

## 2024 学年第一学期期末考试七年级数学试卷

考生注意:

1. 本试卷共 30 题.
2. 试卷满分 100 分, 考试时间 90 分钟.
3. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
4. 除第一、二大题外, 其余各题如无特殊说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出计算的主要步骤.

### 一、填空题 (本大题共 15 题, 每题 2 分, 满分 30 分)

1. 单项式  $2m^3n$  的次数是\_\_\_\_\_.

【答案】 4

【解析】

【分析】 本题考查的是单项式的次数, 根据单项式中所有的字母指数和是单项式的次数即可得到答案.

【详解】 解: 单项式  $2m^3n$  的次数是  $3+1=4$  (次),

故答案为: 4.

2. 整式  $5x^2-4x-2$  的常数项是\_\_\_\_\_.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 此题主要考查了多项式, 根据多项式中不含未知数的项是常数项解题即可.

【详解】 解: 整式  $5x^2-4x-2$  的常数项是 -2,

故答案为: -2.

3. 将整式  $-x^5+2y^5+xy^3-3x^4y$  按  $x$  的升幂排列: \_\_\_\_\_.

【答案】  $2y^5+xy^3-3x^4y-x^5$

【解析】

【分析】 本题考查多项式, 在排列多项式各项时, 要保持其原有的符号. 正确理解降幂排列或升幂排列的定义是解题的关键.

【详解】 解: 整式  $-x^5+2y^5+xy^3-3x^4y$  按  $x$  的升幂排列  $2y^5+xy^3-3x^4y-x^5$ ,

故答案为:  $2y^5 + xy^3 - 3x^4y - x^5$ .

4. 计算:  $a - (2a - b) + (3a - 2b) =$ \_\_\_\_\_.

【答案】  $2a - b$

【解析】

【分析】 本题考查整式的加减. 先去括号, 然后合并同类项求解.

【详解】 解:  $a - (2a - b) + (3a - 2b) = a - 2a + b + 3a - 2b = 2a - b$ ,

故答案为:  $2a - b$ .

5. 计算:  $-a^2 \cdot (-a)^2 =$ \_\_\_\_\_.

【答案】  $-a^4$

【解析】

【分析】 本题考查的是同底数幂的乘法运算, 解题关键是熟练掌握相关运算法则. 先确定符号, 再利用同底数幂的乘法运算法则计算即可.

【详解】 解:  $-a^2 \cdot (-a)^2 = -a^2 \cdot a^2 = -a^4$ .

故答案为:  $-a^4$ .

6. 因式分解:  $2m(a - b) - 3n(a - b) =$ \_\_\_\_\_.

【答案】  $(a - b)(2m - 3n)$

【解析】

【分析】 本题考查的是因式分解, 直接提取公因式  $(a - b)$  即可分解因式.

【详解】 解:  $2m(a - b) - 3n(a - b) = (a - b)(2m - 3n)$ ;

故答案为:  $(a - b)(2m - 3n)$

7. 计算:  $\frac{b}{a} - \frac{a}{b} =$ \_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{b^2 - a^2}{ab}$

【解析】

【分析】 本题考查的是分式的减法运算, 先通分, 再计算减法即可.

【详解】解：  $\frac{b}{a} - \frac{a}{b} = \frac{b^2}{ab} - \frac{a^2}{ab} = \frac{b^2 - a^2}{ab}$ ；

故答案为：  $\frac{b^2 - a^2}{ab}$  .

8. 如果分式  $\frac{a-2b}{a-b}$  的值为 1，那么  $b$  的值是\_\_\_\_\_.

【答案】 0

【解析】

【分析】 本题考查分式的值，根据题意得到  $a-2b=a-b$ ，解出  $b$  的值即可.

【详解】解：  $\because$  分式  $\frac{a-2b}{a-b}$  的值为 1，

$\therefore a-2b=a-b$ ，

解得  $b=0$ ，

故答案为： 0 .

