

2025 学年第一学期初一数学期中考试卷

一、选择题 (本大题共 6 题, 每小题 3 分, 满分 18 分)

1. 在下列代数式: x^2+5 , -1 , $\frac{5}{\pi}$, $\frac{1}{x+5}$, $5x$, $\frac{x+1}{5}$ 中, 整式有 ()

A. 3 个

B. 4 个

C. 5 个

D. 6 个

【答案】C

【解析】

【分析】 本题主要考查整式, 整式是分母中不含字母的代数式, 根据定义, 逐个判断每个代数式是否为整式即可.

【详解】 解: $\because$ 整式是分母中不含字母的代数式,

$\therefore x^2+5$ 是多项式, 分母无字母, 是整式;

$\therefore -1$ 是常数, 是整式;

$\therefore \frac{5}{\pi}$ 分母是常数 π , 无字母, 是整式;

$\therefore \frac{1}{x+5}$ 分母含字母 x , 不是整式;

$\therefore 5x$ 是单项式, 分母无字母, 是整式;

$\therefore \frac{x+1}{5}$ 分母是常数 5, 无字母, 是整式.

综上, 整式有 5 个.

故选: C.

2. 下列说法正确的是 ()

A. $\frac{1}{2}a^2b$ 是三次单项式

B. $3x^2y$ 与 $2y^2x$ 是同类项

C. $5x^2y-4xy-3x^2y+1$ 是二次四项式

D. $-\frac{x^2-2x+6}{3}$ 的常数项是 -6

【答案】A

【解析】

【分析】 本题考查单项式的次数、同类项的定义、多项式的次数和项数、以及常数项的概念. 根据定义逐一判断即可.

【详解】 解: $\because$ 单项式的次数是所有字母的指数之和,

$\therefore \frac{1}{2}a^2b$ 中, a 的指数为 2, b 的指数为 1, 次数为 3, 是三次单项式, 故 A 正确;

∴ 同类项需相同字母且相同字母指数相同,

∴ $3x^2y$ 与 $2y^2x$ 中 x 和 y 的指数均不同, 不是同类项, 故 B 错误;

∴ $5x^2y - 4xy - 3x^2y + 1 = 2x^2y - 4xy + 1$, 最高次项 $2x^2y$ 的次数为 3, 是三次三项式, 故 C 错误;

∴ $-\frac{x^2 - 2x + 6}{3} = -\frac{x^2}{3} + \frac{2x}{3} - 2$, 常数项为 -2 , 不是 -6 , 故 D 错误.

故选: A.

3. 下列计算正确的是 ()

A. $a^8 \div a = a^9$ B. $2a + a = 2a^2$ C. $-a^3 \cdot 3a^4 = -3a^7$ D. $(2ab^2)^3 = 6a^3b^6$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题主要考查了整式运算, 熟练掌握相关运算法则是解题关键. 根据同底数幂的除法、合并同类项法则、单项式乘以单项式法则、积的乘方运算法则, 逐项分析判断即可.

【详解】 解: A. $a^8 \div a = a^7$, 故原运算错误, 不符合题意;

B. $2a + a = 3a$, 故原运算错误, 不符合题意;

C. $-a^3 \cdot 3a^4 = -3a^7$, 选项正确, 符合题意;

D. $(2ab^2)^3 = 8a^3b^6$, 故原运算错误, 不符合题意.

故选: C.

4. 下列各式中能用平方差公式计算的是 ()

A. $(2 - 3x)(3x - 2)$ B. $(m + 3n)(3n - m)$
C. $(3a + 2b)(3b - 2a)$ D. $(4x - y)(-4x + y)$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了平方差公式, 即 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, 平方差公式适用于两个二项式相乘, 其中一项相同, 另一项互为相反数. 据此逐项判断即可.

【详解】 解: A. $(2 - 3x)(3x - 2) = -(2 - 3x)^2$, 不符合题意;

B. $(m + 3n)(3n - m) = (3n + m)(3n - m) = (3n)^2 - m^2$, 符合题意;

C. $(3a+2b)(3b-2a)$, 无相同项, 不符合题意;

D. $(4x-y)(-4x+y) = -(4x-y)^2$, 不符合题意.

故选: B.

