

2024 学年第一学期期末七年级数学试卷

(满分 100 分 完成时间 90 分钟) 2025.1

一、填空题: (本大题共 12 题, 每题 2 分, 满分 24 分)

1. 计算: $-a + 2a =$ _____.

【答案】 a

【解析】

【分析】 本题考查的是合并同类项, 把同类项的系数相加减, 字母与字母的指数不变即可得到答案.

【详解】 解: $-a + 2a = a$,

故答案为: a

2. 计算: $a^2 \cdot (-a)^3 =$ _____.

【答案】 $-a^5$

【解析】

【分析】 本题考查了同底数幂的乘法, 掌握计算公式是解题的关键.

根据同底数幂的乘法计算公式计算即可.

【详解】 解: $a^2 \cdot (-a)^3 = -a^{2+3} = -a^5$,

故答案为: $-a^5$.

3. 计算: $(x+1)(x-3) =$ _____.

【答案】 $x^2 - 2x - 3$

【解析】

【分析】 本题考查了多项式的乘法, 掌握相关法则是解题的关键.

根据整式的乘法法则进行计算即可.

【详解】 解: $(x+1)(x-3) = x^2 - 3x + x - 3 = x^2 - 2x - 3$.

故答案为: $x^2 - 2x - 3$.

4. 计算: $(x^2 + x) \div x =$ _____.

【答案】 $x+1$

【解析】

【分析】 本题主要考查了多项式除单项式, 掌握多项式除单项式的运算法则成为解题的关键.

直接运用多项式除单项式的运算法则计算即可.

【详解】解: $(x^2 + x) \div x = x^2 \div x + x \div x = x + 1$.

故答案为: $x + 1$.

5. 因式分解: $2a^2b + 6ab^2 =$ _____.

【答案】 $2ab(a + 3b)$

【解析】

【分析】此题主要考查了提取公因式法因式分解, 直接提取公因式 $2ab$, 即可求解.

【详解】解: $2a^2b + 6ab^2 = 2ab(a + 3b)$,

故答案为: $2ab(a + 3b)$.

6. 如果分式 $\frac{2x+1}{x-2}$ 有意义, 那么 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \neq 2$

【解析】

【分析】本题考查分式有意义的条件, 解题的关键是掌握分式有意义的条件: 分式的分母不为零. 据此列式解答即可.

【详解】解: $\because$ 分式 $\frac{2x+1}{x-2}$ 有意义,

$\therefore x - 2 \neq 0$,

解得: $x \neq 2$,

$\therefore x$ 的取值范围是 $x \neq 2$.

故答案为: $x \neq 2$.

7. 计算: $\frac{a}{5b} \div \frac{a^2}{b^3} =$ _____.

【答案】 $\frac{b^2}{5a}$

【解析】

【分析】本题考查了分式的乘除、同底数幂的除法, 掌握相关法则是解题的关键. 根据分式的除法法则进行计算即可.

【详解】解: $\frac{a}{5b} \div \frac{a^2}{b^3} = \frac{a}{5b} \times \frac{b^3}{a^2} = \frac{ab^3}{5a^2b} = \frac{b^2}{5a}$.

故答案为: $\frac{b^2}{5a}$.

8. 计算: $\frac{a}{2} + \frac{2}{a} =$ _____.

【答案】 $\frac{a^2+4}{2a}$

【解析】

【分析】 本题考查的是分式的加减运算, 先通分, 再计算即可.

【详解】 解: $\frac{a}{2} + \frac{2}{a} = \frac{a^2}{2a} + \frac{4}{2a} = \frac{a^2+4}{2a}$;

故答案为: $\frac{a^2+4}{2a}$

9. 规定一种新运算“ $\otimes$ ”: 对于任意两个不为0的代数式 a 、 b , 有 $a \otimes b = a^{-1}b^0$. 那么当 $x=4$, $y=2$ 时, $(x+y) \otimes (-2x^{-2}y)$ 的值是_____.

