

2024 学年第一学期期末考试

七年级数学试卷

(满分 100 分, 考试时间 90 分钟)

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分)

1. 下列运算结果正确的是 ()

- A. $x^3 + x^3 = 2x^6$ B. $-x^2 - x^4 = -x^6$ C. $(2x)^3 = 8x^3$ D. $x^6 \div x^2 = x^3$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查幂的运算, 根据合并同类项法则、积的乘方法则、同底数幂相除法则逐项判断即可.

【详解】解: A. $x^3 + x^3 = 2x^3$, 故原计算错误, 不符合题意;

B. $-x^2$ 与 $-x^4$ 不是同类项, 不可以合并, 故原计算错误, 不符合题意;

C. $(2x)^3 = 8x^3$, 故原计算正确, 符合题意;

D. $x^6 \div x^2 = x^4$, 故原计算错误, 不符合题意;

故选: C.

2. 使分式 $\frac{x}{2x-4}$ 有意义的 x 的取值范围是 ()

- A. $x = 2$ B. $x \neq 2$ C. $x = -2$ D. $x \neq 0$

【答案】B

【解析】

【分析】分式有意义的条件: 分式的分母不为零, 即 $2x - 4 \neq 0$.

【详解】解: $\because$ 分式 $\frac{x}{2x-4}$ 有意义,

$\therefore 2x - 4 \neq 0$, 即 $x \neq 2$.

故选择 B.

【点睛】从以下三个方面透彻理解分式的概念:

分式无意义 $\Leftrightarrow$ 分母为零;

分式有意义 $\Leftrightarrow$ 分母不为零;

分式值为零 $\Leftrightarrow$ 分子为零且分母不为零.

3. 下列变形属于因式分解的是 ()

$$A. x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$$

$$B. (-2x+3y)(2x+3y) = -4x^2 + 9y^2$$

$$C. a^2 - 2a + 1 = a(a-2) + 1$$

$$D. 3x^2y - xy = xy(3x-1)$$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了因式分解的定义及提公因式法分解因式，根据因式分解是指将几个单项式和的形式转化为几个单项式或多项式的积的形式，逐个判断即可，熟练掌握把一个多项式化为几个整式的积的形式，这种变形叫做把这个多项式因式分解是解题的关键。

【详解】解：A、 $x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$ ，不属于因式分解，不符合题意；

B、 $(-2x+3y)(2x+3y) = -4x^2 + 9y^2$ ，是整式的乘法运算，不属于因式分解，不符合题意；

C、 $a^2 - 2a + 1 = a(a-2) + 1$ ，不属于因式分解，不符合题意；

D、 $3x^2y - xy = xy(3x-1)$ ，属于因式分解，符合题意；

故选：D。

4. 下列说法中正确的是（ ）

A. 对应线段的夹角等于旋转角

B. 图形上的每一个点到旋转中心的距离都相等

C. 平移的对应点之间的距离是一样的，并且对应点的连线一定平行

D. 经过平移和旋转后的图形的形状和大小是不变的

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了平移的性质，旋转的性质等知识，因为有时对应线段并没有交点，所以“对应线段的夹角等于旋转角”这一说法是错误的，可判断A不符合题意；旋转的性质是对应点到旋转中心的距离相等，而不是图形上的每一个点到旋转中心的距离都相等，可判断B不符合题意；因为平移的对应点的连接有时在同一条直线上，所以“平移的对应点之间的距离是一样的，并且对应点的连接一定平行”这一说法是错误的，可判断C不符合题意；由经过平移和旋转得到的图形与原来的图形全等，可判断D符合题意，于是得到问题的答案。

【详解】解：∵有时对应线段并没有交点，

∴“对应线段的夹角等于旋转角”这一说法是错误的，故A不符合题意；

∴“旋转的性质是对应点到旋转中心的距离相等”，

∴ 中间空的部分的面积 = $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$.

故选 C.

【点睛】此题考查了完全平方公式的几何背景，求出正方形的边长是解答本题的关键.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 2 分，满分 24 分）

7. 计算： $-x^2 \cdot (-x^2)^3 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 x^8

【解析】

【分析】本题考查了同底数幂的乘法以及幂的乘方，根据同底数幂的乘法法则以及幂的乘方计算即可；

【详解】解：原式 = $-x^2 \cdot (-x^6) = x^8$

故答案为： x^8 .

8. 计算： $\frac{1}{3x} + \frac{5}{6x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{7}{6x}$

【解析】

【分析】根据异分母分式加法计算法则求解即可.

