

2025 学年第一学期七年级数学学科期中质量调研卷

(时间: 90 分钟 满分: 100 分)

2025 年 11 月

一、选择题 (每题 3 分, 共 18 分)

1. 下列计算结果正确的是 ()

- A. $(-x^2y^3)^2 = x^4y^6$ B. $(3a^2b^2)^2 = 6a^4b^4$ C. $(-x^2)^3 = -x^5$ D. $2m^3 \cdot 3m^2 = 5m^5$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了幂的乘方和积的乘方、同底数幂的乘法等知识点, 能正确求出每个式子的值是解此题的关键.

直接计算每个选项的表达式, 根据幂的乘方法则 (幂的乘方, 底数不变, 指数相乘) 和同底数幂乘法法则 (同底数幂相乘, 底数不变, 指数相加) 进行判断.

【详解】解: 选项 A: $(-x^2y^3)^2 = (-1)^2 \cdot (x^2)^2 \cdot (y^3)^2 = x^4y^6$, 符合题意;

选项 B: $(3a^2b^2)^2 = 3^2 \cdot (a^2)^2 \cdot (b^2)^2 = 9a^4b^4 \neq 6a^4b^4$, 错误, 不符合题意;

选项 C: $(-x^2)^3 = (-1)^3 \cdot (x^2)^3 = -x^6 \neq -x^5$, 错误, 不符合题意;

选项 D: $2m^3 \cdot 3m^2 = 6m^5 \neq 5m^5$, 错误, 不符合题意

故选: A.

2. 计算 $\left(\frac{2}{3}\right)^{2025} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^{2026}$ 的结果是 ()

- A. $\frac{2}{3}$ B. $-\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $-\frac{3}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查同底数幂乘法及积的乘方的逆运算, 将原式进行正确的变形是解题的关键.

利用同底数幂乘法及积的乘方得逆运算法则将原式变形后计算即可.

【详解】解: $\because \left(-\frac{3}{2}\right)^{2026} = \left(-1 \cdot \frac{3}{2}\right)^{2026} = (-1)^{2026} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2026} = 1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2026} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2026}$,

$$\therefore \text{原式} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2025} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2026} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2025} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2025} \cdot \frac{3}{2} = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\right)^{2025} \cdot \frac{3}{2} = 1^{2025} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2},$$

故选：C.

3. 如果 A 是一个七次整式， B 也是一个七次整式，那么 $A+B$ 一定是 ()

- A. 十四次整式 B. 七次整式 C. 不高于七次的整式 D. 六次整式

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查整式的加减，两个七次整式相加，最高次项可能因系数互为相反数而抵消，因此和的次数不高于七次.

【详解】解： $\because A$ 和 B 都是七次整式，

$\therefore A$ 和 B 的最高次项次数均为 7，

当 A 和 B 相加时，最高次项可能抵消，导致次数降低；若未抵消，则次数仍为 7，

$\therefore A+B$ 的次数不高于 7，

即 $A+B$ 是不高于七次的整式.

故选：C.

4. 如果 $m \neq n$ ，那么下列等式中正确的是 ()

- A. $(m-n)^2 = -(m+n)^2$ B. $(m-n)^2 = -(n-m)^2$
C. $(m+n)(m-n) = (-m-n)(-m+n)$ D. $(-m-n)^3 = -(m-n)^3$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了完全平方公式和平方差公式，易错点是符号的变化规律，以及偶次方和奇次方的性质. 通过计算每个等式的左右两边，发现选项 A、B、D 在 $m \neq n$ 时均不成立，而选项 C 恒成立.

【详解】解：A、 $(m-n)^2 = (n-m)^2$ ，故本选项错误，不合题意；

B、 $(m-n)^2 = (n-m)^2$ ，故本选项错误，不合题意；

C、 $(m+n)(m-n) = -(m+n)(-m+n) = (-m-n)(-m+n)$ ，故本选项正确，符合题意；

D、 $(-m-n)^3 = -(m+n)^3$ ，故本选项错误，不合题意；

故选：C.