【答案】 $\frac{1}{6}$

【解析】

【分析】 本题考查的是负整数指数幂的含义, 零次幂的含义, 根据新定义运算可得

$(x+y) \otimes (-2x^{-2}y) = 6^{-1} \times (-2x^{-2}y)^0$, 再进一步解答即可.

【详解】 解: $\because a \otimes b = a^{-1}b^0$,

当 $x=4$, $y=2$ 时,

$$(x+y) \otimes (-2x^{-2}y)$$

$$= 6 \otimes (-2x^{-2}y)$$

$$= 6^{-1} \times (-2x^{-2}y)^0$$

$$= \frac{1}{6};$$

10. 现有一包10克的果汁粉, 用水冲泡成浓度为10%的饮料, 需要加_____克水.

【答案】 90

【解析】

【分析】 本题考查的是一元一次方程的应用，设需要加水 x 克，可得 $10\% \times (10 + x) = 10$ ，再解方程即可.

【详解】 解： 设需要加水 x 克，

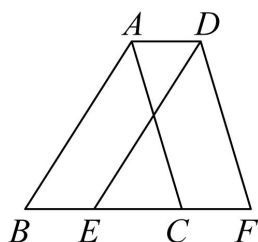
根据题意得： $10\% \times (10 + x) = 10$ ，

解得 $x = 90$ ，

答： 需要加水 90 克.

故答案为： 90

11. 如图，将周长为 17 cm 的 $\triangle ABC$ 沿 BC 平移得到 $\triangle DEF$. 平移后，如果四边形 $ABFD$ 的周长是 21 cm，那么平移的距离是_____ cm.



【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查了平移的性质. 由平移可知四边形 $ABFD$ 的周长 $= \triangle ABC + AD + CF$ ，根据平移可知 $AD = CF$. 再进一步求解即可.

【详解】 解： 由题意可知 $AD = CF$ ， $AC = DF$ ，

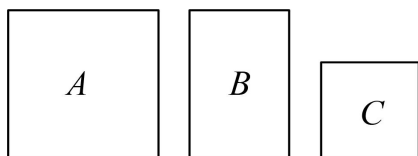
$$\text{则 } AD = \frac{1}{2} (AB + BF + DF + AD - AB - BC - AC)$$

$$= \frac{1}{2} \times (21 - 17)$$

$$= 2 (\text{cm});$$

故答案为 2.

12. 如图，现有三种不同型号的卡片共 12 张，其中有 3 张边长为 3 cm 的正方形 A 型卡片，有 4 张长为 3 cm，宽为 2 cm 的长方形 B 型卡片，有 5 张边长为 2 cm 的正方形 C 型卡片. 我们可以选取一些卡片，无重叠，无缝隙地拼成不同形状的长方形，那么能拼成面积最大的长方形的面积是_____ cm^2 .



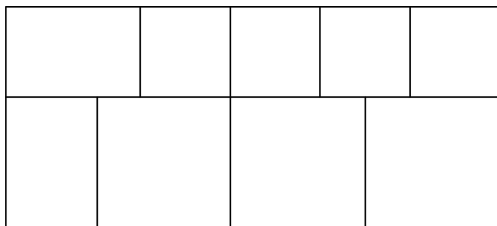
【答案】 55

【解析】

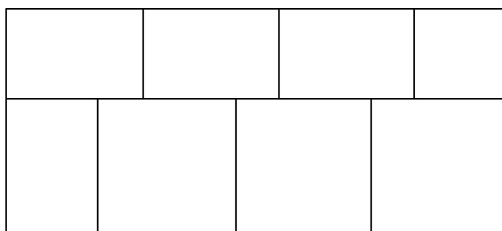
【分析】 本题考查的是几何图形的拼接，理解题意，得到新的长方形的长与宽即可得到答案.

