

华二附初 2025 学年第一学期七年级数学（学科）一起作业

(时间：90 分钟)

一、选择题（每题 3 分，共 18 分）

1. 下列等式从左到右的变形，属于因式分解的是（ ）

A. $2x+4=2(x+2)$

B. $x^2+2x+1=x(x+2)+1$

C. $(x+1)(x+3)=x^2+4x+3$

D. $x^3-x=x(x+1)(x-1)$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查因式分解的定义. 因式分解就是把一个多项式化为几个整式的积的形式，据此对各项进行判断即可.

【详解】解：A、 $2x+4=2(x+2)$ ，是因式分解，但与 D 选项相比，D 选项的因式分解更为彻底，是最佳选项，故 A 不符合题意；

B、右边结果不是积的形式，不符合题意；

C、是多项式与多项式的乘法运算，不符合题意；

D、 $x^3-x=x(x+1)(x-1)$ 属于因式分解，符合题意.

故选：D.

2. 已知 $x^a=3$ ， $x^b=2$ ，那么 x^{2a+3b} 的值是（ ）

A. 48

B. 24

C. 72

D. 36

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了同底数幂乘法的逆运算，幂的乘方计算.

先根据幂的乘方计算法则求出 $x^{2a}=9$ ， $x^{3b}=8$ ，再由同底数幂乘法的逆运算法则得到 $x^{2a+3b}=x^{2a} \cdot x^{3b}$ ，据此代值计算即可.

【详解】解：∵ $x^a=3$ ， $x^b=2$ ，

$$\therefore (x^a)^2=3^2, (x^b)^3=2^3,$$

$$\text{即 } x^{2a}=9, x^{3b}=8,$$

$$\therefore x^{2a+3b}$$

$$= x^{2a} \cdot x^{3b}$$

$$= 9 \times 8$$

$$= 72.$$

故选：C.

3. 在整式 $4y^4z^2 - 4x^5 + 6y^3 - 8$ 中，最高次项的系数和常数项分别为（ ）

A. 4 和 -8

B. -4 和 -8

C. 1 和 -8

D. 1 和 8

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查多项式的项、次数和系数的概念，注意最高次项是次数最高的项. 根据多项式的定义，最高次项是次数最高的项，常数项是不含字母的项.

【详解】解：在整式 $4y^4z^2 - 4x^5 + 6y^3 - 8$ 中，最高次项和常数项分别为：

$$4y^4z^2, -8;$$

$$4y^4z^2 \text{ 的系数为 } 4,$$

$\therefore$ 在整式 $4y^4z^2 - 4x^5 + 6y^3 - 8$ 中，最高次项的系数和常数项分别为：4 和 -8 .

故选：A

4. 已知分式 $\frac{x+4}{3x^2+1}$ 的值是非负数，那么 x 的取值范围是（ ）

A. $x > -4$ 且 $x \neq 0$

B. $x \geq -4$

C. $x \neq 0$

D. $x \geq -4$ 且 $x \neq 0$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查分式值的正负性，解一元一次不等式等知识点，若对于分式 $\frac{a}{b} > 0$ ($b \neq 0$) 时，说明分子、分母同号；分式 $\frac{a}{b} < 0$ ($b \neq 0$) 时，分子、分母异号.

根据分式的值是非负数，分母恒为正数，因此只需分子是非负数即可.

【详解】解： $\because 3x^2 + 1 \geq 1 > 0$ ， $\frac{x+4}{3x^2+1}$ 的值是非负数，

$$\therefore x+4 \geq 0, \text{ 即 } x \geq -4.$$

$$\therefore x \text{ 的取值范围是 } x \geq -4.$$

故选：B.

5. 若等式 $(x-3)(3x+5) = mx^2 + nx - p$ 对任意 x 恒成立, m, n, p 为常数, 则 $m+n+p$ 的值为 ()

A. -16

B. 22

C. -8

D. 14

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了多项式与多项式的乘法, 代数式求值, 熟练掌握运算法则是解答本题的关键.