9. 如果  $8x^4y^a \div (-2x^by^3)^2 = 2y$ ，那么  $a^b =$ \_\_\_\_\_.

【答案】 49

【解析】

【分析】 本题考查单项式除以单项式，积的乘方，代入求值，先根据积的乘方运算除数，然后根据单项式除以单项式法则得到  $4-2b=0$ ， $a-6=1$ ，求出  $a$ ， $b$  的值，然后代入解题即可.

【详解】  $\because 8x^4y^a \div (-2x^by^3)^2 = 8x^4y^a \div 4x^{2b}y^6 = 2x^{4-2b}y^{a-6} = 2y$ ，

$\therefore 4-2b=0$ ， $a-6=1$ ，

解得：  $a=7$ ， $b=2$ ，

$\therefore a^b = 7^2 = 49$ ，

故答案为： 49 .

10. 如果  $m^2 = 2m + 1$ ，那么  $3m(m-2) + 2025$  的值是\_\_\_\_\_.

【答案】 2028

【解析】

【分析】 由  $m^2 = 2m + 1$  可得  $m^2 - 2m = 1$ ，然后把代数式化为  $3(m^2 - 2m) + 2025$ ，然后整体代入解题即可.

【详解】解：  $\because m^2 = 2m + 1$ ，

$\therefore m^2 - 2m = 1$ ，

$$\therefore 3m(m-2)+2025=3(m^2-2m)+2025=3\times 1+2025=2028,$$

故答案为：2028.

11. 如果  $x = -1$  是关于  $x$  的方程  $\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} = \frac{a}{x^2+x}$  的增根，那么  $a$  的值为\_\_\_\_\_.

【答案】 -2

【解析】

【分析】此题考查了分式方程的增根，增根确定后可按如下步骤进行：①化分式方程为整式方程；②把增根代入整式方程即可求得相关字母的值. 分式方程去分母转化为整式方程，把  $x = -1$  代入计算即可求出  $a$  的值.

【详解】解：  $\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} = \frac{a}{x^2+x},$

去分母得：  $x+1+2x=a,$

把  $x = -1$  代入得：  $a = -2,$

故答案为：-2.

12. 一份数学小报由小海单独做，需  $a$  天完成；由小海、小天两人合作，则 3 天完成，那么小天单独完成这份数学小报需要的天数是\_\_\_\_\_。（结果用含  $a$  的代数式表示）

【答案】  $\frac{3a}{a-3}$

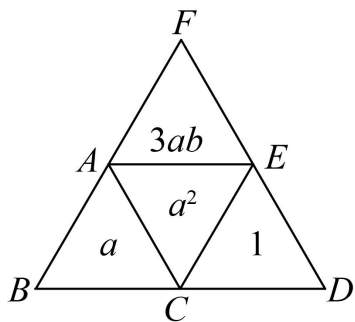
【解析】

【分析】本题考查列分式以及分式的混合运算，设总工作量为单位“1”，由工作效率=工作总量÷工作时间可求得两人的合作效率，然后求得小天的工作效率，从而求解.

【详解】解：小天单独完成这份数学小报需要的天数是  $1 \div \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{a} \right) = \frac{3a}{a-3}$  天，

故答案为：  $\frac{3a}{a-3}.$

13. 如图，将等边三角形  $FBD$  分割成 4 个小等边三角形，沿着等边三角形  $FBD$  的任意一条对称轴对折，互相重合的两个小等边三角形中的单项式的值都相等，那么  $a-b =$ \_\_\_\_\_.



【答案】  $\frac{2}{3}$

【解析】

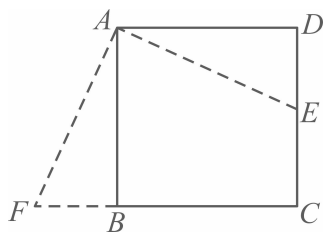
【分析】 本题考查轴对称的性质，代数式求值，等边三角形的性质，根据对称性得到  $a = 1 = 3ab$ ，解方程组得到  $a, b$  的值，然后代入计算即可.