【详解】 解： 根据题意得： 新的长方形的长为： $3 \times 3 + 2 = 11$ ， 宽为 $3 + 2 = 5$ ；

如图，



或



$\therefore$ 最大面积为 $11 \times 5 = 55$ ，

故答案是： 55；

二、选择题：（本大题共 5 题，每题 3 分，满分 15 分）

13. 下列说法正确的是（ ）

A. $2x^2y$ 的次数是 2

B. $\frac{x-3}{2}$ 的系数是 1

C. $x^2 - 2x - 3$ 是二次三项式

D. $x^2 - 2x - 3$ 的一次项是 $2x$

【答案】 C

【解析】

【分析】 此题主要考查了多项式和单项式的含义，关键是掌握单项式中的数字因数叫做单项式的系数，一个单项式中所有字母的指数的和叫做单项式的次数，多项式中每个单项式是多项式的项，最高次项的次数是多项式的次数. 利用单项式的系数与次数和多项式的项与次数的含义进行解答即可.

【详解】 解： A. $2x^2y$ 的次数是 3，故选项 A 说法错误；

B. $\frac{x-3}{2}$ 是多项式，故选项 B 说法错误；

C. $x^2 - 2x - 3$ 是二次三项式，故选项 C 说法正确；

D. $x^2 - 2x - 3$ 的一次项是 $-2x$ ，故选项 D 说法错误.

故选： C.

14. 下列算式中，正确的是 ()

A. $a^2 \cdot a^3 = a^6$

B. $(-2a)^2 = 4a^2$

C. $3a^{-2} = \frac{1}{3a^2}$

D. $(a^{-1} + b^{-1})^{-1} = a + b$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了同底数幂的乘法，幂的乘方与积的乘方，负整数指数幂，熟练掌握运算是解题的关键。根据同底数幂的乘法，幂的乘方与积的乘方，负整数指数幂的运算法则逐项计算判断即可。

【详解】 解： A. $a^2 \cdot a^3 = a^5$ ，故此选项不符合题意；

B. $(-2a)^2 = 4a^2$ ，故此选项符合题意；

C. $3a^{-2} = \frac{3}{a^2}$ ，故此选项不符合题意；

D. $(a^{-1} + b^{-1})^{-1} = \frac{1}{a^{-1} + b^{-1}} = \frac{ab}{a + b}$ ，故此选项不符合题意；

故选： B.

15. 下列各式中，能用完全平方公式进行因式分解的是 ()

A. $x^2 + 2x - 1$

B. $x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$

C. $x^2 + 2x + 4$

D. $x^2 - 6x + 9$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查了用公式法进行因式分解，熟记能用公式法进行因式分解的式子的特点是解题的关键。

根据完全平方公式的特点：两项平方项的符号相同，另一项是两底数积的 2 倍，对各选项分析判断后利用排除法求解。

【详解】 解： A: $x^2 + 2x - 1$ 不符合完全平方公式法分解因式的式子特点，故此选项不符合题意；

B: $x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$ 不符合完全平方公式法分解因式的式子特点，故此选项不符合题意；

C: $x^2 + 2x + 4$ 不符合完全平方公式法分解因式的式子特点，故此选项不符合题意；

D: $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$ ，故此选项符合题意。

故选： D.

16. 如果使分式 $\frac{A}{2a+b}$ 有意义的 a 和 b 的值都扩大为原来的 2 倍，则分式的值也扩大为原来的 2 倍，那么整式 A 可以是 ()

- A. $2a+2b$ B. $4a+4b$ C. ab D. a^2b^2

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了分式的基本性质，熟练掌握分式的基本性质是解题的关键。利用分式的基本性质逐项判断即可。

【详解】解：当 A 表示 $2a+2b$ 时， $\frac{2 \times 2a + 2 \times 2b}{2 \times 2a + 2b} = \frac{2a+2b}{2a+b}$ ，它的值与原分式的值相等，故 A 不符合题意；