5. 下列各式因式分解正确的是 ()

A. $2x + 2y = 2(x + y)$

B. $x^2 - 5x + 6 = x(x - 5) + 6$

C. $x^2 + 2x - 3 = x\left(x + 2 - \frac{3}{x}\right)$

D. $x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2$

【答案】AD

【解析】

【分析】本题考查因式分解，根据因式分解就是把一个多项式化为几个整式的积的形式，熟练掌握相关的知识是解题的关键。根据因式分解的方法逐项判断即可。

【详解】解：A、 $2x + 2y = 2(x + y)$ ，属于因式分解，符合题意；

B、 $x^2 - 5x + 6 = x(x - 5) + 6$ ，不是积的形式，不符合题意；

C、 $x^2 + 2x - 3 = x\left(x + 2 - \frac{3}{x}\right)$ ，右边含有分式，不符合题意；

D、 $x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2$ ，分解正确，符合题意；

故选：AD.

6. 已知 $p = -m - n$ ， $q = mn$ ，那么关于 x 的整式 $x^2 + px + q$ 因式分解的结果是（ ）

A. $(x + m)(x + n)$

B. $(x - m)(x - n)$

C. $(x + m)(x - n)$

D. $(x - m)(x + n)$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了因式分解，根据已知条件，将 p 和 q 代入多项式，然后利用十字相乘法分解因式即可。

【详解】解：∵ $p = -m - n$ ， $q = mn$ ，

∴ 多项式为 $x^2 + (-m - n)x + mn$ ，

∴ $x^2 + px + q = x^2 + (-m - n)x + mn = (x - m)(x - n)$ 。

即 $x^2 + px + q$ 因式分解结果为 $(x - m)(x - n)$ 。

故选：B.

二、填空题（每题 2 分，共 24 分）

7. 化简： $3x^2y - x^2y - z^4 - 2yx^2 + z^4 =$ _____.

【答案】 0

【解析】

【分析】 本题考查了合并同类项，通过合并同类项法则进行化简即可.

【详解】 解: $3x^2y - x^2y - z^4 - 2yx^2 + z^4$

$$= (3x^2y - x^2y - 2yx^2) + (z^4 - z^4)$$
$$= 0 + 0$$
$$= 0,$$

故答案为: 0.

8. 简便计算: $19.8 \times 20.2 =$ _____.

【答案】 399.96

【解析】

【分析】 本题考查了利用平方差公式进行简便运算. 根据平方差公式进行计算即可.

【详解】 解: 19.8×20.2

$$= (20 - 0.2) \times (20 + 0.2)$$
$$= 20^2 - 0.2^2$$
$$= 400 - 0.04$$
$$= 399.96.$$

故答案为: 399.96.

9. 若 $(a-2)x^2y^{a+3}$ 是关于 x, y 的六次单项式, 则 $a =$ _____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 本题主要考查了单项式. 根据题意得出 $2 + a + 3 = 6$, 即可求解.

【详解】 解: $\because (a-2)x^2y^{a+3}$ 是关于 x, y 的六次单项式,

$$\therefore 2 + a + 3 = 6,$$

解得: $a = 1,$

当 $a = 1$ 时, 系数 $a - 2 = 1 - 2 = -1 \neq 0$, 符合题意.

故答案为: 1.

10. 如果单项式 $3a^{2m-4}b^6$ 和 $-4a^2b^{4n}$ 是同类项, 那么 $n-m$ 的值是_____.

【答案】 $-\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了同类项的定义, 根据同类项的定义, 相同字母的指数必须相等, 从而列出关于 m 和 n 的方程, 并求解.

【详解】 解: $\because$ 单项式 $3a^{2m-4}b^6$ 和 $-4a^2b^{4n}$ 是同类项,

$$\therefore 2m-4=2, \quad 4n=6,$$

$$\text{解得 } m=3, \quad n=\frac{3}{2},$$

$$\therefore n-m=\frac{3}{2}-3=-\frac{3}{2}$$

故答案为: $-\frac{3}{2}$.