5. 下列等式从左到右的变形, 是因式分解的是 ()

A. $2x(x-3) = 2x^2 - 6x$

B. $12m^2n = 3m^2 \times 4n$

C. $a^2 - 2ab + b^2 - 1 = (a-b)^2 - 1$

D. $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解, 因式分解是把一个多项式转化成几个整式积的形式. 根据定义逐一判定即可得答案.

【详解】 解: A、 $2x(x-3) = 2x^2 - 6x$, 是整式乘法, 不是因式分解, 故本选项不合题意;

B、 $12m^2n = 3m^2 \times 4n$, 等式左边不是多项式, 不是因式分解, 故本选项不合题意;

C、 $a^2 - 2ab + b^2 - 1 = (a-b)^2 - 1$, 等式的右边不是积的形式, 不是因式分解, 故本选项不合题意;

D、 $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$, 是因式分解, 故本选项符合题意;

故选: D.

6. 我国北宋数学家宪在 1050 年左右首次发现了一个奇妙的“三角形”, 这个“三角形”被称为贾宪三角形, 这个“三角形”第 1 行有 1 个数, 第 2 行有 2 个数.....第 n 行有 n 个数, 不仅如此, 这个“三角形”第 $n+1$ 行中的数竟然与 $(a+b)^n$ (n 是正整数) 展开式各项的系数完全吻合, 如下图所示:

$(a+b)^0=1$						1										
$(a+b)^1=a+b$						1		1								
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$						1		2		1						
$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$						1		3		3		1				
$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$						1		4		6		4		1		
$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$						1		5		10		10		5		1
.....																

根据“贾宪三角形”请计算 $(a+b)^8$ 的展开式中从左起第五项的系数为 ()

A. 84

B. 56

C. 28

D. 70

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查了数字变化规律，据图形中的规律即可求出 $(a+b)^8$ 的展开式中从左起第五项的系数.

【详解】 解：找规律发现 $(a+b)^4$ 的第三项系数为 1；

$(a+b)^5$ 的第五项系数为 $5 = 4 + 1$ ；

$(a+b)^6$ 的第五项系数为 $15 = 10 + 5$ ；

$(a+b)^7$ 的第五项系数为 $35 = 20 + 15$ ；

$\therefore (a+b)^8$ 第五项系数为 $35 + 35 = 70$.

故选：D.

二、填空题（本大题共 12 题，每空 2 分，满分 26 分）

7. 单项式 $\frac{-x^2y}{5}$ 的系数是_____.

【答案】 $-\frac{1}{5}$

【解析】

【分析】 本题考查单项式的系数，单项式中的数字因数叫作单项式的系数，根据单项式系数的定义即可得出答案.

【详解】 解：单项式 $\frac{-x^2y}{5}$ 的系数是 $-\frac{1}{5}$,

故答案为： $-\frac{1}{5}$.

8. 把整式 $3xy^2 - 2x^2y - x^3 + 1$ 按字母 x 的降幂排列是_____.

【答案】 $-x^3 - 2x^2y + 3xy^2 + 1$

【解析】

【分析】 本题考查多项式，我们把一个多项式的各项按照某个字母的指数从大到小或从小到大的顺序排列，称为按这个字母的降幂或升幂排列. 要注意，在排列多项式各项时，要保持其原有的符号. 正确理解降幂排列或升幂排列的定义是解题的关键.

【详解】 解：把整式 $3xy^2 - 2x^2y - x^3 + 1$ 按字母 x 的降幂排列是： $-x^3 - 2x^2y + 3xy^2 + 1$.

故答案为： $-x^3 - 2x^2y + 3xy^2 + 1$.

9. 计算: (1) $2a(a-3)=$ _____, (2) $-5xy^2 \div 15xy =$ _____.

【答案】 ①. $2a^2 - 6a$ ②. $-\frac{1}{3}y$

【解析】

【分析】 本题考查整式的乘除运算. 掌握单项式乘多项式法则、用单项式除以单项式法则是解题的关键.

(1) 运用单项式乘多项式法则计算即可;

(2) 运用单项式除以单项式法则计算即可.

【详解】 解: (1) 原式 $= 2a \cdot a + 2a \cdot (-3) = 2a^2 - 6a$;

(2) 原式 $= -\frac{5}{15} \cdot x^{1-1} \cdot y^{2-1} = -\frac{1}{3}x^0y = -\frac{1}{3}y$.