【详解】 解：由题意可得  $\begin{cases} a = 1 \\ 3ab = 1 \\ 3ab = a \end{cases}$ ，解得  $\begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}$ ，

$$\therefore a - b = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

故答案为：  $\frac{2}{3}$  .

14. 如图，点  $E$  在正方形  $ABCD$  的边  $CD$  上，将  $\triangle ADE$  绕点  $A$  顺时针旋转  $90^\circ$  得到  $\triangle ABF$ ，如果正方形  $ABCD$  的边长是 5，那么四边形  $AECF$  的面积是\_\_\_\_\_.



【答案】 25

【解析】

【分析】 本题主要考查了旋转的性质以及正方形的性质，利用旋转的性质得出四边形  $AFCE$  的面积等于正方形  $ABCD$  的面积，解题即可.

【详解】 解：由旋转可得  $S_{\text{四边形}AFCE} = S_{\text{正方形}ABCD} = 5^2 = 25$ ，

故答案为： 25 .

15. 通过教材中分式单元的的阅读材料，我们知道了一个分式可以写成几个分式的和，

如：  $\frac{1}{x(x+2)} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2(x+2)}$  .

观察下列解方程的过程：  $\frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} - \frac{1}{2x} = 1$  .

$$\frac{1}{2x} - \frac{1}{2(x+2)} + \frac{1}{2(x+2)} - \frac{1}{2(x+4)} - \frac{1}{2x} = 1.$$

$$-\frac{1}{2(x+4)}=1.$$

$$x=-4\frac{1}{2}.$$

在上述的解方程过程中，应用了  $\frac{1}{x(x+2)}=\frac{1}{2x}-\frac{1}{2(x+2)}$ ，使解方程的过程变得简捷.

类似的，解方程  $\frac{1}{x(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+4)}+\cdots+\frac{1}{(x+2022)(x+2024)}-\frac{1}{2x}=1$ ,

这个方程的解是  $x=$ \_\_\_\_\_.

**【答案】**  $-2024\frac{1}{2}$

**【解析】**

**【分析】** 本题考查解分式方程，根据题目提供的方法解方程即可.

**【详解】** 解:  $\frac{1}{x(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+4)}+\cdots+\frac{1}{(x+2022)(x+2024)}-\frac{1}{2x}=1$ ,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+2022}-\frac{1}{x+2024}\right)-\frac{1}{2x}=1,$$

$$-\frac{1}{2(x+2024)}=1,$$

$$\text{解得: } x=-2024\frac{1}{2},$$

经检验  $x=-2024\frac{1}{2}$  是原方程的解,

故答案为:  $-2024\frac{1}{2}$ .

## 二、选择题 (本大题共 5 题, 每题 2 分, 满分 10 分)

16. 下列计算正确的是 ( )

- A.  $3a^2-2a^2=1$       B.  $a^3\div a^2=a(a\neq 0)$       C.  $a^2\cdot a^3=a^6$       D.  $(2a)^3=6a^3$

**【答案】** B

**【解析】**

**【分析】** 本题考查了合并同类项，同底数幂的乘除法，积的乘方，根据以上运算法则逐项分析即可.

**【详解】** 解: A、 $3a^2-2a^2=a^2$ ，故该选项不正确，不符合题意;

B、 $a^3\div a^2=a(a\neq 0)$ ，故该选项正确，符合题意;

C、 $a^2 \cdot a^3 = a^5$ ，故该选项不正确，不符合题意；

D、 $(2a)^3 = 8a^3$ ，故该选项不正确，不符合题意；

故选：B.

17. 中国的历史文化源远流长，我们的祖先创造了很多造型别致且实用美观的纹样. 下面四个纹样中，属于四方连续纹样的是（ ）



【答案】D

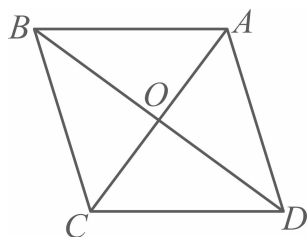
【解析】

【分析】本题考查了四方连续纹样，四方连续纹样是一种图案设计形式，由一个单位纹样向上下左右四个方向反复连续循环排列而成. 据此分析即可.