【详解】解： $\frac{1}{3x} + \frac{5}{6x}$
 $= \frac{2}{6x} + \frac{5}{6x}$
 $= \frac{7}{6x},$

故答案为： $\frac{7}{6x}$.

【点睛】本题主要考查了异分母分式加法，熟知相关计算法则是解题的关键.

9. 因式分解： $xm + xn + ym + yn = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $(x+y)(m+n)$

【解析】

【分析】本题考查了因式分解—分组分解法，先把原式中一二两项分成一组，三四两项分成一组，每组分别提取公因式，最后组与组之间提取公因式 $m+n$ 即可.

【详解】解：原式 = $(xm + xn) + (ym + yn)$

$$= x(m+n) + y(m+n)$$

$$= (x+y)(m+n),$$

故答案为： $(x+y)(m+n)$.

10. 分式 $\frac{y}{a(x-y)^2}$ 和 $\frac{1}{(x+y)(x-y)}$ 的最简公分母是_____.

【答案】 $a(x+y)(x-y)^2$

【解析】

【分析】 本题考查的是分式的最简公分母的确定，取各分母系数的最小公倍数与各字母因式的最高次幂的积作公分母，这样的公分母叫做最简公分母. 根据最简公分母的概念解答即可.

【详解】 解：分式 $\frac{y}{a(x-y)^2}$ 和 $\frac{1}{(x+y)(x-y)}$ 的最简公分母是 $a(x+y)(x-y)^2$,

故答案为： $a(x+y)(x-y)^2$.

11. 计算： $ab(a^{-2} + b^{-2}) =$ _____. (结果用不含有负整数指数幂的形式表示)

【答案】 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了负整数指数幂，先根据乘法的分配律计算，然后根据负整数指数幂的意义化简即可.

【详解】 解：原式 $= ab \cdot a^{-2} + ab \cdot b^{-2}$
 $= a^{-1}b + ab^{-1}$
 $= \frac{b}{a} + \frac{a}{b},$

故答案为： $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$.

12. 分式方程 $\frac{3}{x-3} = \frac{1}{x}$ 的解为_____.

【答案】 $x = -\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 去分母后化为整式方程求解，后检验即可.

【详解】解： $\frac{3}{x-3} = \frac{1}{x}$

$$3x = x - 3$$

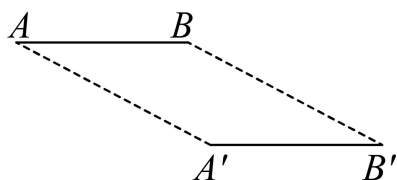
$$x = -\frac{3}{2},$$

经检验， $x = -\frac{3}{2}$ 是原分式方程的解.

故答案为： $x = -\frac{3}{2}$.

【点睛】 本题考查的是解分式方程，掌握解分式方程的步骤是关键.

13. 如图所示，线段 AB 经过平移后得到线段 $A'B'$ ， $AB = 3\text{cm}$ ， $AA' = 4\text{cm}$ ，那么线段 AB 沿_____方向平移了_____cm.



【答案】 ①. AA' ②. 4

【解析】

【分析】 本题考查了平移的性质，根据平移的方向和距离确定平移的结果即可.

【详解】解： 线段 AB 经过平移后得到线段 $A'B'$ ， $AB = 3\text{cm}$ ， $AA' = 4\text{cm}$ ，那么线段 AB 沿 AA' 方向平移了 4cm .

故答案为 AA' ；4.

14. 若 $4x^2+kx+1$ 是一个完全平方式，则 k 的值是_____.

【答案】 ± 4

【解析】

【分析】 首位两项是 $2x$ 和 1 的平方，根据完全平方式的形式可知，中间项为加上或减去 $2x$ 和 1 的积的 2 倍，据此可得答案.

【详解】 $\because 4x^2 + kx + 1 = (2x)^2 + kx + 1^2$ 是完全平方式，

$$\therefore k = \pm 2 \times 2 \times 1 = \pm 4$$

故答案为： ± 4 .

【点睛】 本题考查完全平方式，熟练掌握完全平方式的特点是解题的关键.

15. 若关于 x 的分式方程 $\frac{2x+a}{x-1} = 1$ 有增根，则 a 的值是_____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程，分式方程的增根，去分母，化分式方程为整式方程 $2x + a = x - 1$ ，由分式方程产生增根，可知 $x = 1$ ，然后把代入 $x = 1$ 整式方程即可求得 a 的值.