根据多项式与多项式的乘法法则把左边化简, 并比较等式两边对应项的系数, 求出 m, n, p 的值, 再计算它们的和.

【详解】解: $\because (x-3)(3x+5) = 3x^2 + 5x - 9x - 15 = 3x^2 - 4x - 15$,

$\therefore mx^2 + nx - p = 3x^2 - 4x - 15$,

$\therefore m = 3, n = -4, p = 15$,

$\therefore m + n + p = 3 + (-4) + 15 = 14$.

故选 D.

6. 已知 $(x-2025)^2 - 16 = 36 - (2027-x)^2$, 则 $(x-2026)^2$ 的值是 ()

A. 24

B. 25

C. 26

D. 27

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了整式混合运算, 结合完全平方公式计算是解题的关键.

通过引入中间变量 $y = x - 2026$, 将原方程转化为关于 y 的方程, 简化后直接求解.

【详解】 $\because (x-2025)^2 - 16 = 36 - (2027-x)^2$, 且 $(2027-x)^2 = (x-2027)^2$,

$\therefore (x-2025)^2 - 16 = 36 - (x-2027)^2$.

设 $y = x - 2026$, 则 $x - 2025 = y + 1$, $x - 2027 = y - 1$,

代入得: $(y+1)^2 - 16 = 36 - (y-1)^2$,

展开: 左边 $y^2 + 2y + 1 - 16 = y^2 + 2y - 15$,

右边 $36 - (y^2 - 2y + 1) = 36 - y^2 + 2y - 1 = -y^2 + 2y + 35$,

$\therefore y^2 + 2y - 15 = -y^2 + 2y + 35$,

移项得: $y^2 + 2y - 15 + y^2 - 2y - 35 = 0$,

即 $2y^2 - 50 = 0$,

$\therefore 2y^2 = 50$, $y^2 = 25$,

$\therefore y = x - 2026$,

$\therefore (x - 2026)^2 = 25$.

故选 B.

二、填空题 (每题 2 分, 共 24 分)

7. 计算: $\left(-\frac{1}{3}\right)^5 \div \left(-\frac{1}{3}\right)^2 =$ _____.

【答案】 $-\frac{1}{27}$

【解析】

【分析】 本题考查的是同底数幂的除法及乘方运算, 先计算同底数幂的除法, 再计算乘方即可.

【详解】 解: $\left(-\frac{1}{3}\right)^5 \div \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}$.

故答案为: $-\frac{1}{27}$

8. 整式 A 与 $-3x + 3y$ 的和是 $-15x + 2y$, 那么 $A =$ _____.

【答案】 $-12x - y$

【解析】

【分析】 本题考查的是整式的加减运算, 已知和与一个加数, 求另一个加数, 用和减去已知加数即可.

【详解】 解: 由题意, $A = (-15x + 2y) - (-3x + 3y)$

$= -15x + 2y + 3x - 3y$

$= -12x - y$.

故答案为: $-12x - y$

9. 因式分解: $a^2 - 11a + 24 =$ _____.

【答案】 $(a - 3)(a - 8)$

【解析】

【分析】 本题考查的是因式分解，通过寻找两个数，它们的乘积为常数项 24，且和为一次项系数 -11，从而进行因式分解.

【详解】 解: $a^2 - 11a + 24 = (a - 3)(a - 8)$.

故答案为: $(a - 3)(a - 8)$

10. 计算: $\frac{1}{x+1} + \frac{x-1}{x^2-1} =$ _____.

【答案】 $\frac{2}{x+1}$

【解析】

【分析】 本题考查了分式的加减，熟练掌握运算是解答本题的关键.
通过因式分解分母，将第二个分式简化，再与第一个分式相加.

【详解】 解: 原式 $= \frac{1}{x+1} + \frac{x-1}{(x-1)(x+1)}$

$$= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x+1}.$$

故答案为: $\frac{2}{x+1}$.

11. 若 $(-2 - 3x)^0 = 1$ ，则 x 所满足的条件是_____.