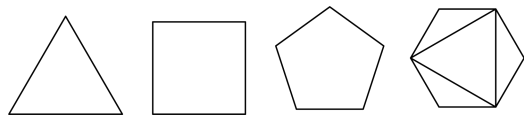
当 A 表示 $4a+4b$ 时， $\frac{4 \times 2a + 4 \times 2b}{2 \times 2a + 2b} = \frac{4a+4b}{2a+b}$ ，它的值是原分式的值的相等，故 B 不符合题意；

当 A 表示 ab 时， $\frac{2a \times 2b}{2 \times 2a + 2b} = \frac{2ab}{2a+b}$ ，它的值是原分式的值的 2 倍，故 C 符合题意；

当 A 表示 a^2b^2 时， $\frac{(2a)^2 \times (2b)^2}{2 \times 2a + 2b} = \frac{16a^2b^2}{2(2a+b)} = \frac{8a^2b^2}{2a+b}$ ，它的值是原分式的值的 8 倍，故 D 不符合题意；

故选：C。

17. 下列四个图形中，既是中心对称图形又是轴对称图形的个数有 ()



- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了中心对称图形与轴对称图形的概念：轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分沿对称轴折叠后可重合；中心对称图形是要寻找对称中心，旋转 180 度后与原图重合。根据轴对称图形与中心对称图形的概念求解。

【详解】第二个图形既是中心对称图形又是轴对称图形，共 1 个。

故选：A。

三、简答题：(本大题共 6 题，每题 5 分，满分 30 分)

18. 计算： $x \cdot x^2 \cdot x^3 - (-x)^6 + (x^3)^2$

【答案】 x^6

【解析】

【分析】 本题考查的是同底数幂的乘法，幂的乘方运算，合并同类项，先计算同底数幂的乘法，幂的乘方，再合并同类项即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & x \cdot x^2 \cdot x^3 - (-x)^6 + (x^3)^2 \\ &= x^6 - x^6 + x^6 \\ &= x^6. \end{aligned}$$

19. 计算: $(a+2)(a-2) + (a-2)^2$.

【答案】 $2a^2 - 4a$

【解析】

【分析】 本题考查的是乘法公式的应用，先利用平方差公式与完全平方公式计算，再合并同类项即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & (a+2)(a-2) + (a-2)^2 \\ &= a^2 - 4 + (a^2 - 4a + 4) \\ &= 2a^2 - 4a; \end{aligned}$$

20. 计算: $\frac{2x}{x-1} + \frac{1}{x+3} - \frac{3x+5}{x^2+2x-3}$.

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查的是分式的加减运算，先通分，再约分即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & \frac{2x}{x-1} + \frac{1}{x+3} - \frac{3x+5}{x^2+2x-3} \\ &= \frac{2x(x+3)}{(x-1)(x+3)} + \frac{x-1}{(x-1)(x+3)} - \frac{3x+5}{(x-1)(x+3)} \\ &= \frac{2x^2+4x-6}{(x-1)(x+3)} \\ &= \frac{2(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+3)} \\ &= 2. \end{aligned}$$

21. 计算: $(x^{-1}y - xy^{-1}) + (x^{-1} - y^{-1})$. (结果不含负整数指数幂)

【答案】 $x + y$

【解析】

【分析】 本题考查的是负整数指数幂的含义，分式的混合运算，把原式化为 $\left(\frac{y}{x}-\frac{x}{y}\right)\div\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$ ，再计算分式的混合运算即可.

$$\begin{aligned} & \text{【详解】 解: } (x^{-1}y - xy^{-1}) + (x^{-1} - y^{-1}) \\ &= \left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right) \div \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \\ &= \frac{y^2 - x^2}{xy} \div \frac{y - x}{xy} \\ &= \frac{y^2 - x^2}{xy} \cdot \frac{xy}{y - x} \\ &= \frac{(y + x)(y - x)}{xy} \cdot \frac{xy}{y - x} \\ &= x + y. \end{aligned}$$

22. 因式分解: $(x+3)^2 - 5(x+3) - 6$.