【详解】解：属于四方连续纹样的是选项 D，

故选：D.

18. 如图， $\triangle AOB$  与  $\triangle COD$  关于点  $O$  成中心对称，连接  $AD$ 、 $BC$ ，以下结论错误的是（ ）



A.  $AO = CO$

B.  $\angle BAO = \angle CDO$

C.  $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOD}$

D.  $\triangle AOD$  与  $\triangle COB$  关于点  $O$  成中心对称

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查的是中心对称的性质，根据中心对称的性质逐一分析各选项即可.

【详解】解： $\because \triangle AOB$  与  $\triangle COD$  关于点  $O$  成中心对称，

$\therefore OA = OC$ ， $OB = OD$ ， $\angle BAO = \angle DCO$ ，故 A 不符合要求；B 符合要求；

$\because OA = OC$ ， $\angle AOD = \angle COB$ ， $OD = OB$ ，

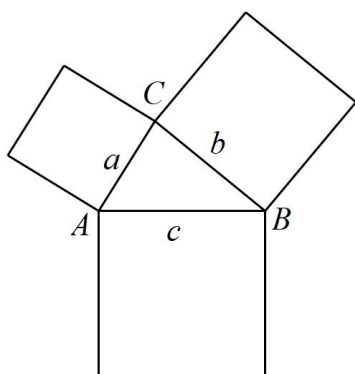
$$\therefore \triangle AOD \cong \triangle COB$$

$\therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOD}$ ，故 C 不符合题意；

$\therefore \triangle AOD$  与  $\triangle COB$  关于点  $O$  成中心对称，故 D 不符合要求；

故选：B.

19. 根据整式与整式相乘，可以得到等式： $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$ . 试利用这个等式解决以下问题：如图， $\triangle ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ，分别以  $AC$ 、 $BC$ 、 $AB$  为边向外侧作正方形. 如果  $AC$ 、 $BC$ 、 $AB$  的长分别是  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ，且  $a+b+c=12$ ， $ab+ac+bc=37$ ，那么这三个正方形的面积和是（ ）



A. 70

B. 107

C. 60

D. 83

【答案】A

【解析】

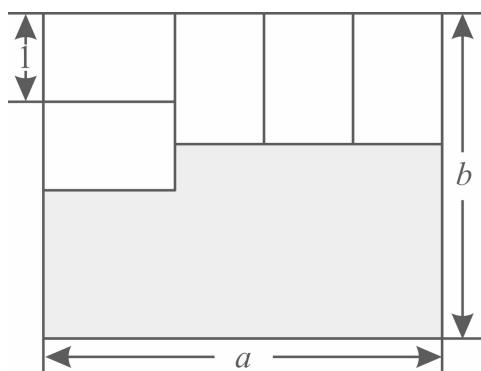
【分析】 本题考查整体代入，整式的乘法公式的变形，根据所给等式可得  $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc)$ ，然后整体代入计算即可.

【详解】解：由公式得： $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc) = 12^2 - 2 \times 37 = 70$ ，

$\therefore$  这三个正方形的面积和是 70，

故选：A.

20. 如图，长为  $a$ ，宽为  $b$  的大长方形被分割为 6 块，除阴影 A 外，其余 5 块是形状、大小完全相同的小长方形，其较短的边长为 1，那么阴影 A 的周长是（ ）



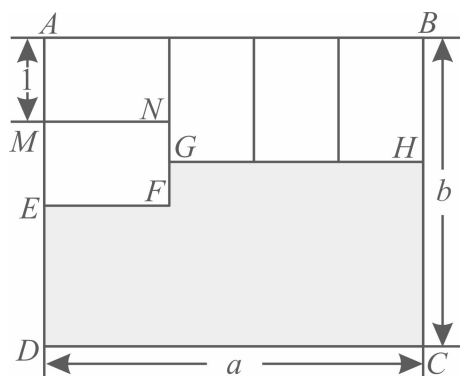
- A.  $2b+a+4$       B.  $3b+4$       C.  $2b+6$       D.  $2b+3a$