11. 计算: $\left(\frac{1}{4}x - \frac{2}{3}x^2y\right) \cdot (-12xy) =$ _____.

【答案】 $8x^3y^2 - 3x^2y$

【解析】

【分析】 本题考查多项式与单项式的乘法运算, 运用分配律将单项式分别乘以多项式中的每一项, 再计算系数和变量的乘积.

$$\text{【详解】 原式} = \left(\frac{1}{4}x\right) \cdot (-12xy) + \left(-\frac{2}{3}x^2y\right) \cdot (-12xy)$$

$$= \frac{1}{4} \times (-12) \cdot x \cdot x \cdot y + \left(-\frac{2}{3}\right) \times (-12) \cdot x^2 \cdot x \cdot y \cdot y$$

$$= -3x^2y + 8x^3y^2$$

$$= 8x^3y^2 - 3x^2y.$$

故答案为 $8x^3y^2 - 3x^2y$.

12. 计算: $(7x^4y^5 - x^2y^3) \div x^2y^3 =$ _____.

【答案】 $7x^2y^2 - 1$

【解析】

【分析】 本题考查多项式除以单项式的运算，根据法则，将多项式的每一项分别除以单项式，再运用同底数幂的除法法则（指数相减）计算即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & (7x^4y^5 - x^2y^3) \div x^2y^3 \\ &= 7x^4y^5 \div x^2y^3 - x^2y^3 \div x^2y^3 \\ &= 7x^{4-2}y^{5-3} - 1 \\ &= 7x^2y^2 - 1. \end{aligned}$$

故答案为: $7x^2y^2 - 1$.

13. 因式分解: $x^2 - 14x - 32 =$ _____.

【答案】 $(x+2)(x-16)$

【解析】

【分析】 本题主要考查因式分解，熟练掌握因式分解的方法是解题的关键. 利用十字相乘法进行因式分解即可.

【详解】 解:

$$\begin{aligned} & x^2 - 14x - 32 \\ &= (x+2)(x-16) \end{aligned}$$

故答案为 : $(x+2)(x-16)$.

14. 因式分解: $x(a-b)^2 - y(b-a)^3 =$ _____.

【答案】 $(a-b)^2(x+ya-yb)$

【解析】

【分析】 题目主要考查因式分解，先将原式变形，然后提取公因式即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & x(a-b)^2 - y(b-a)^3 \\ &= x(a-b)^2 - y[-(a-b)^3] \\ &= x(a-b)^2 + y(a-b)^3 \\ &= (a-b)^2[x+y(a-b)] \end{aligned}$$

$$= (a-b)^2 (x+ya-yb)$$

故答案为: $(a-b)^2 (x+ya-yb)$.

15. 如果整式 $4x^2 - mx + 25$ 是一个整式的平方, 那么 m 的值是_____.

【答案】 ± 20

【解析】

【分析】 本题考查了完全平方公式的应用, 根据完全平方式得出 $-mx = \pm 2 \times 2x \times 5$, 即可求出 m 的值.

【详解】 解: $\because$ 整式 $4x^2 - mx + 25$ 是一个完全平方式,

$$\therefore -mx = \pm 2 \times 2x \times 5,$$

解得: $m = \pm 20$,

故答案为: ± 20 .

16. 计算: $(x+y) \cdot 2[(y+x)^2]^3 + 3(-x-y)^5 =$ _____. (结果用幂的形式表示)

【答案】 $2(x+y)^7 - 3(x+y)^5$

【解析】

【分析】 本题考查了同底数幂的乘法, 幂的乘方, 将 $(x+y)$ 看成一个整体是解题关键. 通过观察表达式, 发现 $y+x = x+y$ 和 $-x-y = -(x+y)$, 从而将 $x+y$ 看作整体, 再应用幂的乘方和同底数幂的乘法法则进行运算即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & (x+y) \cdot 2[(y+x)^2]^3 + 3(-x-y)^5 \\ &= (x+y) \cdot 2(x+y)^6 + 3[-(x+y)]^5 \\ &= 2(x+y)^7 - 3(x+y)^5, \end{aligned}$$

故答案为: $2(x+y)^7 - 3(x+y)^5$.