【答案】 $(x-3)(x+4)$

【解析】

【分析】 本题考查的是因式分解，先计算整式的乘法，再合并同类项，最后利用十字乘法分解因式即可.

$$\begin{aligned} & \text{【详解】 解: } (x+3)^2 - 5(x+3) - 6 \\ &= (x^2 + 6x + 9) - 5x - 15 - 6 \\ &= x^2 + x - 12 \\ &= (x-3)(x+4). \end{aligned}$$

23. 因式分解: $9a^2 - 3a + b - b^2$.

【答案】 $(3a-b)(3a+b-1)$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解，熟练掌握因式分解的方法是关键. 利用分组分解法因式分解即可.

$$\text{【详解】 解: 原式} = (9a^2 - b^2) - (3a - b)$$

$$= (3a+b)(3a-b) - (3a-b)$$

$$= (3a-b)(3a+b-1)$$

四、解答题：（本大题共 5 题，第 24 题 5 分，第 25，26 每题 6 分，第 27，28 每题 7 分，共 31 分）

24. 我们规定符号 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 的意义是： $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. 先化简，后求值： $\begin{vmatrix} a^2 & a-1 \\ 1 & (a+1)^{-1} \end{vmatrix}$ ，其中 $a = 2024$.

【答案】 $\frac{1}{a+1}$ ， $\frac{1}{2025}$

【解析】

【分析】 本题考查新定义，分式的化简求值，根据负整数指数幂的意义，把问题转化为分式的化简求值. 解题的关键是理解新定义，掌握分式的运算法则.

【详解】 解： $\begin{vmatrix} a^2 & a-1 \\ 1 & (a+1)^{-1} \end{vmatrix} = a^2(a+1)^{-1} - (a-1) \times 1$

$$= \frac{a^2}{a+1} - (a-1)$$

$$= \frac{a^2}{a+1} - \frac{a^2-1}{a+1}$$

$$= \frac{1}{a+1},$$

当 $a = 2024$ 时，原式 $= \frac{1}{2025}$.

25. 解方程： $\frac{4}{x-3} - \frac{x}{3-x} = 2$.

以下是老师给出的某同学在作业中解方程 $\frac{4}{x-3} - \frac{x}{3-x} = 2$ 的过程：

解：由原方程可得

$$\frac{4}{x-3} + \frac{x}{x-3} = 2, \dots\dots①$$

因为此时等式左边分式的分母相同，于是可得 $4+x=2$ ， $\dots\dots②$

解得 $x=-2$ ， $\dots\dots③$

经检验， $x=-2$ 是原方程的解. $\dots\dots④$

所以原方程的解是 $x=-2$.

老师在批改这道题时，发现了其中的解题错误.

(1) 现请你指出：上述解题过程中，从第_____步开始出现错误（填入表示解题步骤的序号①②③④即可）；

(2) 请写出你认为正确的解题过程.

【答案】(1) ② (2) 见解析

【解析】

【分析】 本题考查的是解分式方程，熟练掌握分式方程的解法和步骤是解题的关键.

(1) 根据分式方程的解法进行分析即可得到答案；

(2) 先去分母变分式方程为整式方程，然后解整式方程，对方程的解进行检验即可.

【小问 1 详解】

第②步最后的式子应为： $4+x=2(x-3)$ ，

$\therefore$ 从第②步开始出现错误；

【小问 2 详解】

整理得： $\frac{4}{x-3} + \frac{x}{x-3} = 2$

去分母，得： $4+x=2(x-3)$

整理，得： $x=10$

检验：当 $x=10$ 时， $x-3 \neq 0$ ，

所以，原方程的解是 $x=10$.