【答案】 $x \neq -\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了零指数幂的意义，熟练掌握零指数幂的意义是解答本题的关键，非零数的零指数幂等于 1，零的零指数幂没有意义.

根据 $-2 - 3x \neq 0$ 求解即可.

【详解】 解: 由题意， $(-2 - 3x)^0 = 1$ 成立的条件是底数 $-2 - 3x \neq 0$.

解得 $x \neq -\frac{2}{3}$.

故答案为: $x \neq -\frac{2}{3}$.

12. 若单项式 $-2a^{1-x}b^{3y}$ 与 a^3b^5 是同类项，则 $x - 3y =$ _____.

【答案】 -7

【解析】

【分析】 本题考查了利用同类项的定义求字母的值，熟练掌握同类项的定义是解答本题的关键.
根据相同字母的指数必须相等，列出方程求解即可.

【详解】 因为单项式 $-2a^{1-x}b^{3y}$ 与 a^3b^5 是同类项，

所以 $1-x=3$ ， $3y=5$ ，

解得 $x=-2$ ； $y=\frac{5}{3}$.

则 $x-3y=-2-3\times\frac{5}{3}=-2-5=-7$.

故答案为 -7 .

13. 若 $(x-2y)^2+M=2(x-y)^2$ ， 那么 $M=$ _____.

【答案】 x^2-2y^2

【解析】

【分析】 本题考查了整式的混合运算，解题的关键是熟练掌握完全平方公式.
通过移项将 M 表示为两项的差，然后展开平方项并合并同类项.

【详解】 解： $(x-2y)^2+M=2(x-y)^2$ ，

$$\begin{aligned}M &= 2(x-y)^2 - (x-2y)^2, \\&= 2(x^2-2xy+y^2) - (x^2-4xy+4y^2) \\&= 2x^2-4xy+2y^2-x^2+4xy-4y^2. \\&= x^2-2y^2,\end{aligned}$$

故答案为： x^2-2y^2 .

14. 已知 $mn^2=-2$ ， 则 $mn\cdot(-n-mn^3+m^2n^5)=$ _____.

【答案】 -10

【解析】

【分析】 本题考查了单项式乘以多项式的运算，幂的乘方、积的乘方逆运算，代数式求值.
将原式展开后，再根据幂的乘方、积的乘方逆运算变形，然后将 $mn^2=-2$ 进行代入计算.

$$\begin{aligned}\text{【详解】 解： } & mn(-n-mn^3+m^2n^5) \\&= mn(-n)+mn(-mn^3)+mn(m^2n^5)\end{aligned}$$

$$= -mn^2 - m^2n^4 + m^3n^6$$

由已知 $mn^2 = -2$ ，得 $m^2n^4 = (mn^2)^2 = 4$ ，

$$m^3n^6 = (mn^2)^3 = -8，$$

$$\text{代入上式：} -(-2) - 4 + (-8) = 2 - 4 - 8 = -10$$

故答案为：-10.

15. 若关于 x 的整式 $9x^2 + kx + 1\frac{9}{16}$ 是某个整式的平方，则常数 k 的值为_____

【答案】 $\frac{15}{2}$ 或 $-\frac{15}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查完全平方式，记住完全平方式的特征是解题的关键，形如 $a^2 \pm 2ab + b^2$ 这样的式子是完全平方式.

完全平方式： $a^2 \pm 2ab + b^2$ 的特点是首平方，尾平方，首尾底数积的两倍在中央. 先根据两平方项确定出这两个数，再根据完全平方式的二倍项即可求解.

【详解】 $\because 9x^2 + kx + 1\frac{9}{16} = 9x^2 + kx + \frac{25}{16} = (3x)^2 + kx + \left(\frac{5}{4}\right)^2$.

$$kx = \pm 2 \times 3x \times \frac{5}{4},$$

$$\therefore k \text{ 的值为 } \frac{15}{2} \text{ 或 } -\frac{15}{2}.$$

$$\text{故答案为： } \frac{15}{2} \text{ 或 } -\frac{15}{2}.$$

16. 计算： $-12^3 + 11 \times 12 \times 13 =$ _____

【答案】 -12

【解析】

【分析】 本题考查了有理数的混合运算.