17. 已知 $(x+1)^{x+6} = 1$, x 的值是_____.

【答案】 -6 或 0 或 -2

【解析】

【分析】 题目主要考查有理数的乘方运算, 方程 $(x+1)^{x+6} = 1$ 成立需考虑三种情况: 底数为 1; 指数为 0 且底数不为 0; 底数为 -1 且指数为偶数, 即可求解.

【详解】解：当底数 $x+1=1$ 时，

解得 $x=0$ ，此时指数为 $0+6=6$ ，得到 $1^6=1$ ，等式成立；

当指数 $x+6=0$ 时，

解得 $x=-6$ ，此时底数为 $-6+1=-5 \neq 0$ ，得到 $(-5)^0=1$ ，等式成立；

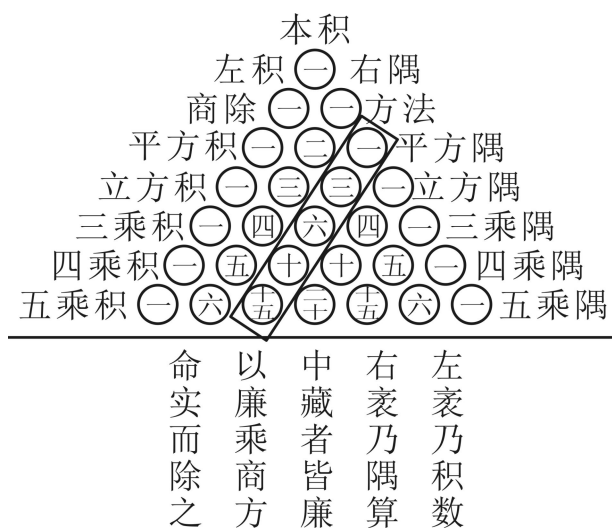
当底数 $x+1=-1$ 时，

解得 $x=-2$ ，此时指数为 $-2+6=4$ ，为偶数，得到 $(-1)^4=1$ ，等式成立；

其他情况均不满足等式，

故答案为：-6 或 0 或 -2.

18. 1261 年，我国南宋数学家杨辉（13 世纪）在他所著的《详解九章算法》中给出了一个“开方作法本源图”，如图所示，并指明：“开方作法本源图出自《释锁算书》，贾宪用此术。”这幅图被后人称为“贾宪三角”。“贾宪三角”中蕴含了许多数字的规律，按照它的构造规则可知：从左边数第 3 条斜线的第 m 个数是_____（用含 m 的代数式表示）



【答案】 $\frac{m(m+1)}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查数字类规律探究，观察第 3 条斜线上的数为从 1 开始的连续的整数的和，进行求解即可.

【详解】解：由题意和图可知：

从左边数第 3 条斜线的第 1 个数是：1；

从左边数第 3 条斜线的第 2 个数是： $1+2=3$ ；

从左边数第 3 条斜线的第 3 个数是： $1+2+3=6$ ；

从左边数第 3 条斜线的第 4 个数是： $1+2+3+4=10$ ；

依次类推：

从左边数第 3 条斜线的第 m 个数是： $1+2+3+\cdots+m=\frac{m(m+1)}{2}$ ；

故答案为： $\frac{m(m+1)}{2}$ 。

三、简答题（共 40 分，19~22 题每题 4 分，23~26 题每题 6 分）

19. 在括号中填入每个步骤相应的数学依据：

$$3ax^5 \cdot 6bx^7 = 3 \times 6 \cdot a \cdot b \cdot x^5 \cdot x^7 \dots\dots\dots (\text{ })$$

$$= (3 \times 6) \cdot a \cdot b \cdot (x^5 \cdot x^7) \dots\dots\dots (\text{ })$$