26. 如图，已知三角形 ABC ，按下列要求画出图形（不用写画法，保留作图痕迹，书写结论）；

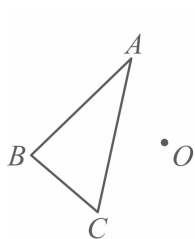


图1

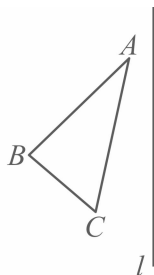


图2

(1) 在图（1）中画出三角形 ABC 关于点 O 成中心对称的三角形 $A_1B_1C_1$ ；

(2) 在图（2）中画出三角形 ABC 关于直线 l 成轴对称的三角形 $A_2B_2C_2$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

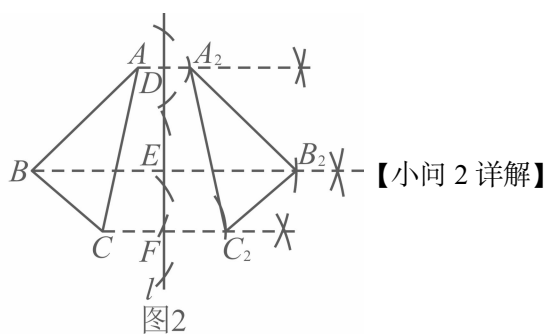
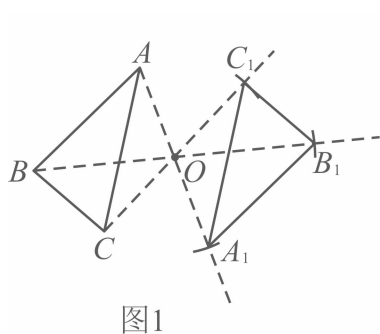
【分析】 本题考查了作图—旋转变换，熟练掌握中心对称的性质是解决问题的关键. 也考查了轴对称变换.

(1) 延长 AO ，在其延长线上截取 $OA_1 = OA$ ；延长 BO ，在其延长线上截取 $OB_1 = OB$ ；延长 CO ，在其延长线上截取 $OC_1 = OC$ ，然后 A_1B_1 、 A_2B_2 、 A_2C_2 ，从而得到 $\triangle A_1B_1C_1$ ；

(2) 过 A 点 $AD \perp$ 直线 l 于点 D ，再在 AD 的延长线上截取 $DA_2 = AD$ ，同样方法作出点 B_2 、 C_2 ，从而得到 $\triangle A_2B_2C_2$ 。

【小问 1 详解】

解：如图 1，三角形 $A_1B_1C_1$ 为所作；



解：如图 2，三角形 $A_2B_2C_2$ 为所作。

27. 水果店第一次用 500 元购进某种苹果，由于销售状况良好，该店又用 1650 元购进该品种苹果，所购数量是第一次购进数量的 3 倍，但进货价比第一次每千克多了 0.5 元。

(1) 第一次所购苹果的进货价是每千克多少元？

(2) 水果店以每千克 8 元的售价销售这些苹果，问该水果店售完这些苹果共可获利多少元？

【答案】(1) 5 元 (2) 1050 元

【解析】

【分析】本题考查了分式方程的应用以及有理数的混合运算，找准等量关系，正确列出分式方程是解题的关键。

(1) 设第一次所购苹果的进货价是每千克 x 元，则第二次所购苹果的进货价是每千克 $(x + 0.5)$ 元，利用进货数量 = 进货总价 ÷ 进货单价，结合第二次所购数量是第一次购进数量的 3 倍，可列出关于 x 的分式方程，解之经检验后，即可得出结论；

(2) 利用进货数量 = 进货总价 ÷ 进货单价，可求出第一次所购苹果的数量，结合第二次所购数量是第一次购进数量的 3 倍，可求出第二次所购苹果的数量，再利用销售总利润 = 销售单价 × 两次所购苹果的数量之和 - 两次所购苹果的进货总价，即可得出结论。

【小问 1 详解】

解：设第一次所购苹果的进货价是每千克 x 元，

第二次所购苹果的进货价是每千克 $(x+0.5)$ 元，

根据题意，列方程得： $3 \cdot \frac{500}{x} = \frac{1650}{x+0.5}$

解得， $x=5$

经检验： $x=5$ 是方程的解，且符合实际.

答：第一次所购苹果的进货价是每千克 5 元.