10. 计算 (结果用幂的形式表示): $(x-y)^3(y-x)^2 =$ _____.

【答案】 $(x-y)^5$

【解析】

【分析】 本题考查整式的乘法, 根据幂的乘方将 $(y-x)^2$ 转化为 $(x-y)^2$, 再根据同底数幂的乘法可得结论. 解题的关键是掌握: 同底数幂的相乘, 底数不变, 指数相加.

【详解】 解: $(x-y)^3(y-x)^2$
 $= (x-y)^3[-(x-y)]^2$
 $= (x-y)^3[(-1) \times (x-y)]^2$
 $= (x-y)^3 \times (-1)^2 \times (x-y)^2$
 $= (x-y)^3 \times 1 \times (x-y)^2$
 $= (x-y)^5$.

故答案为: $(x-y)^5$.

11. 如果 $2x^{m+4}y^4$ 与 $3xy^{2n}$ 的和是单项式, 那么 $m^n =$ _____.

【答案】 9

【解析】

【分析】 本题考查同类项, 根据同类项的定义 (所含字母相同, 相同字母的指数相同) 列出方程 $m+4=1$, $4=2n$ 求出 m 、 n 的值, 再代入 m^n 计算即可. 解题的关键是掌握同类项的概念.

【详解】解： $\because 2x^{m+4}y^4$ 与 $3xy^{2n}$ 的和是单项式，

$\therefore 2x^{m+4}y^4$ 与 $3xy^{2n}$ 是同类项，

$$\therefore m+4=1, \quad 4=2n,$$

解得： $m=-3, \quad n=2,$

$$\therefore m^n = (-3)^2 = 9.$$

故答案为： 9.

12. $(x+m)$ 与 $(x-3)$ 的乘积中不含 x 的一次项，则 m 的值为 _____.

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题考查多项式乘法中不含某一项的问题，用多项式乘以多项式的法则进行计算，合并同类项后， x 的一次项的系数为 0，进行求解即可.

【详解】解： $(x+m)(x-3) = x^2 + (m-3)x - 3m,$

$\therefore (x+m)$ 与 $(x-3)$ 的乘积中不含 x 的一次项，

$$\therefore m-3=0, \quad \text{解得： } m=3;$$

故答案为： 3.

13. 分解因式： $2a^3b^2 - 3a^2b^2 =$ _____.

【答案】 $a^2b^2(2a-3)$

【解析】

【分析】 此题主要考查了提取公因式法分解因式，正确找出公因式是解题关键. 直接提取公因式 a^2b^2 ，进而分解因式得出答案.

【详解】解： 原式 $= a^2b^2(2a-3).$

故答案为： $a^2b^2(2a-3).$

14. 因式分解： $x^2 - 5x - 6 =$ _____.

【答案】 $(x+1)(x-6)$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解，根据十字相乘法进行因式分解即可.

【详解】解： $x^2 - 5x - 6 = (x+1)(x-6)$ ，

故答案为： $(x+1)(x-6)$ 。

15. 已知 $5^a = 3, 5^b = 2$ ，则 5^{2a+3b} 的值为_____。

【答案】 72

【解析】

【分析】 本题考查同底数幂的乘法和幂的乘方的逆运算。先利用幂的乘方求出 5^{2a} 和 5^{3b} 的值，再通过同底数幂的乘法公式计算 5^{2a+3b} 即可。

【详解】解： $\because 5^a = 3, 5^b = 2$ ，

$$\therefore 5^{2a} = (5^a)^2 = 3^2 = 9,$$

$$5^{3b} = (5^b)^3 = 2^3 = 8,$$

$$\therefore 5^{2a+3b} = 5^{2a} \cdot 5^{3b} = 9 \times 8 = 72.$$

故答案为： 72.