【答案】C

【解析】

【分析】 本题考查的是列代数式，合并同类项，先标注字母，求解  $DE = b - 2$ ， $EF = a - 3 = BH$ ， $HC = b - a + 3$ ，再利用周长公式列式计算即可。

【详解】 解：标注字母如图所示：



由题意可得：  $DE = b - 2$ ， $EF = a - 3 = BH$ ， $HC = b - a + 3$ ， $GF = 5 - a$

阴影 A 的周长为：  $a + b - 2 + a - 3 + 5 - a + 3 + b - a + 3 = 2b + 6$ ，

故选：C.

### 三、简答题（本大题共 6 题，每题 5 分；满分 30 分）

21. 计算：  $\left(-2a^2 \cdot a^3\right)^3 \div 2a^3$ .

【答案】  $-4a^{12}$

【解析】

【分析】 本题考查的是同底数幂的乘法运算，积的乘方运算，单项式除以单项式，根据相应的运算法则先计算同底数幂的乘法，再计算积的乘方，再计算单项式除以单项式即可。

【详解】 解：  $\left(-2a^2 \cdot a^3\right)^3 \div 2a^3$

$$= \left(-2a^5\right)^3 \div 2a^3$$

$$= -8a^{15} \div 2a^3$$

$$= -4a^{12};$$

22. 计算:  $(a+1)(a-1)(a^2-1)-(a^2+1)^2$ .

【答案】  $-4a^2$

【解析】

【分析】 本题考查的是整式的混合运算，先利用平方差公式与完全平方公式计算整式的乘法运算，再合并同类项即可.

【详解】 解:  $(a+1)(a-1)(a^2-1)-(a^2+1)^2$   
 $= (a^2-1)(a^2-1)-(a^2+1)^2$   
 $= a^4-2a^2+1-a^4-2a^2-1$   
 $= -4a^2.$

23. 计算:  $\frac{x^2-4}{x^2} \cdot \frac{1}{x+2} \div \left(1-\frac{2}{x}\right)$ .

【答案】  $\frac{1}{x}$

【解析】

【分析】 本题考查分式的混合运算，原式括号中两项通分，然后把除法转化为乘法，约分即可得到结果.

【详解】 解:  $\frac{x^2-4}{x^2} \cdot \frac{1}{x+2} \div \left(1-\frac{2}{x}\right)$   
 $= \frac{(x+2)(x-2)}{x^2} \cdot \frac{1}{x+2} \cdot \frac{x}{x-2}$   
 $= \frac{1}{x}.$

24. 因式分解:  $x^2y^2+9xy+8$ .

【答案】  $(xy+1)(xy+8)$

【解析】

【分析】 本题考查的是因式分解，利用十字乘法分解因式即可.

【详解】 解:  $x^2y^2+9xy+8$

$$= (xy)^2 + 9xy + 8$$

$$= (xy + 1)(xy + 8);$$

25. 因式分解:  $a^2 - b^2 - 1 - 2b$ .

**【答案】**  $(a + b + 1)(a - b - 1)$

**【解析】**

**【分析】** 本题考查了因式分解, 把一个多项式化成几个整式的乘积的形式, 叫做因式分解. 因式分解常用的方法有: ①提公因式法; ②公式法; ③十字相乘法; ④分组分解法. 用分组分解法分解即可.

**【详解】** 解:  $a^2 - b^2 - 1 - 2b$

$$= a^2 - (b^2 + 2b + 1)$$

$$= a^2 - (b + 1)^2$$

$$= (a + b + 1)(a - b - 1).$$

26. 解方程:  $\frac{1}{2x-1} + \frac{x-2}{3-6x} = \frac{1}{3}$ .