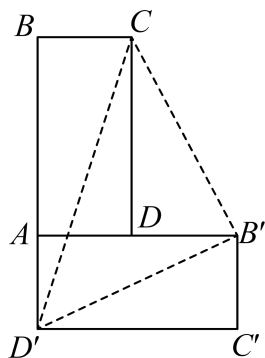
【小问 2 详解】

解：第一次数量： $500 \div 5 = 100$ 千克；第二次数量： 300 千克

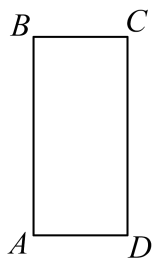
总获利： $(100+300) \times 8 - 500 - 1650 = 1050$ 元

答：该水果店售完这些苹果共可获利 1050 元.

28. 已知长方形 $ABCD$ 中，边 AB 的长度为 a ，边 AD 的长度为 b ， $a > 2b$. 将长方形 $ABCD$ 绕着点 A 旋转，点 B 、 C 、 D 的对应点分别记为点 B' 、 C' 、 D' ，旋转角记为 $\angle \alpha$.



(图1)



(备用图2)

(1) 当旋转方向为顺时针方向且 $\angle \alpha = 90^\circ$ 时 (如图1)，连接 CB' 、 $B'D'$ 、 $D'C$ ，用 a 、 b 的代数式表示三角形 $CB'D'$ 的面积；(结果需化简)

(2) 当 $0^\circ < \angle \alpha < 90^\circ$ 时，如果 $\angle BAB'$ 与 $\angle BAD'$ 的度数之比为 $2:7$ ，请直接写出旋转方向和 $\angle \alpha$ 的度数；

(3) 当 $0^\circ < \angle \alpha < 90^\circ$ 时，旋转过程中，当长方形 $AB'C'D'$ 与原长方形 $ABCD$ 重叠部分的图形是轴对称图形时，请直接写出旋转方向和 $\angle \alpha$ 的度数.

【答案】 (1) $\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2$;

(2) 顺时针方向 $\angle \alpha = 36^\circ$ ；逆时针方向 $\angle \alpha = 20^\circ$ ；

(3) 顺时针方向 $\angle \alpha = 45^\circ$ ；逆时针方向 $\angle \alpha = 45^\circ$.

【解析】

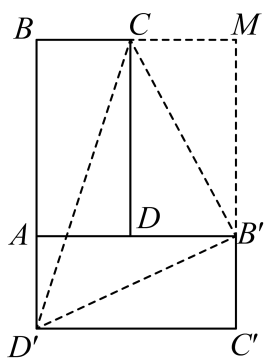
【分析】(1) 延长 BC 、 $C'B'$ 交于点 M ，把不规则图形补充成一个矩形，利用矩形的面积公式和三角形的面积公式列出表示 $\triangle CB'D'$ 面积的代数式；

(2) 本题需要考虑顺时针旋转和逆时针旋转两种情况，分别用含 α 的代数式表示出 $\angle BAB'$ 与 $\angle BAD'$ ，再根据这两个角的度数之比为 $2:7$ ，列方程求解；

(3) 本题需要考虑顺时针旋转和逆时针旋转两种情况，旋转后如果重叠部分是等腰直角三角形，则为轴对称图形，根据等腰直角三角形的性质确定旋转角的度数即可。

【小问 1 详解】

解：如下图所示，延长 BC 、 $C'B'$ 交于点 M ，

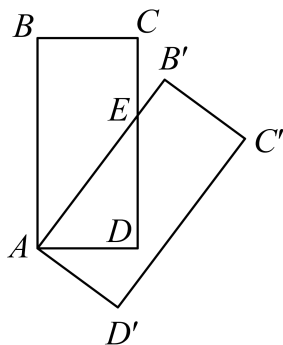


则矩形 $BD'C'M$ 的长为 $a+b$ ，宽为 a ，

$$\begin{aligned} \therefore S_{\triangle CB'D'} &= S_{\text{矩形}BD'C'M} - S_{\triangle BCD'} - S_{\triangle D'C'B'} - S_{\triangle CMB'} \\ &= a(a+b) - \frac{1}{2}b(a+b) - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}a(a-b) \\ &= a^2 + ab - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}ab \\ &= \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2; \end{aligned}$$