16. 若 $x^2 + mx + \frac{1}{9}$ 是关于 x 的完全平方式，则常数 m 的值为_____。

【答案】 $\pm \frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了完全平方公式的应用，根据 $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ ，进行作答即可

【详解】解： $\because x^2 + mx + \frac{1}{9}$ 是关于 x 的完全平方式，

$$\therefore mx = \pm 2 \times x \times \frac{1}{3}$$

$$\text{解得 } m = \pm \frac{2}{3}$$

$$\text{故答案为： } \pm \frac{2}{3}$$

17. 已知 m 是方程 $x^2+x-1=0$ 的根，则式子 m^3+2m^2+2017 的值为_____。

【答案】 2018

【解析】

【分析】 先根据 m 是方程 $x^2+x-1=0$ 的根，可得： $m^2+m-1=0$ ，继而可得： $m^2=1-m$ ，

由 $m^3 = m^2 \times m = (1-m) \times m = m - m^2 = m - (1-m) = 2m - 1$ ，因此 $m^3 + 2m^2 + 2017 = 2m - 1 + 2(1-m) + 2017 = 2018$ 。

【详解】因为 m 是方程 $x^2+x-1=0$ 的根,

所以 $m^2+m-1=0$,

所以 $m^2=1-m$,

所以 $m^3=m^2 \times m=(1-m) \times m=m-m^2=m-(1-m)=2m-1$,

所以 $m^3+2m^2+2017=2m-1+2(1-m)+2017=2018$.

【点睛】本题主要考查一元二次方程解的定义和降次思想求代数式的值,解决本题的关键是要熟练掌握一元二次方程解的定义和降次思想求代数式的值.

18. 式子 $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$, 此时, 3 叫做以 2 为底 8 的对数, 记为 $\log_2 8$ (即 $\log_2 8 = 3$). 一般地, 若 $a^n = b$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$, $b > 0$), 则 n 叫做以 a 为底 b 的对数, 记为 $\log_a b$ (即 $\log_a b = n$). 如 $3^4 = 81$, 则 4 叫做以 3 为底 81 的对数, 记为 $\log_3 81$, 则 $\log_3 81 = 4$, 同理 $\log_3 27 = 3$, $\log_3 3 = 1$. 由此可以得到下列式子: $\log_3 81 = \log_3 27 + \log_3 3$, 根据以上的信息及运算关系, 若 $\log_3 (x+12) + \log_3 x = 2\log_3 (x+2)$, 则 $x =$ _____

【答案】 $\frac{1}{2}$ ## 0.5

【解析】

【分析】本题考查新定义, 同底数幂的乘法, 设 $a = \log_3 (x+12)$, $b = \log_3 x$, $c = \log_3 (x+2)$, 则 $3^a = x+12$, $3^b = x$, $3^c = x+2$, 再根据同底数幂的乘法及新定义得到 $(x+12)$, x 和 $(x+2)$ 的关系, 求解即可. 正确理解新定义是解题的关键.

【详解】解: 设 $a = \log_3 (x+12)$, $b = \log_3 x$, $c = \log_3 (x+2)$,

$$\therefore a+b=2c, \quad 3^a = x+12, \quad 3^b = x, \quad 3^c = x+2,$$

$$\therefore 3^{a+b} = 3^a \times 3^b = x(x+12), \quad 3^{2c} = 3^c \times 3^c = (x+2) \cdot (x+2) = (x+2)^2,$$

$$\therefore a+b = \log_3 x(x+12), \quad 2c = \log_3 (x+2)^2,$$

$$\therefore \log_3 x(x+12) = \log_3 (x+2)^2,$$

$$\therefore x(x+12) = (x+2)^2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{1}{2}.$$

故答案为: $\frac{1}{2}$.

三、计算（本大题共有 8 题，每题 4 分，满分 32 分）

19. 计算： $5x^2 + 4 - 3x^2 - 5x - 4 + 6x$.

【答案】 $2x^2 + x$

【解析】

【分析】 本题考查整式的计算，原式通过合并同类项进行计算即可.

【详解】 解： $5x^2 + 4 - 3x^2 - 5x - 4 + 6x$
 $= 5x^2 - 3x^2 + (-5x + 6x) + (4 - 4)$
 $= 2x^2 + x$.

20. 计算： $2a^2 \cdot a^4 + (-a^3)^2 - 3a^6$.

【答案】 0

【解析】

【分析】 本题考查了整式的运算，根据单项式乘以单项式法则，积的乘方法则以及合并同类项法则计算即可.

【详解】 解： 原式 $= 2a^6 + a^6 - 3a^6$
 $= (2 + 1 - 3)a^6$
 $= 0$.

21. 计算： $(x - y + 2)(x + y - 2)$.