先计算乘方运算和乘法运算，再进行加法运算.

【详解】 解： $-12^3 + 11 \times 12 \times 13 = -1728 + 1716 = -12$.

故答案为： -12.

17. 已知 $(a+b)^2 = 10$ ， $(a-b)^2 = 2$. 则 $(a+2)(b-2)(b+2)(a-2) =$ _____.

【答案】 -4

【解析】

【分析】 本题主要考查了整式乘法的应用，准确利用完全平方公式化简计算是解题的关键.

利用已知条件求出 $a^2 + b^2$ 和 ab 的值，然后将所求表达式转化为 $(a^2 - 4)(b^2 - 4)$ 的形式，代入计算。

【详解】 由 $(a + b)^2 = 10$ ，得 $a^2 + 2ab + b^2 = 10$ ；

由 $(a - b)^2 = 2$ ，得 $a^2 - 2ab + b^2 = 2$ ，

将两式相加，得 $2(a^2 + b^2) = 12$ ，所以 $a^2 + b^2 = 6$ ；

将两式相减，得 $4ab = 8$ ，所以 $ab = 2$ ，

所求表达式为 $(a + 2)(b - 2)(b + 2)(a - 2)$ ，

将其分组为 $[(a + 2)(a - 2)][(b + 2)(b - 2)] = (a^2 - 4)(b^2 - 4)$ ，

代入已知值：

$$(a^2 - 4)(b^2 - 4) = a^2b^2 - 4a^2 - 4b^2 + 16 = (ab)^2 - 4(a^2 + b^2) + 16,$$

将 $ab = 2$ ， $a^2 + b^2 = 6$ 代入，

$$\text{得 } 4 - 4 \times 6 + 16 = 4 - 24 + 16 = -4.$$

故答案是：-4.

18. 若整数 a 不可以表示成两个不同的整数的平方之差，我们称 a 这样的数为“孤立数”，例如：2 不可以表示为两个不同整数的平方之差，则 2 为“孤立数”；16 可以表示为 $16 = 5^2 - 3^2$ ，则 16 不为“孤立数”. 那么绝对值小于 100 的整数中共有_____个“孤立数”

【答案】 50

【解析】

【分析】 本题主要考查数字类的规律探索，解此题的关键在于准确找到题中所给规律，再根据规律进行归纳总结.

根据孤立数的定义，整数 a 不能表示为两个不同整数的平方之差，通过分析，整数 a 是孤立数当且仅当 $a = 4k + 2$ (k 为整数)，绝对值小于 100 的整数中共有 50 个孤立数.

【详解】 根据题意，“孤立数”可以为：2，6，10，14，18，_____，

因此， a 为孤立数当且仅当 $a = 4k + 2$ (k 为整数)

绝对值小于 100 的整数中，要满足 $a = 4k + 2$ (k 为整数)， k 最小可取 -25，最大可取 24，

故绝对值小于 100 的整数中共有 50 个孤立数.

故答案为：50.

三、解答题 (共 9 题 58 分)

19. 计算: $4a + (3 - 2a + a^2) - (2a^2 + 1)$

【答案】 $-a^2 + 2a + 2$

【解析】

【分析】 本题考查了整式的加减，先去括号，再合并同类项即可.

【详解】 解: $4a + (3 - 2a + a^2) - (2a^2 + 1)$

$$= 4a + 3 - 2a + a^2 - 2a^2 - 1$$

$$= -a^2 + 2a + 2.$$

20. 计算: $(2x - 1)^2 + (2x + 3)(3 - 2x)$

【答案】 $-4x + 10$

【解析】

【分析】 本题考查了整式的运算，熟练掌握乘法公式是解答本题的关键.

先根据完全平方公式和平方差公式计算，再合并同类项即可.