【详解】 解：分式方程去分母，得 $2x + a = x - 1$ ，

∵ 分式方程 $\frac{2x+a}{x-1} = 1$ 有增根，

∴ $x - 1 = 0$ ，

∴ $x = 1$ ，

把 $x = 1$ 代入 $2x + a = x - 1$ ，得 $2 + a = 1 - 1$ ，

解得 $a = -2$ ，

故答案为：-2.

16. x 克盐溶解在 a 克水中，取这种盐水 m 克，其中含盐_____克.

【答案】 $\frac{mx}{x+a}$

【解析】

【分析】 盐=盐水×浓度，而浓度=盐÷(盐+水)，根据式子列代数式即可.

【详解】 解：该盐水的浓度为： $\frac{x}{x+a}$ ，

故这种盐水 m 千克，则其中含盐为： $m \times \frac{x}{x+a} = \frac{mx}{x+a}$ 克.

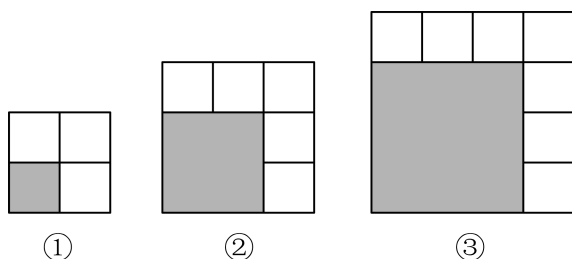
故答案为： $\frac{mx}{x+a}$.

【点睛】 本题考查了列代数式，解决问题的关键是找到所求的量的等量关系. 本题需注意浓度=溶质÷溶液.

17. 探索规律，并回答问题：观察下面各图形，我们会发现：图①空白部分小正方形的个数是 $2^2 - 1^2 = 2 + 1$ ；

图②空白部分小正方形的个数是 $3^2 - 2^2 = 3 + 2$ ；图③空白部分小正方形的个数是 $4^2 - 3^2 = 4 + 3$ ；像这样

继续排列下去，可以用含有字母 n 的代数式表示为：_____。（其中 n 为正整数）



【答案】 $(n+1)^2 - n^2 = n + n + 1$

【解析】

【分析】 本题考查了图形变化的规律，能根据所给等式写出图 n 空白部分小正方形个数满足的等式是解题的关键．根据所给图形，依次求出图形中空白小正方形的个数，发现规律即可解决问题．

【详解】 解：由所给图形可知，

题①空白部分小正方形的个数为： $2^2 - 1^2 = 2 + 1$ ；

题②空白部分小正方形的个数为： $3^2 - 2^2 = 3 + 2$ ；

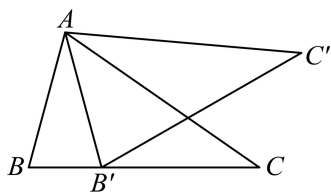
题③空白部分小正方形的个数为： $4^2 - 3^2 = 4 + 3$ ；

...

所以图 n 空白部分小正方形的个数： $(n+1)^2 - n^2 = n + n + 1$

故答案为： $(n+1)^2 - n^2 = n + n + 1$.

18. 如图，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 30° 得到 $\triangle AB'C'$ ，且 B' 恰好落在边 BC 上，已知 $\angle BAC = 70^\circ$ ，则 $\angle C' =$ _____.



【答案】 35° ##35 度

【解析】

【分析】 本题考查三角形的旋转问题，涉及等腰三角形性质，三角形外角的性质等知识，由将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 30° 得到 $\triangle AB'C'$ ，且 B' 恰好落在边 BC 上，可得 $\angle BAB' = 30^\circ$ ， $AB = AB'$ ， $\angle C = \angle C'$ ，即得 $\angle ABB' = \angle AB'B = 75^\circ$ ，而 $\angle BAC = 70^\circ$ ，故 $\angle B'AC = \angle BAC - \angle BAB' = 40^\circ$ ，从而 $\angle C = \angle AB'B - \angle B'AC = 35^\circ = \angle C'$.

【详解】 解： $\because$ 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 30° 得到 $\triangle AB'C'$ ，且 B' 恰好落在边 BC 上，

$$\therefore \angle BAB' = 30^\circ, \quad AB = AB', \quad \angle C = \angle C',$$

$$\therefore \angle ABB' = \angle AB'B = (180^\circ - 30^\circ) \div 2 = 75^\circ,$$

$$\because \angle BAC = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle B'AC = \angle BAC - \angle BAB' = 70^\circ - 30^\circ = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle C = \angle AB'B - \angle B'AC = 75^\circ - 40^\circ = 35^\circ,$$