$$= 18abx^{12}$$

并由此归纳：单项式与单项式相乘，把它们的_____、_____分别相乘。

【答案】 乘法交换律和结合律；乘法结合律；系数；相同字母的幂

【解析】

【分析】 本题考查了单项式乘单项式法则和乘法运算律，正确掌握相关运算法则和运算律是解题关键。直接利用单项式乘单项式运算法则和乘法运算律得出答案。

【详解】 解： $3ax^5 \cdot 6bx^7 = 3 \times 6 \cdot a \cdot b \cdot x^5 \cdot x^7 \dots\dots\dots (\text{乘法交换律和结合律})$

$$= (3 \times 6) \cdot a \cdot b \cdot (x^5 \cdot x^7) \dots\dots\dots (\text{乘法结合律})$$

$$= 18abx^{12}$$

并由此归纳：单项式与单项式相乘，把它们的系数、相同字母的幂分别相乘。

故答案为：乘法交换律和结合律；乘法结合律；系数；相同字母的幂。

20. 关于 x 的整式 x^2+3x-a 与 x^2+bx 相乘的积不含二次项和三次项，求 a 与 b 的值。

【答案】 $a=-9$ ， $b=-3$ ，

【解析】

【分析】 此题主要考查整式的乘法，解题的关键是熟知整式乘法的运算法则，根据多项式乘以多项式法则先计算，再根据相乘的积不含 x 的二次项和三次项，则 x 的二次项和三次项的系数为 0，求出 a, b 的值即可。

【详解】 解： $(x^2+3x-a)(x^2+bx)$

$$= x^4 + bx^3 + 3x^3 + 3bx^2 - ax^2 - abx$$

$$= x^4 + (3+b)x^3 + (3b-a)x^2 - abx,$$

∵ 关于 x 的整式 $x^2 + 3x - a$ 与 $x^2 + bx$ 相乘的积不含二次项和三次项,

$$\therefore 3+b=0, 3b-a=0,$$

$$\therefore a=-9, b=-3.$$

21. 因式分解: $x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1$.

【答案】 $(x-1)(x+1)(y-1)(y+1)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了因式分解, 先提取公因式, 然后利用平方差公式分解因式即可.

【详解】 解: $x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1$

$$= x^2(y^2 - 1) - (y^2 - 1)$$

$$= (x^2 - 1)(y^2 - 1)$$

$$= (x+1)(x-1)(y+1)(y-1).$$

22. 已知 $a(a+1-c) - a(a-c) - b = 4$, 求 $\frac{a^2+b^2}{2} - ab$ 的值.

【答案】 8

【解析】

【分析】 本题考查了多项式的乘法, 完全平方公式, 熟练掌握完全平方公式是解决本题的关键. 化简已知式子, 得 $a-b$ 的值, 所求式子利用完全平方公式变形后, 将 $a-b$ 的值代入计算即可求出值.

【详解】 解: $\because a(a+1-c) - a(a-c) - b = 4,$

$$\therefore a^2 + a - ac - a^2 + ac - b = 4,$$

$$\therefore a - b = 4,$$

$$\therefore \frac{a^2+b^2}{2} - ab = \frac{a^2+b^2-2ab}{2} = \frac{(a-b)^2}{2} = \frac{4^2}{2} = 8.$$

23. 以下是小明因式分解的过程:

$$16 - a^2 + 4ab - 4b^2 = (16 - a^2) + (4ab - 4b^2) \dots\dots\dots ①$$

$$= (4 + a)(4 - a) + 4b(a - b) \dots\dots\dots ②$$

$$= 4b(1 + a)(1 - a)(a - b) \dots\dots\dots ③$$

小明做得正确吗？如果不正确，他是从第几步出了错？请你写出正确的因式分解过程.

【答案】 不正确，第③步错误；过程见解析

【解析】

【分析】 题目主要考查利用提公因式法和公式法分解因式，根据题意，将原式分组，然后利用完全平方公式和平方差公式公式因式分解即可.