【小问 2 详解】

解：如下图所示，如果顺时针旋转，



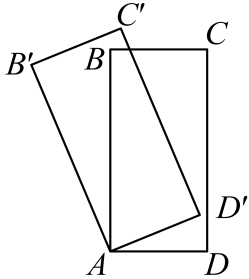
则有 $\angle BAB' = \angle DAD' = \alpha$ ， $\angle BAD' = \angle BAD + \angle DAD' = 90^\circ + \alpha$ ，

$\because \angle BAB'$ 与 $\angle BAD'$ 的度数之比为 $2:7$,

$$\therefore \frac{a}{90^\circ + a} = \frac{2}{7},$$

解得: $a = 36^\circ$;

如下图所示, 如果逆时针旋转,



则有 $\angle BAB' = \angle DAD' = a$, $\angle BAD' = \angle BAD - \angle DAD' = 90^\circ - a$,

$\because \angle BAB'$ 与 $\angle BAD'$ 的度数之比为 $2:7$,

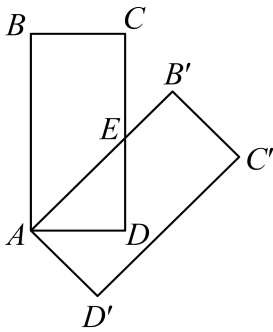
$$\therefore \frac{a}{90^\circ - a} = \frac{2}{7},$$

解得: $a = 20^\circ$;

综上所述, 顺时针方向 $\angle a = 36^\circ$ 或逆时针方向 $\angle a = 20^\circ$;

【小问 3 详解】

解: 如下图所示, 重叠部分是 $\triangle ADE$,



$\because \angle D = 90^\circ$,

若 $\triangle ADE$ 是轴对称图形,

则有 $\triangle ADE$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle EAD = \angle AED = 45^\circ,$$

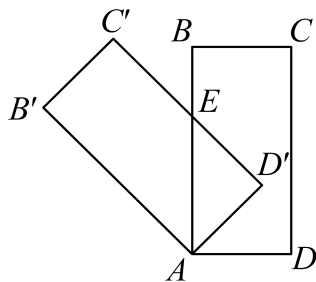
$$\therefore \angle BAE = \angle BAD - \angle AED = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ,$$

$\therefore$ 当顺时针方向旋转 45° 时,

$\therefore \triangle AED$ 是等腰直角三角形, 等腰直角三角形是轴对称图形,

$\therefore$ 长方形 $AB'C'D'$ 与原长方形 $ABCD$ 重叠部分的图形是轴对称图形;

如下图所示，重叠部分是 $\triangle AD'E$ ，



$\because \angle D' = 90^\circ$ ，

若 $\triangle AD'E$ 是轴对称图形，

则有 $\triangle AD'E$ 是等腰直角三角形，

$\therefore \angle EAD' = \angle AED' = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle BAB' = \angle BAD' - \angle AED' = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ ，

$\therefore$ 当逆时针方向旋转 45° 时，

$\therefore \triangle AED'$ 是等腰直角三角形，等腰直角三角形是轴对称图形，

$\therefore$ 长方形 $AB'C'D'$ 与原长方形 $ABCD$ 重叠部分的图形是轴对称图形；

综上所述，当顺时针方向 $\angle \alpha = 45^\circ$ 或逆时针方向 $\angle \alpha = 45^\circ$ 长方形 $AB'C'D'$ 与原长方形 $ABCD$ 重叠部分的图形是轴对称图形.

【点睛】 本题主要考查了图形的旋转、轴对称图形、解一元一次方程、列代数式、分类讨论的思想. 解决本题的关键是要注意分类讨论思想的运用，图形旋转时要分顺时针旋转或逆时针旋转两种情况考虑.