【答案】 $x^2 - y^2 + 4y - 4$

【解析】

【分析】 本题考查完全平方公式及平方差公式，熟知运算法则及乘法公式是正确解决本题的关键.
先将两个多项式添括号变形成 $[x - (y - 2)][x + (y - 2)]$ ，再用平方差公式及完全平方公式计算即可.

【详解】 解： $(x - y + 2)(x + y - 2)$
 $= [x - (y - 2)][x + (y - 2)]$
 $= x^2 - (y - 2)^2$
 $= x^2 - (y^2 - 4y + 4)$
 $= x^2 - y^2 + 4y - 4$.

22. 计算: $2x^2y^2(2x^2 - 3xy + 5y^2) \div (-4x^2y^2)$.

【答案】 $-x^2 + \frac{3}{2}xy - \frac{5}{2}y^2$

【解析】

【分析】 本题考查了单项式乘以多项式和多项式除以单项式，根据单项式乘以多项式法则和多项式除以单项式法则计算即可.

【详解】 解: 原式 $= (4x^4y^2 - 6x^3y^3 + 10x^2y^4) \div (-4x^2y^2)$
 $= 4x^4y^2 \div (-4x^2y^2) - 6x^3y^3 \div (-4x^2y^2) + 10x^2y^4 \div (-4x^2y^2)$
 $= -x^2 + \frac{3}{2}xy - \frac{5}{2}y^2.$

23. 利用乘法公式简便计算: $200^2 - 198 \times 202$.

【答案】 4

【解析】

【分析】 本题考查了运用平方差公式进行简便运算的能力，是一道常规题，比较简单. 将 198×202 变形为 $(200 - 2) \times (200 + 2)$ ，再使用平方差公式即可解答.

【详解】 解: $200^2 - 198 \times 202$
 $= 200^2 - (200 - 2) \times (200 + 2)$
 $= 200^2 - (200^2 - 4)$
 $= 200^2 - 200^2 + 4$
 $= 4.$

24. 计算: $(2x - y)^2 - (3x + 2y)(3x - 2y)$

【答案】 $-5x^2 - 4xy + 5y^2$

【解析】

【分析】 本题考查了完全平方公式与平方差公式，根据乘法公式进行计算即可求解.

【详解】 解: $(2x - y)^2 - (3x + 2y)(3x - 2y)$
 $= 4x^2 - 4xy + y^2 - (9x^2 - 4y^2)$
 $= 4x^2 - 4xy + y^2 - 9x^2 + 4y^2$

$$= -5x^2 - 4xy + 5y^2.$$

25. 因式分解: $8ax^2 + 16a^2x + 8a^3$.

【答案】 $8a(x+a)^2$

【解析】

【分析】 先提公因式 $8a$, 然后根据完全平方公式因式分解即可求解.

【详解】 解: 原式 $= 8a(x^2 + 2ax + a^2)$
 $= 8a(x+a)^2.$

【点睛】 本题考查了因式分解, 掌握因式分解的方法是解题的关键.

26. 分解因式: $(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12$

【答案】 $(x+2)(x-1)(x+3)(x-2)$

【解析】

【分析】 本题考查十字相乘法分解因式, 先把 $(x^2 + x)$ 当成一个整体进行分解, 再逐个括号进行分解即可.

【详解】 $(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12$
 $= (x^2 + x - 2)(x^2 + x - 6)$
 $= (x+2)(x-1)(x+3)(x-2).$

四、解答题: (本大题共有 4 题, 27、28 题 5 分, 29 题 6 分, 30 题 8 分, 满分 24 分)

27. 先化简, 再求值: $(a+b)(3a-2b) - b(a-b)$, 其中 $a = \frac{1}{3}, b = -1$.

【答案】 $3a^2 - b^2, -\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查多项式乘以多项式, 熟练掌握多项式乘以多项式是解题的关键; 因此此题可根据多项式乘以多项式进行化简, 然后再代值求解即可.

【详解】 解: 原式 $= 3a^2 + ab - 2b^2 - ab + b^2 = 3a^2 - b^2$;

$\therefore a = \frac{1}{3}, b = -1,$

$$\therefore \text{原式} = 3 \times \frac{1}{9} - 1 = -\frac{2}{3}.$$

28. 已知整式 $A, B, C, A + B = 2C$. 整式 $A = x^2 - 3xy + 2y^2$, $C = x^2 + 0.5xy - 2y^2$.