【详解】 解：小明做得不正确，从第③步出错，

小明在步骤③中错误地将加法运算视为乘法运算，并且错误地改变了因式，导致因式分解错误.

$$\begin{aligned} & 16 - a^2 + 4ab - 4b^2 \\ &= 16 - (a^2 - 4ab + 4b^2) \\ &= 16 - (a - 2b)^2 \\ &= [4 - (a - 2b)][4 + (a - 2b)] \\ &= (4 - a + 2b)(4 + a - 2b). \end{aligned}$$

24. 先因式分解再求值： $(x-1)^2 + (2x+1)(x-1) + 3x^2 - 3$ ，其中 $x = -\frac{1}{2}$.

【答案】 $3(2x+1)(x-1)$ ，0

【解析】

【分析】 先利用提公因式法、公式法因式分解，然后代入求值即可.

$$\begin{aligned} & \text{【详解】 解：} (x-1)^2 + (2x+1)(x-1) + 3x^2 - 3 \\ &= (x-1)^2 + (2x+1)(x-1) + 3(x+1)(x-1) \\ &= (x-1)(x-1+2x+1+3x+3) \\ &= (x-1)(6x+3) \\ &= 3(2x+1)(x-1) \end{aligned}$$

把 $x = -\frac{1}{2}$ 代入上式,

$$\text{则原式} = 3 \times \left[2 \times \left(-\frac{1}{2} \right) + 1 \right] \times \left(-\frac{1}{2} - 1 \right) = 3 \times 0 \times \left(-\frac{3}{2} \right) = 0$$

【点睛】此题考查的是因式分解, 掌握用提公因式法、公式法因式分解是解决此题的关键.

25. 已知 $x^2 - 3x + 1 = 0$, 要求 $3x^2 - 9x - 8$ 的值, 有以下两种方法:

(法一) 把 $x^2 = 3x - 1$ 代入, 得:

$$\text{原式} = 3(3x - 1) - 9x - 8$$

$$= 9x - 3 - 9x - 8$$

$$= -11$$

(法二) 把 $x^2 - 3x = -1$ 整体代入, 得:

$$\text{原式} = 3(x^2 - 3x) - 8$$

$$= 3 \times (-1) - 8$$

$$= -11$$

根据以上材料, 已知 $x^2 - 3x + 1 = 0$, 求 $x^3 + 5x^2 - 23x + 2025$ 的值.

【答案】2017

【解析】

【分析】题目主要考查已知式子的值, 求代数式的值, 理解题意是解题关键.

利用已知条件 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 推导出 $x^2 = 3x - 1$, 进而求出 $x^3 = 8x - 3$, 然后代入原表达式化简求值即可.

【详解】解: 由 $x^2 - 3x + 1 = 0$, 得 $x^2 = 3x - 1$,

$$\text{则 } x^3 = x \cdot x^2 = x(3x - 1) = 3x^2 - x,$$

$$\text{将 } x^2 = 3x - 1 \text{ 代入, 得 } x^3 = 3(3x - 1) - x = 9x - 3 - x = 8x - 3$$

$$\therefore \text{原式} = x^3 + 5x^2 - 23x + 2025 = (8x - 3) + 5(3x - 1) - 23x + 2025$$

$$= 8x - 3 + 15x - 5 - 23x + 2025$$

$$= (8x + 15x - 23x) + (-3 - 5 + 2025)$$

$$= 0x + 2017$$

= 2017.

26. 已知 $2a^2 + 8a + 4b^2 - 12b + 17 = 0$, 求 $-\frac{1}{2}a^2b$ 的值.

【答案】 -3

【解析】

【分析】 本题考查了偶次方的非负性，整式混合运算的化简求值等知识点，能灵活运用整式的运算法则进行化简是解此题的关键.

先根据完全平方公式将原式变形为 $2(a+2)^2 + (2b-3)^2 = 0$, 求出 $a = -2$, $b = \frac{3}{2}$, 然后代入计算即可.

