= \frac{1}{x+1} \times \frac{(x+1)^2}{x-1} \\ &= \frac{x+1}{x-1}, \end{aligned}$$

由分式有意义的条件: 分母不为零, 得 $x+1 \neq 0$ 且 $x-1 \neq 0$, 即 $x \neq -1$ 且 $x \neq 1$.

从 $-1, 0, 1$ 中取合适的 $x=0$, 代入 $\frac{x+1}{x-1}$ 得:

$$\text{原式} = \frac{0+1}{0-1} = -1.$$

27. 如图, 正方形 $ABCD$ 和正方形 $AEFG$ 的边长分别是 a 、 b ; M 、 N 分别是边 EF 、 FG 上的点, $FM = m$, $FN = n$.



(1) 若 $b-a=4$, 请用 m 、 n 表示出三角形 MCN 的面积;

(2) 若四边形 $CMFN$ 面积是阴影部分的一半, 以 FN 、 FM 为边长向外作正方形, 面积分别为 S_1 、 S_2 . 已

知 $a+b=10$, $S_1+S_2=64$, 求三角形 MFN 面积.

$$\text{【答案】 (1) } 2m+2n-\frac{1}{2}mn$$

(2) 9

【解析】

【分析】 本题主要考查了多项式乘多项式、列代数式、完全平方公式等知识点，掌握数形结合思想是解题的关键.

(1) 由题意可得： $GN = b - n, ME = b - m, CD = BE = a - b, DC = BC = a$ ，再由

$S_{\triangle MCN} = S_{\text{正方形}AEFG} - S_{\text{正方形}AEBCD} - S_{\text{梯形}BCME} - S_{\text{梯形}DCNG} - S_{\triangle FNM}$ 列代数式，然后整理即可解答；

(2) 由题意可得 $S_{\text{阴影}} = b^2 - a^2$ ， $S_{\text{四边形}CMFN} = \frac{1}{2}(b-a)(m+n)$ ，再根据四边形 $CMFN$ 面积是阴影部分的一半可得 $m+n = a+b = 10$ ；由 $S_1 + S_2 = 64$ 可得 $m^2 + n^2 = 64$ ，再结合完全平方公式可得 $mn = 18$ ，最后运用三角形的面积公式即可解答.

【小问 1 详解】

解：由题意可得： $GN = b - n, ME = b - m, CD = BE = a - b, DC = BC = a$

$$\therefore S_{\triangle MCN} = S_{\text{正方形}AEFG} - S_{\text{正方形}AEBCD} - S_{\text{梯形}BCME} - S_{\text{梯形}DCNG} - S_{\triangle FNM},$$

$$\therefore S_{\triangle MCN} = b^2 - a^2 - \frac{1}{2}(a+b-m)(b-a) - \frac{1}{2}(a+b-n)(b-a) - \frac{1}{2}mn$$

$$= (b+a)(b-a) - \frac{1}{2}(a+b-m)(b-a) - \frac{1}{2}(a+b-n)(b-a) - \frac{1}{2}mn$$

$$= (b-a) \left[(a+b) - \frac{1}{2}(a+b-m) - \frac{1}{2}(a+b-n) \right] - \frac{1}{2}mn$$

$$= (b-a) \left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n \right) - \frac{1}{2}mn$$

$$= \frac{1}{2}(b-a)(m+n) - \frac{1}{2}mn$$

$$= \frac{1}{2} \times 4(m+n) - \frac{1}{2}mn$$

$$= 2m + 2n - \frac{1}{2}mn.$$

【小问 2 详解】

解： $S_{\text{阴影}} = b^2 - a^2$,

$$S_{\text{四边形}CMFN} = S_{\text{正方形}AEFG} - S_{\text{正方形}AEBCD} - S_{\text{梯形}BCME} - S_{\text{梯形}DCNG}$$

$$= b^2 - a^2 - \frac{1}{2}(a+b-m)(b-a) - \frac{1}{2}(a+b-n)(b-a)$$

$$\begin{aligned}
&= (b+a)(b-a) - \frac{1}{2}(a+b-m)(b-a) - \frac{1}{2}(a+b-n)(b-a) \\
&= (b-a) \left[(a+b) - \frac{1}{2}(a+b-m) - \frac{1}{2}(a+b-n) \right] \\
&= (b-a) \left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n \right) \\
&= \frac{1}{2}(b-a)(m+n),
\end{aligned}$$