$$\therefore \angle C' = 35^\circ.$$

故答案为： 35° 。

三、解答题：（本大题共 9 题，第 19-25 题每题 6 分，26、27 每题 7 分，第 28 题 8 分，满分 64 分）

19. 计算： $(9a^3b - 6a^2b^2 + 3ab) \div 3ab + 3ab$

【答案】 $3a^2 + ab + 1$

【解析】

【分析】 本题主要考查了整式的运算，根据多项式除以单项式，然后合并同类项即可。

【详解】 解：原式 $= 3a^2 - 2ab + 1 + 3ab$

$= 3a^2 + ab + 1$

20. 计算： $(-x + 2y)(-x - 2y) - x(x - y)$

【答案】 $-4y^2 + xy$

【解析】

【分析】 本题考查了整式的运算，根据平方差公式、单项式乘以多项式法则，合并同类法则计算即可。

【详解】 解：原式 $= (-x)^2 - (2y)^2 - x^2 + xy$

$= x^2 - 4y^2 - x^2 + xy$

$= -4y^2 + xy$ 。

21. 计算： $(\frac{b}{2ax})^2 \div (-\frac{ax}{3b}) \times \frac{8a}{b^3}$ 。

【答案】 $-\frac{6}{a^2x^3}$

【解析】

【分析】 先乘方，把除法转化为乘法后，再约分化简，结果要化为最简分式。

【详解】 解： $(\frac{b}{2ax})^2 \div (-\frac{ax}{3b}) \times \frac{8a}{b^3}$

$= -\frac{b^2}{4a^2x^2} \times \frac{3b}{ax} \times \frac{8a}{b^3}$

$= -\frac{6}{a^2x^3}$

22. 因式分解： $-a^2 - 5b^2 + 6ab$

【答案】 $-(a-b)(a-5b)$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解，先提取负号，然后根据十字相乘法因式分解即可.

【详解】 解：原式 $= -(a^2 - 6ab + 5b^2)$

$$= -(a-b)(a-5b)$$

故答案为： $-(a-b)(a-5b)$.

23. 因式分解： $(m^2 - 6)^2 - 6(m^2 - 6) + 9$

【答案】 $(m+3)^2(m-3)^2$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解，先根据完全平方公式进行因式分解，然后根据平方差公式进行因式分解即可.

【详解】 解：原式 $= (m^2 - 6 - 3)^2$

$$= (m^2 - 9)^2$$

$$= [(m+3)(m-3)]^2$$

$$= (m+3)^2(m-3)^2$$

24. 解方程： $1 - \frac{x}{1-x} = \frac{1}{x-1}$

【答案】 此方程无解

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程的解法，解分式方程的基本思想是“转化思想”，把分式方程转化为整式方程求解，解分式方程一定要注意要验根. 观察可得最简公分母 $(x-1)$ ，方程两边乘最简公分母，可以把分式方程转化为整式方程求解.

【详解】 解：方程两边同乘以 $(x-1)$ ，得 $x-1+x=1$ ，

移项、化简得 $x=1$ ，

检验：当 $x=1$ 时， $x-1=0$ ，所以 $x=1$ 是增根，

因此，原方程无解.

25. 先化简，在求值： $\frac{a^2 - 4a - 5}{a^2 - 5a} \div (a^2 + a)$ ，其中 $a = -\frac{1}{3}$.

【答案】 $\frac{1}{a^2}$, 9

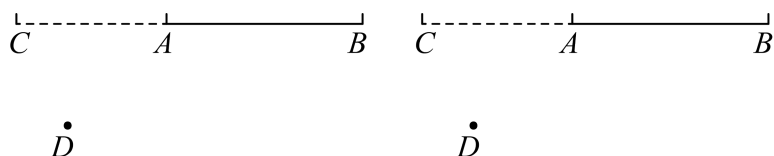
【解析】

【分析】 本题考查分式的化简求值，先利用分式的运算法则化简，再将 $a = -\frac{1}{3}$ 代入即可得出答案.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解：} & \frac{a^2 - 4a - 5}{a^2 - 5a} \div (a^2 + a) \\ &= \frac{(a-5)(a+1)}{a(a-5)} \cdot \frac{1}{a(a+1)} \\ &= \frac{1}{a^2}, \end{aligned}$$

$$\text{当 } a = -\frac{1}{3} \text{ 时, 原式} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = 9.$$

26. 线段 AB , AC , 点 A , 点 D 与点 B 如图所示 (A, B, C 三点共线). 其中 $AB = a$, $AC = b$, 点 A 与点 D 之间的距离 $AD = c$, 点 B 与点 D 之间的距离为 $BD = d$.