【详解】 解: $2a^2 + 8a + 4b^2 - 12b + 17 = 0$,

$$\therefore (2a^2 + 8a + 8) + (4b^2 - 12b + 9) = 0,$$

$$2(a+2)^2 + (2b-3)^2 = 0,$$

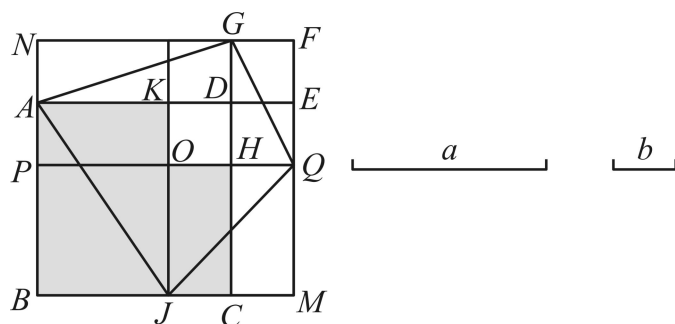
$$\text{所以} \begin{cases} a+2=0 \\ 2b-3=0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=-2 \\ b=\frac{3}{2} \end{cases},$$

$$\therefore -\frac{1}{2}a^2b = -\frac{1}{2} \times (-2)^2 \times \frac{3}{2} = -3.$$

四、解答题 (共 18 分, 其中第 27 题 9 分; 第 28 题 9 分)

27. 如图, 线段 BC 长度为 a , 在线段 BC 上截取线段 $CJ = b$, 再延长 BC 至 M , 使 $CM = b$, ($a > b > 0$), 分别做正方形 $ABCD$ 、正方形 $BMFN$ 和正方形 $PBJO$.



(1) 分别计算图中长方形 $PBMQ$ 和阴影部分图形的面积, 可以发现一个乘法公式_____;

(2) 如果已知图中正方形 $BMFN$ 、正方形 $PBJO$ 的面积分别是 7 和 3, 计算长方形 $KJME$ 的面积;

(3) 分别连接 AG 、 AJ 、 QG 、 QJ , 如果已知正方形 $BMFN$ 的面积是 S_1 , 正方形 $KOHD$ 的面积是 S_2 ,

用含 S_1 、 S_2 的代数式表示四边形 $AJQG$ 的面积.

【答案】(1) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

(2) 2 (3) $\frac{1}{2}(S_1 + S_2)$

【解析】

【分析】 本题考查了整式运算的应用.

(1) 根据题意可以得到 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$;

(2) 由题意得 $(a+b)^2 = 7$, $(a-b)^2 = 3$, 计算得到 $ab = 1$, 据此求解即可;

(3) 根据四边形 $AJQG$ 的面积等于中间小正方形的面积和四个直角三角形面积和, 据此求解即可.

【小问 1 详解】

解: 由题意得, 长方形 $PBMQ$ 的面积 $= (a+b)(a-b)$,

阴影部分图形的面积 $= a^2 - b^2$,

$\therefore$ 可以发现一个乘法公式为 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$;

故答案为: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$;

【小问 2 详解】

解: $\because$ 正方形 $BMFN$ 、正方形 $PBJO$ 的面积分别是 7 和 3,

$\therefore (a+b)^2 = 7$, $(a-b)^2 = 3$,

$\therefore (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4$,

整理得, $4ab = 4$, 即 $ab = 1$,

长方形 $KJME$ 的面积 $= a \cdot 2b = 2ab = 2$;

【小问 3 详解】

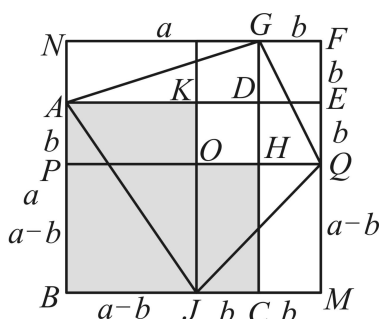
解: $\because$ 正方形 $BMFN$ 的面积是 S_1 , 正方形 $KOHD$ 的面积是 S_2 ,

$\therefore S_1 = (a+b)^2$, $S_2 = b^2$,

$\therefore$ 四边形 $AJQG$ 的面积 $= b^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}b \cdot 2b + \frac{1}{2}(a-b) \cdot 2b + \frac{1}{2}a(a-b)$