**【答案】**  $x = 2$

**【解析】**

**【分析】** 本题考查的是分式方程的解法, 先去分母, 化为整式方程, 再解方程并检验即可.

**【详解】** 解:  $\frac{1}{2x-1} + \frac{x-2}{3-6x} = \frac{1}{3},$

$$\therefore \frac{1}{2x-1} - \frac{x-2}{3(2x-1)} = \frac{1}{3},$$

去分母得:  $3 - x + 2 = 2x - 1,$

整理得:  $3x = 6,$

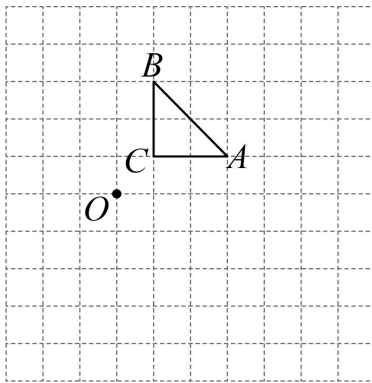
解得:  $x = 2,$

检验: 当  $x = 2$  时,  $3(2x - 1) \neq 0,$

$\therefore$  原方程的解为:  $x = 2.$

**四、解答题 (本大题共 4 题, 第 27、28 题每题 6 分; 第 29 题 8 分; 第 30 题 10 分; 满分 30 分)**

27. 在正方形网格中, 每个小正方形的边长均为 1 个单位长度,  $ABC$  三个顶点均在格点上, 位置如图所示.



(1) 将  $ABC$  先向右平移 1 个单位，再绕点  $O$  按顺时针方向旋转  $90^\circ$  后得到  $\triangle A_1B_1C_1$ ，试画出  $\triangle A_1B_1C_1$ ；

(2) 在 (1) 的基础上，连接  $AB_1$ 、 $CC_1$ ，四边形  $AB_1C_1C$  的面积是\_\_\_\_\_。

**【答案】** (1) 见解析 (2) 6

**【解析】**

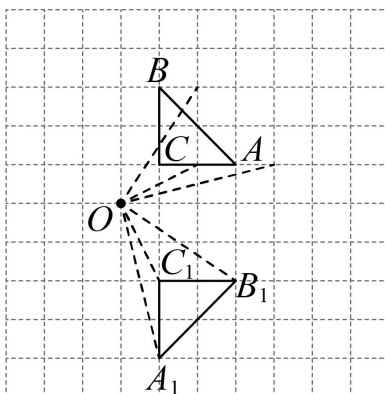
**【分析】** 本题考查作图-旋转变换、作图-平移变换，熟练掌握平移的性质、旋转的性质是解答本题的关键。

(1) 根据平移和旋转的性质作图即可；

(2) 根据矩形的面积公式计算即可。

**【小问 1 详解】**

解：如图， $\triangle A_1B_1C_1$  即为所求。



**【小问 2 详解】**

解：四边形  $AB_1C_1C$  的面积是  $2 \times 3 = 6$ 。

故答案为：6。

## 28. 阅读理解

材料 1：课后练习 13.1 (1) 的第 6 题，如果  $\frac{3}{a+1}$  是整数，那么整数  $a$  可以取哪些值？

解答过程如下：

解：因为  $\frac{3}{a+1}$  是整数；于是  $a+1$  的值为 1、-1、3 或 -3；

所以，整数  $a$  的取值是 0、-2、2 或 -4.

材料 2: 如果一个分式，它只含有一个字母且分子、分母的次数都是一次，那么可以将这样的分式变形为整数与新的分式的和的形式，其中新的分式的分子中不含字母.

例如:  $\frac{a+4}{a+1} = \frac{(a+1)+3}{a+1} = \frac{(a+1)}{a+1} + \frac{3}{a+1} = 1 + \frac{3}{a+1}.$

阅读材料 1、材料 2，并解答下列问题.