∵ 四边形 $CMFN$ 面积是阴影部分的一半,

$$\therefore \frac{1}{2}(b^2 - a^2) = \frac{1}{2}(b-a)(m+n), \text{ 即 } \frac{1}{2}(b+a)(b-a) = \frac{1}{2}(b-a)(m+n),$$

$$\therefore m+n = a+b = 10,$$

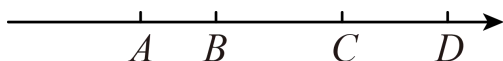
$$\therefore S_1 + S_2 = 64,$$

$$\therefore m^2 + n^2 = 64,$$

$$\therefore (m+n)^2 - 2mn = 64, \text{ 即 } 100 - 2mn = 64, \text{ 解得: } mn = 18,$$

$$\therefore \text{三角形 } MFN \text{ 面积 } \frac{1}{2}mn = 9.$$

28. 如图, 数轴上 A 、 B 、 C 、 D 依次从左到右排列. 如果 A 、 B 之间所有点表示的数 x , 按照某种运算 F , 恰好可以对应到 C 、 D 之间所有点表示的数, 则称运算 F 为“优美运算”. 例如: 数轴上 $A:2$, $B:4$ 之间的数 x , 可以通过运算 $F = x + 6$, 对应到 $C:8$, 和 $D:10$ 之间的数, 则 $F = x + 6$ 为它的优美运算.



(1) 若 A 表示的数为 2, B 表示的数为 4.

①若 C 、 D 表示的数分别为 10、20, 则对于 A 、 B 之间的 x , 它的优美运算 $F = \underline{\hspace{2cm}}$ (写出一种即可).

②若 C 、 D 表示的数分别为 5、17; 对于 A 、 B 之间的数 x , 它的优美运算 $F = ax + b$ (a 、 b 为常数), 求 a 、 b 的值.

(2) 若 A 、 B 之间的距离为 2, B 、 C 距离为 8, C 、 D 距离为 6, 对于 A 、 B 之间的 x , 同时存在优美运算

$$F_1 = \frac{m}{x} (m > 0), F_2 = nx^2 - 12nx + 36n + k, \text{ 求 } m、n、k \text{ 的值.}$$

【答案】 (1) ① $F = 5x$ (答案不唯一); ② $a = 6$, $b = -7$.

(2) $m = 105$; $k = 15$ 、 $n = 6$ 或 $k = 21$ 、 $n = -6$.

【解析】

【分析】 本题主要考查了二元一次方程组的应用、不等式的应用、数轴上的点等知识点，根据题意正确列出方程组和不等式是解题的关键.

(1) ①设运算 $F = kx + c$ ，根据题意列出关于 k 、 c 的不等式求解即可；②根据题意列出关于 a 、 b 的不等式求解即可；

(2) 设 A 表示的数为 t ，则 B 表示的数为 $t+2$ ， C 表示的数为 $t+2+8=t+10$ ， D 表示的数 $t+10+6=t+16$. 存在优美运算 $F_1 = \frac{m}{x} (m > 0)$ ，即 F_1 与 x 成反比，据此列方程组可求得 m 、 t ，进而得到 A 表示的数为 5，则 B 表示的数为 7， C 表示的数为 15， D 表示的数 21；再存在优美运算 $F_2 = nx^2 - 12nx + 36n + k = n(x-6)^2 + k$ ， $5 \leq x \leq 7$ ， $15 \leq F_2 \leq 21$ ，据此分 $n > 0$ 和 $n < 0$ 两种列求解即可.

【小问 1 详解】

解：①设运算 $F = kx + c$ ，由题意可得：

$$\begin{cases} 2k + c = 10 \\ 4k + c = 20 \end{cases},$$

解得： $\begin{cases} k = 5 \\ c = 0 \end{cases}$,

$\therefore F = 5x$ (答案不唯一).

② $\because C$ 、 D 表示的数分别为 5、17；对于 A 、 B 之间的数 x ，它的优美运算 $F = ax + b$ (a 、 b 为常数)，

$$\therefore \begin{cases} 2a + b = 5 \\ 4a + b = 17 \end{cases},$$

解得： $\begin{cases} a = 6 \\ b = -7 \end{cases}$,

$\therefore a = 6$ ， $b = -7$.

【小问 2 详解】

解：设 A 表示的数为 t ，则 B 表示的数为 $t+2$ ， C 表示的数为 $t+2+8=t+10$ ， D 表示的数 $t+10+6=t+16$.

$\therefore$ 存在优美运算 $F_1 = \frac{m}{x} (m > 0)$ ，即 F_1 与 x 成反比，

$$\therefore \begin{cases} t+10 = \frac{m}{t+2} \\ t+16 = \frac{m}{t} \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} t=5 \\ m=105 \end{cases},$$

$\therefore A$ 表示的数为 5, 则 B 表示的数为 7, C 表示的数为 15, D 表示的数为 21,

$\therefore$ 存在优美运算 $F_2 = nx^2 - 12nx + 36n + k = n(x-6)^2 + k$, $5 \leq x \leq 7$, $15 \leq F_2 \leq 21$,

$\therefore$ 当 $n > 0$, $x = 6$ 时, F_2 的最小值为 $k = 15$, 则 $n = 21 - k = 6$;

当 $n < 0$, $x = 6$ 时, F_2 的最大值为 $k = 21$, 则 $n = 15 - 21 = -6$;

综上, $m = 105$; $k = 15$ 、 $n = 6$ 或 $k = 21$ 、 $n = -6$.