$= b^2 + \frac{1}{2}ab + b^2 + ab - b^2 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}ab$

$$\begin{aligned}
 &= b^2 + \frac{1}{2}a^2 + ab \\
 &= \frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{2}b^2 \\
 &= \frac{1}{2}(S_1 + S_2).
 \end{aligned}$$



28. 阅读材料

我们学过因式分解，如： $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$ ，这时就说 $(x-1)$ 和 $(x+2)$ 是 $x^2 + x - 2$ 的因式。

那么，不进行因式分解能不能判断 $(x-a)$ 这样的式子是不是某个整式的因式呢？

对于整式 $x^2 + x - 2$ 我们分别计算：

当 $x=1$ 时，原式 $= (1)^2 + 1 - 2 = 0$ ；当 $x=-2$ 时，原式 $= (-2)^2 + (-2) - 2 = 0$ ；

当我们把 $x=1$ 和 $x=-2$ 分别代入 $x^2 + x - 2$ ，整式 $x^2 + x - 2$ 的值都等于0，那么 $(x-1)$ 和 $(x+2)$ 就是整式 $x^2 + x - 2$ 的两个因式。通过归纳发现：

如果当 $x=a$ 时，一个整式的值等于0，那么 $(x-a)$ 就一定是这个整式的一个因式。

反过来，如果 $(x-a)$ 是整式的一个因式，那么当 $x=a$ 时，这个整式的值一定等于0。

请你根据上述材料解决以下问题：已知整式 $P = x^4 - x^3 - 7x^2 + 5x + 10$ ，

- (1) 请判断 $(x+1)$ 是否是整式 P 的一个因式；
- (2) 当整式 P 的一次项系数变为 k 时，而 $(x+1)$ 仍是它的一个因式。求此时 k 的值；
- (3) 请尝试将整式 P 进行因式分解。

【答案】 (1) 是 (2) $k=5$ ；

(3) $(x+1)(x-2)(x^2-5)$

【解析】

【分析】题目主要考查因式分解，理解题意是解题关键.

(1) 根据题意，将 $x = -1$ 代入整式计算即可判断；

(2) 根据题意将 $x = -1$ 代入整式计算，然后解方程即可；

(3) 根据题意，分别将 $x = 2$ 、 $x = -1$ 、 $x^2 = 5$ 代入整式计算，然后求解即可.

【小问 1 详解】

解：当 $x = -1$ 时，

$$P = (-1)^4 - (-1)^3 - 7 \times (-1)^2 + 5 \times (-1) + 10 = 1 + 1 - 7 - 5 + 10 = 0,$$

$\therefore (x+1)$ 是整式 P 的一个因式；

【小问 2 详解】

当整式 P 的一次项系数变为 k 时，

$$P = x^4 - x^3 - 7x^2 + kx + 10,$$

$\therefore (x+1)$ 是它的一个因式，

$$\therefore P = (-1)^4 - (-1)^3 - 7 \times (-1)^2 + k \times (-1) + 10 = 1 + 1 - 7 - k + 10 = 0,$$

解得： $k = 5$ ；

【小问 3 详解】

$$P = x^4 - x^3 - 7x^2 + 5x + 10,$$

当 $x = -1$ 时，

$$P = (-1)^4 - (-1)^3 - 7 \times (-1)^2 + 5 \times (-1) + 10 = 1 + 1 - 7 - 5 + 10 = 0;$$

当 $x = 2$ 时，

$$P = 2^4 - 2^3 - 7 \times 2^2 + 5 \times 2 + 10 = 16 - 8 - 28 + 10 + 10 = 0;$$

当 $x^2 = 5$ 时，

$$P = 5^2 - 5x - 7 \times 5 + 5x + 10 = 25 - 5x - 35 + 5x + 10 = 0;$$

$\therefore (x+1)$ 和 $(x-2)$ 、 (x^2-5) 就是整式 $P = x^4 - x^3 - 7x^2 + 5x + 10$ 的因式，

$$\therefore P = x^4 - x^3 - 7x^2 + 5x + 10 = (x+1)(x-2)(x^2-5).$$