问题 1: 如果分式  $\frac{a+3}{a+1}$  的值是整数，那么整数  $a$  的所有取值是\_\_\_\_\_.

问题 2: 如果分式  $\frac{2x+4}{2x-3}$  的值是整数，那么所有满足条件的整数  $x$  的和是多少?

**【答案】** 问题 1: 0 或 -2 或 1 或 -3; 问题 2: 6

**【解析】**

**【分析】** 本题考查的是分式的加减运算的逆用，分式的值为整数的含义;

问题 1: 把原式化为  $1 + \frac{2}{a+1}$ ，再进一步解答即可;

问题 2: 把原式化为  $1 + \frac{7}{2x-3}$ ，再进一步解答即可;

**【详解】** 解: 问题 1:  $\frac{a+3}{a+1} = \frac{a+1+2}{a+1} = 1 + \frac{2}{a+1},$

$\therefore$  分式  $\frac{a+3}{a+1}$  的值是整数， $a$  是整数;

$\therefore a+1 = \pm 1$  或  $a+1 = \pm 2,$

解得:  $a = 0$  或  $a = -2$  或  $a = 1$  或  $a = -3;$

问题 2:  $\therefore \frac{2x+4}{2x-3} = \frac{2x-3+7}{2x-3} = 1 + \frac{7}{2x-3},$

$\therefore$  分式  $\frac{2x+4}{2x-3}$  的值是整数， $x$  是整数;

$\therefore 2x-3 = \pm 1$  或  $2x-3 = \pm 7;$

解得:  $x = 2$  或  $x = 1$  或  $x = 5$  或  $x = -2;$

$\therefore$  所有满足条件的整数  $x$  的和是  $5 + 2 + 1 + (-2) = 6.$

29. 腊八节喝腊八粥是中华民族的传统习俗. 市场上玫瑰味腊八粥每罐的进价比原味腊八粥每罐的进价多 5 元，某商家用 4000 元购进玫瑰味腊八粥的罐数与 3000 元购进的原味腊八粥的罐数相同.

(1) 玫瑰味腊八粥和原味腊八粥每罐的进价分别是多少元?

(2) 在两种口味腊八粥销售中，该商家都增加了进价的 20% 作为售价，最后两种口味的腊八粥全部售完，那么商家总共盈利多少元?

【答案】(1) 玫瑰味腊八粥每罐的进价是 20 元，原味腊八粥每罐的进价是 15 元

(2) 商家总共盈利 1400 元

【解析】

【分析】本题主要考查了分式方程的应用，找准等量关系，正确列出分式方程是解题的关键.

(1) 设玫瑰味腊八粥每罐的进价是  $x$  元，则原味腊八粥每罐的进价是  $(x-5)$  元，根据商家用 4000 元购进玫瑰味腊八粥的罐数与 3000 元购进的原味腊八粥的罐数相同，列出分式方程，解方程即可；

(2) 求出购进玫瑰味腊八粥的数量 = 原味腊八粥的数量 = 200 罐，再根据该商家都增加了进价的 20% 作为售价，列式计算即可.

【小问 1 详解】

解：设玫瑰味腊八粥每罐的进价是  $x$  元，则原味腊八粥每罐的进价是  $(x-5)$  元，

由题意得：  $\frac{4000}{x} = \frac{3000}{x-5}$ ，

解得：  $x = 20$ ，

经检验，  $x = 20$  是原方程的解，且符合题意，

$\therefore x-5 = 15$ ，

答：玫瑰味腊八粥每罐的进价是 20 元，原味腊八粥每罐的进价是 15 元；

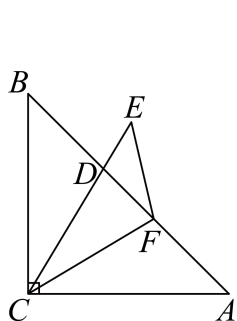
【小问 2 详解】

解：由 (1) 可知，购进玫瑰味腊八粥的数量 = 原味腊八粥的数量：  $3000 \div 15 = 200$  (罐)，

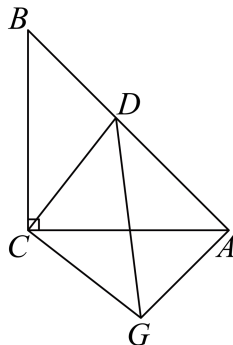
$\therefore$  商家总共盈利：  $200 \times 20 \times 20\% + 200 \times 15 \times 20\% = 800 + 600 - 400 = 1400$  (元)

答：商家总共盈利 1400 元.