【详解】 解: $(2x - 1)^2 + (2x + 3)(3 - 2x)$

$$= 4x^2 - 4x + 1 + 9 - 4x^2$$

$$= -4x + 10.$$

21. 计算: $a\left(4 - \frac{1}{a}\right) + \frac{a}{2-a} \div \frac{1}{a-2}$

【答案】 $3a - 1$ (其中 $a \neq 0$ 且 $a \neq 2$)

【解析】

【分析】 本题主要考查多项式的运算，掌握运算法则是解题的关键.

先去括号，除法转为乘法，最后合并同类项即可.

【详解】 解: 根据题意 $a \neq 0$ 且 $a - 2 \neq 0$ ，即 $a \neq 0$ 且 $a \neq 2$ ，

$$\text{原式} = 4a - 1 + \frac{a}{2-a} \times (a-2)$$

$$= 4a - 1 - a$$

$$= 3a - 1 \text{ (其中 } a \neq 0 \text{ 且 } a \neq 2 \text{)}.$$

22. 因式分解: $3xy^2 + 6xy - 33x$

【答案】 $3x(y^2 + 2y - 11)$

【解析】

【分析】 本题考查的是因式分解，直接提取公因式分解因式即可.

【详解】 解: $3xy^2 + 6xy - 33x = 3x(y^2 + 2y - 11)$.

故答案为: $3x(y^2 + 2y - 11)$

23. 因式分解: $a^2 - 6ab + 9b^2 - a + 3b$

【答案】 $(a - 3b)(a - 3b - 1)$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解，把一个多项式化成几个整式的乘积的形式，叫做因式分解. 因式分解常用的方法有: ①提公因式法; ②公式法; ③十字相乘法; ④分组分解法. 因式分解必须分解到每个因式都不能再分解为止.

先分组分解，再用提取公因式法分解.

【详解】 解: $a^2 - 6ab + 9b^2 - a + 3b$
 $= (a^2 - 6ab + 9b^2) - (a - 3b)$
 $= (a - 3b)^2 - (a - 3b)$
 $= (a - 3b)[(a - 3b) - 1]$
 $= (a - 3b)(a - 3b - 1).$

24. 先化简，再求值: $A = \frac{m+2}{m} \cdot \frac{m^3 - 3m^2}{m^2 + 5m + 6} \div \frac{9m - m^3}{m^2 + 2m - 3}$ ，其中 $m = 5$.

【答案】 $-\frac{m-1}{m+3}$, $-\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了分式化简求值，准确计算是解题的关键.

利用分式的性质进行分式化简，代入求值即可;

【详解】 解: 原式 $= \frac{m+2}{m} \cdot \frac{m^2(m-3)}{(m+2)(m+3)} \cdot \frac{(m+3)(m-1)}{m(3+m)(3-m)}$

$$= -\frac{m-1}{m+3},$$

$$\because m=5,$$

$$\therefore \text{原式} = -\frac{5-1}{5+3} = -\frac{1}{2}.$$

25. 小吴做一道题：已知两个整式 A 、 B ，求 $2A+B$ 的值。他误将 $2A+B$ 看成 $A+2B$ ，求得结果为 $9a^2-2a-1$ ，已知 $B=a^2+3a+3$ ，求正确的答案。

【答案】 $15a^2-13a-11$

【解析】

【分析】 本题主要考查了整式化简求值，准确理解题意是解题的关键。

先根据 $A+2B=9a^2-2a-1$ 求出 A ，代入计算即可。

【详解】 $\because A+2B=9a^2-2a-1$ ， $B=a^2+3a+3$ ，

$$\therefore A+2a^2+6a+6=9a^2-2a-1,$$

$$\therefore A=9a^2-2a-1-2a^2-6a-6=7a^2-8a-7,$$

$$\therefore 2A+B=2(7a^2-8a-7)+a^2+3a+3$$

$$=14a^2-16a-14+a^2+3a+3$$

$$=15a^2-13a-11.$$

26. 为提高水资源的利用率，某小区安装了循环用水装置，经测算，原来 m 天用水 n 吨，安装了循环用水装置之后这些水恰可以多用 $\frac{m}{3}$ 天，则该小区现在每天平均用水量比平时少多少吨？当 $m=12$ ， $n=540$ 时，每天用水量比原来少多少吨？