(1) 求整式 B ;

(2) 若 x, y 满足 $(x+2)^2 + |y-1| = 0$, 求整式 B 的值.

【答案】 (1) $x^2 + 4xy - 6y^2$

(2) -10

【解析】

【分析】 本题主要考查整式的加减运算, 熟练掌握整式的加减运算法则是解题的关键.

(1) 将 $A = x^2 - 3xy + 2y^2$, $C = x^2 + 0.5xy - 2y^2$ 代入 $B = 2C - A$ 中, 先去括号, 再合并同类项化简即可得;

(2) 根据绝对值和平方的非负性先求得 x, y 的值, 再代入原式求解即可.

【小问 1 详解】

$$\because A = x^2 - 3xy + 2y^2, \quad C = x^2 + 0.5xy - 2y^2,$$

$$\text{且 } A + B = 2C,$$

$$\therefore B = 2C - A = 2(x^2 + 0.5xy - 2y^2) - (x^2 - 3xy + 2y^2)$$

$$= 2x^2 + xy - 4y^2 - x^2 + 3xy - 2y^2$$

$$= x^2 + 4xy - 6y^2.$$

【小问 2 详解】

$$\text{由 (1) 可得 } B = x^2 + 4xy - 6y^2,$$

$$\because (x+2)^2 + |y-1| = 0,$$

$$\therefore x+2=0, y-1=0,$$

$$\therefore x=-2, y=1,$$

$$\therefore B = x^2 + 4xy - 6y^2$$

$$= (-2)^2 + 4 \times (-2) \times 1 - 6 \times 1^2$$

$$= -10.$$

29. 阅读：分解因式 $x^2 + 2x - 3$.

解：原式 $= x^2 + 2x + 1 - 1 - 3$

$$= (x^2 + 2x + 1) - 4$$

$$= (x + 1)^2 - 4$$

$$= (x + 1 + 2)(x + 1 - 2)$$

$$= (x + 3)(x - 1)$$

此方法是抓住二次项和一次项的特点，然后加一项，使这三项为完全平方式，我们称这种方法为“配方法”，此题为用配方法分解因式，请体会配方法的特点，然后用配方法解决下列问题：

因式分解：

(1) $4a^2 + 4a - 15$;

(2) $m^4 + m^2n^2 + n^4$

【答案】 (1) $(2a + 5)(2a - 3)$

(2) $(m^2 + n^2 - mn)(m^2 + n^2 + mn)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了分解因式，熟知分解因式的方法是解题的关键.

(1) 仿照题意得到 $(2a + 1)^2 - 16$ ，再利用平方差公式分解因式即可；

(2) 仿照题意得到 $(m^4 + 2m^2n^2 + n^4) - m^2n^2$ ，最后利用平方差公式分解因式即可.

【小问 1 详解】

解：原式 $= (4a^2 + 4a + 1) - 1 - 15$

$$= (2a + 1)^2 - 16$$

$$= (2a + 1 + 4)(2a + 1 - 4)$$

$$= (2a + 5)(2a - 3);$$

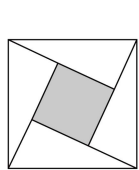
【小问 2 详解】

解：原式 $= (m^4 + 2m^2n^2 + n^4) - m^2n^2$

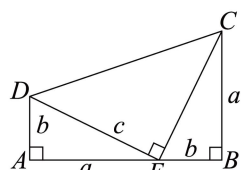
$$= (m^2 + n^2)^2 - (mn)^2$$

$$= (m^2 + n^2 - mn)(m^2 + n^2 + mn).$$

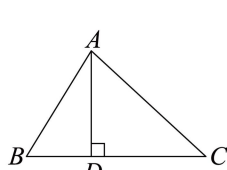
30. 【阅读材料】教材在探索平方差公式时利用了面积法，面积法除了可以帮助我们记忆公式，还可以直观地推导或验证公式，俗称“无字证明”，例如，著名的赵爽弦图（如图①，其中四个直角三角形较大的直角边长都为 a ，较小的直角边长都为 b ，斜边长都为 c ），大正方形的面积可以表示为 c^2 ，也可以表示为 $4 \times \frac{1}{2}ab + (a-b)^2$ ，由此推导出重要的勾股定理：如果直角三角形两条直角边长为 a, b ，斜边长为 c ，则 $a^2 + b^2 = c^2$ 。