30. 已知  $\triangle ABC$  中，  $\angle ACB = 90^\circ$ ，  $AC = BC$ ，  $AB = 8$ ，  $\angle ABC = \angle BAC = 45^\circ$ ，点  $D$  在边  $AB$  上，  $BD = a$  .



图①



图②

(1) 如图①，  $\triangle CBD$  绕着点  $C$  顺时针方向旋转，点  $B$  的对应点  $E$  落在射线  $CD$  上，点  $D$  的对应点  $F$  落在

边  $AB$  上, 而点  $E$  关于直线  $CF$  的对称点恰好是点  $A$ , 那么  $DF$  的长度为\_\_\_\_\_ (结果用含  $a$  的代数式表示); 旋转角的度数为\_\_\_\_\_;

(2) 如图②,  $\triangle CBD$  绕着点  $C$  顺时针方向旋转  $90^\circ$  后得到  $\triangle CAG$ , 点  $B$  和点  $D$  的对应点分别是点  $A$  和点  $G$ . 连接  $DG$ , 用含  $a$  的代数式表示  $S_{\triangle ADG}$ .

【答案】(1)  $8-2a$ ,  $30^\circ$ ;

(2)  $-\frac{1}{2}a^2 + 4a$

【解析】

【分析】 本题考查的是轴对称的性质, 旋转的性质, 整式的乘法运算;

(1) 根据旋转与轴对称的性质先判断  $\angle BCE = \angle ECF = \angle ACF = 30^\circ$ , 可得旋转角, 再证明  $ABC$  是轴对称图形,  $CDF$  是轴对称图形, 进一步可得  $DF$  的长度;

(2) 由旋转可得:  $CD = CG$ ,  $\angle DCG = \angle ACB = 90^\circ$ ,  $\angle B = \angle CAG = 45^\circ$ ,  $BD = AG = a$ , 证明  $\angle BAG = 90^\circ$ , 求解  $AD = 8-a$ , 再进一步求解三角形的面积即可.

【小问 1 详解】

解:  $\because \triangle CBD$  绕着点  $C$  顺时针方向旋转, 点  $B$  的对应点  $E$  落在射线  $CD$  上, 点  $D$  的对应点  $F$  落在边  $AB$  上, 而点  $E$  关于直线  $CF$  的对称点恰好是点  $A$ ,

$$\therefore \angle BCE = \angle ECF = \angle ACF,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCE = \angle ECF = \angle ACF = 30^\circ,$$

$$\therefore \text{旋转角是 } 30^\circ,$$

$$\because AC = BC, \angle ABC = \angle CAB = 45^\circ,$$

$$\therefore ABC \text{ 是轴对称图形},$$

$$\text{由旋转可得: } CD = CF,$$

$$\therefore CDF \text{ 是轴对称图形},$$

$$\therefore BD = AF = a,$$

$$\because AB = 8,$$

$$\therefore DF = 8 - 2a;$$

【小问 2 详解】

解: 由旋转可得:

$$CD = CG, \angle DCG = \angle ACB = 90^\circ, \angle B = \angle CAG = 45^\circ, BD = AG = a,$$

$$\therefore \angle CAB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BAG = 90^\circ,$$

$$\therefore AB = 8,$$

$$\therefore AD = 8 - a,$$

$$\therefore S_{\triangle ADG} = \frac{1}{2}a(8 - a) = -\frac{1}{2}a^2 + 4a.$$