【答案】 $\frac{n}{4m}$ 吨； 11.25 吨

【解析】

【分析】 本题主要考查了列代数式和代数式求值，准确计算是解题的关键。

根据题意，先求出原来每天的平均用水量和现在每天的平均用水量，然后相减即可得解；

【详解】 根据题意，该小区现在每天平均用水量比平时少 $\left(\frac{n}{m} - \frac{n}{m+\frac{m}{3}} \right)$ 吨，

$$\therefore \frac{n}{m} - \frac{n}{m + \frac{m}{3}} = \frac{n}{m} - \frac{3n}{4m} = \frac{4n}{4m} - \frac{3n}{4m} = \frac{n}{4m},$$

当 $m=12$, $n=540$ 时,

$$\text{原式} = \frac{540}{4 \times 12} = 11.25 \text{ 吨}.$$

27. 观察以下等式:

$$\text{第 1 个等式: } (2 \times 1 + 1)^2 = (2 \times 2 + 1)^2 - (2 \times 2)^2,$$

$$\text{第 2 个等式: } (2 \times 2 + 1)^2 = (3 \times 4 + 1)^2 - (3 \times 4)^2,$$

$$\text{第 3 个等式: } (2 \times 3 + 1)^2 = (4 \times 6 + 1)^2 - (4 \times 6)^2,$$

$$\text{第 4 个等式: } (2 \times 4 + 1)^2 = (5 \times 8 + 1)^2 - (5 \times 8)^2,$$

.....

按照以上规律, 解决下列问题:

(1) 写出第 5 个等式: _____;

(2) 写出你猜想的第 n 个等式 (用含 n 的式子表示), 并证明.

【答案】 (1) $(2 \times 5 + 1)^2 = (6 \times 10 + 1)^2 - (6 \times 10)^2$

(2) $(2n+1)^2 = [(n+1) \cdot 2n+1]^2 - [(n+1) \cdot 2n]^2$, 证明见解析

【解析】

【分析】 (1) 观察第 1 至第 4 个等式中相同位置的数的变化规律即可解答;

(2) 观察相同位置的数变化规律可以得出第 n 个等式为 $(2n+1)^2 = [(n+1) \cdot 2n+1]^2 - [(n+1) \cdot 2n]^2$, 利用完全平方公式和平方差公式对等式左右两边变形即可证明.

【小问 1 详解】

解: 观察第 1 至第 4 个等式中相同位置数的变化规律, 可知第 5 个等式为:

$$(2 \times 5 + 1)^2 = (6 \times 10 + 1)^2 - (6 \times 10)^2,$$

$$\text{故答案为: } (2 \times 5 + 1)^2 = (6 \times 10 + 1)^2 - (6 \times 10)^2;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: 第 } n \text{ 个等式为 } (2n+1)^2 = [(n+1) \cdot 2n+1]^2 - [(n+1) \cdot 2n]^2,$$

证明如下:

$$\text{等式左边: } (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1,$$

$$\begin{aligned} \text{等式右边: } & [(n+1) \cdot 2n+1]^2 - [(n+1) \cdot 2n]^2 \\ &= [(n+1) \cdot 2n+1 + (n+1) \cdot 2n] \cdot [(n+1) \cdot 2n+1 - (n+1) \cdot 2n] \\ &= [(n+1) \cdot 4n+1] \times 1 \\ &= 4n^2 + 4n + 1, \end{aligned}$$

故等式 $(2n+1)^2 = [(n+1) \cdot 2n+1]^2 - [(n+1) \cdot 2n]^2$ 成立.

【点睛】 本题考查整式规律探索，发现所给数据的规律并熟练运用完全平方公式和平方差公式是解题的关键.