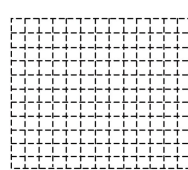
图①



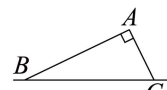
图②



图③



图④



图⑤

- (1) 图②为美国第二十任总统伽菲尔德的“总统证法”，请你利用图②推导勾股定理。
- (2) 如图③，在 $\triangle ABC$ 中， AD 是 BC 边上的高， $AB = 4, AC = 5, BC = 6$ ，设 $BD = x$ ，求 x 的值。
- (3) 试构造一个图形，使它的面积能够解释 $(a+b)(a+2b) = a^2 + 3ab + 2b^2$ ，画在如图④的网格中，并标出字母 a, b 所表示的线段。
- (4) 问题解决：如图⑤，直线 BC 为一水渠渠岸，经测量知渠岸上点 B 到引水点 A 的距离为 12 米，渠岸上点 C 到引水点 A 的距离为 5 米，且 $\angle BAC = 90^\circ$ 。利用上面结论求在渠岸的什么地方开沟，才能使沟最短？画出图形，并直接写出最短距离。

【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{9}{4}$

(3) 见解析 (4) 见解析， $\frac{60}{13}$ 米

【解析】

【分析】本题主要考查了勾股定理的证明与应用，熟练掌握相关定理是解答此题的关键。

- (1) 梯形的面积可以由梯形的面积公式求出，也可利用三个直角三角形面积求出，两次求出的面积相等列出关系式，化简即可得证；
- (2) 运用勾股定理在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 和 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中求出 AD^2 ，列出方程求解即可；
- (3) 画出边长为 $a+b$ 和 $a+2b$ 的矩形即可；
- (4) 过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D ，根据三角形的面积公式求出 AD 的长即可。

【小问 1 详解】

解：梯形 $ABCD$ 的面积为 $\frac{1}{2}(a+b)(a+b) = \frac{1}{2}a^2 + ab + \frac{1}{2}b^2$,

也可以表示为 $\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2$,

$$\therefore \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{2}a^2 + ab + \frac{1}{2}b^2,$$

即 $a^2 + b^2 = c^2$;

【小问 2 详解】

解：在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中， $AD^2 = AB^2 - BD^2 = 4^2 - x^2 = 16 - x^2$;

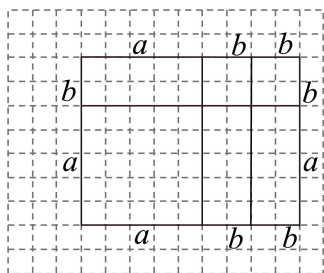
在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中， $AD^2 = AC^2 - DC^2 = 5^2 - (6-x)^2 = -11 + 12x - x^2$;

所以 $16 - x^2 = -11 + 12x - x^2$,

解得 $x = \frac{9}{4}$;

【小问 3 详解】

解：如图，

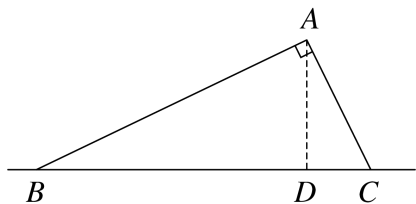


图④

由此可得 $(a+b)(a+2b) = a^2 + 3ab + 2b^2$;

【小问 4 详解】

解：如图，过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D ， AD 的长即为所求。



图⑤

$\because CA \perp BA$,

$\therefore$ 根据图①中得到的 a, b, c 之间的数量关系，得 $BC^2 = AB^2 + AC^2$,

$$\because AB=12 \text{ 米}, AC=5 \text{ 米},$$

$$\therefore BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=13 \text{ (米)},$$

$$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC \cdot AD=\frac{1}{2}AB \cdot AC,$$

$$\therefore AD=\frac{AB \cdot AC}{BC}=\frac{60}{13} \text{ (米)},$$

$$\therefore \text{最短距离为} \frac{60}{13} \text{ 米}.$$