28. 阅读材料：如果将 $(a+b)^n$ (n 为非负整数) 的展开式的每一项按字母 a 的次数由大到小排列，就可以得到下面的等式：

$$(a+b)^0 = 1, \text{ 它只有一项，系数为 } 1;$$

$$(a+b)^1 = a+b, \text{ 它有两项，系数分别为 } 1, 1;$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \text{ 它有三项，系数分别为 } 1, 2, 1;$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \text{ 它有四项，系数分别为 } 1, 3, 3, 1;$$

		1		
	1		1	
	1	2	1	
1	3	3	1	

将上述每个式子的各项系数排成该表.

观察该表，可以发现每一行的首末都是 1，并且下一行的数比上一行多 1 个，中间各数都写在上一行两数的中间，且等于它们的和. 按照这个规律可以将这个表继续往下写，以此确定 $(a+b)^n$ 的展开式. 该表在我国宋朝数学家杨辉 1261 年的著作《详解九章算法》中提到过，因而人们把这个表叫做杨辉三角.

(1) 应用规律：①直接写出 $(a+b)^4$ 的展开式， $(a+b)^4 =$ _____；

②先化简，再求值： $(y-1)^6 + (y+1)^6$ ，其中 $y^2 = 2$.

(2) 杨辉三角和斐波那契数列有着密切的联系，如图，把杨辉三角左对齐排列，将同一条斜线上的数字求

和, 计算可得 $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 8, \dots$ 该数列从第三项开始, 每一项都等于其前两项之和, 即 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$\nearrow$						
$\nearrow$	1					
$\nearrow$	1	1				
$\nearrow$	1	2	1			
$\nearrow$	1	3	3	1		
$\nearrow$	1	4	6	4	1	
$\nearrow$	1	5	10	10	5	1
	1	6	15	20	16	6

若 $T_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$, 且 $T_{2025} = k$, 则 a_{2027} 的值为_____ (用 k 表示).

【答案】(1) ① $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, ② $2y^6 + 30y^4 + 30y^2 + 2$, 198

(2) $k + 1$

【解析】

【分析】本题考查了整式乘法的应用、有理数的乘方, 理解题意弄清展开式各项系数的规律是解题的关键.

(1) ①先根据杨辉三角得出 $(a+b)^4$ 的展开式的系数, 可得展开式; ②先展开 $(y-1)^6 + (y+1)^6$, 再合并, 最后代入求值即可.

(2) 根据 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, 可得 $a_{2027} = a_{2025} + a_{2026}$, 结合 $T_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$, 可得

$T_{2025} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2025} = k$, 可得 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2025} + a_2 = k + a_2 = k + 1$, 进一步求解即可.

【小问 1 详解】

解: ①根据题意, $(a+b)^4$ 的展开式有五项, 系数分别为 1, 4, 6, 4, 1,

$$\therefore (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

$$\textcircled{2} (y-1)^6 + (y+1)^6$$

$$= y^6 + 6y^5 \cdot (-1) + 15y^4 \cdot (-1)^2 + 20y^3 \cdot (-1)^3 + 15y^2 \cdot (-1)^4 + 6y \cdot (-1)^5 + (-1)^6$$

$$+ y^6 + 6y^5 \cdot 1 + 15y^4 \cdot 1^2 + 20y^3 \cdot 1^3 + 15y^2 \cdot 1^4 + 6y \cdot 1^5 + 1^6$$

$$= 2y^6 + 30y^4 + 30y^2 + 2,$$

$$\therefore y^2 = 2,$$

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= 2' \left(y^2 \right)^3 + 30' \left(y^2 \right)^2 + 30y^2 + 2 \\
 &= 2' 8 + 30' 4 + 30' 2 + 2 \\
 &= 198.
 \end{aligned}$$

【小问 2 详解】

解: $\because a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 8, \dots$ 该数列从第三项开始, 每一项都等于其前两项之和, 即 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$,

$$\therefore a_{2027} = a_{2025} + a_{2026},$$

$$\because T_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n,$$

$$\therefore T_{2025} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2025} = k,$$

$$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2025} + a_2 = k + a_2 = k + 1,$$

$$\therefore a_{2027} = a_{2025} + a_{2026}$$

$$= a_{2025} + a_{2024} + a_{2023} + \dots + a_2 + a_1 + a_2 = k + 1.$$