(备用图)

- (1) 以点 C 为旋转中心将线段 AB 逆时针旋转 90° , 那么线段扫过的面积如何表示?
- (2) 以点 D 为旋转中心将线段 AB 逆时针旋转 90° , 那么线段扫过的面积如何表示?

当 $c = 1$, $d = \frac{5}{2}$ 时, 扫过的面积是多少? (结果保留 π)

【答案】 (1) $\frac{\pi}{4}(a^2 + 2ab)$

(2) $\frac{\pi}{4}(d^2 - c^2)$, $\frac{21\pi}{16}$

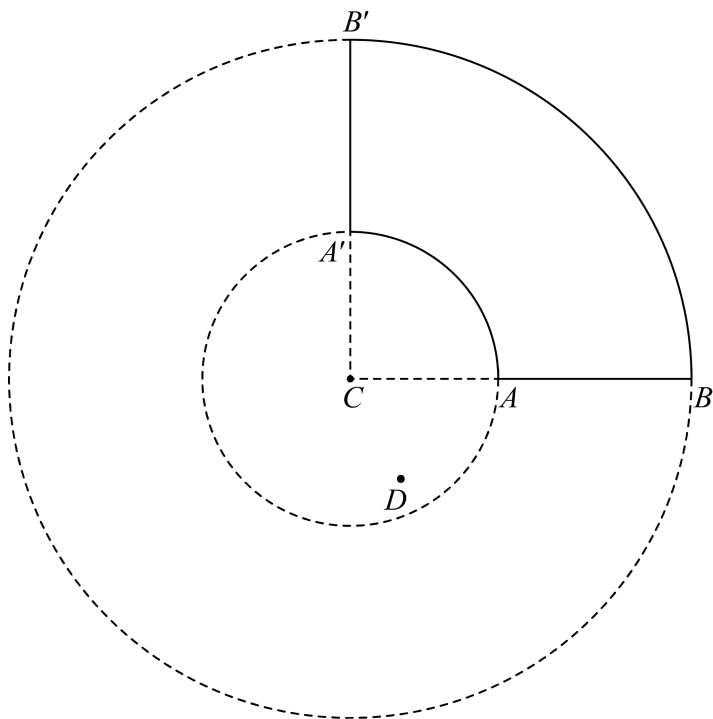
【解析】

【分析】 本题考查了两点间的距离, 旋转, 扇形的面积等知识, 解题的关键是:

- (1) 画出旋转后的图形, 利用扇形面积公式, 计算两个扇形面积之差即线段扫过的面积;
- (2) 画出旋转后的图形, 利用扇形面积公式, 计算两个扇形面积之差即线段扫过的面积, 再把 c, d 的值代入计算即可.

【小问 1 详解】

解：旋转后的图形如图所示：

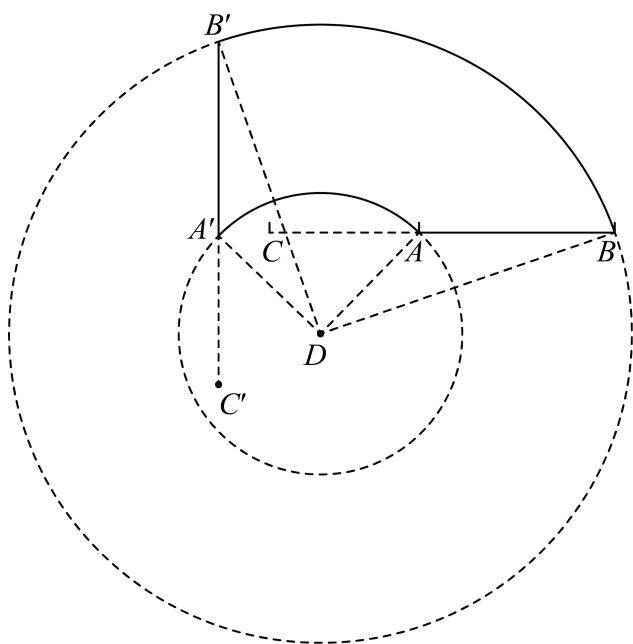


线段扫过的面积为 $S_{\text{扇形}CBB'} - S_{\text{扇形}CAA'}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{90\pi CB^2}{360} - \frac{90\pi CA^2}{360} \\
 &= \frac{90\pi (a+b)^2}{360} - \frac{90\pi b^2}{360} \\
 &= \frac{\pi}{4} (a^2 + 2ab);
 \end{aligned}$$

【小问 2 详解】

解：旋转后的图形如图所示：



由旋转知： $S_{\triangle A'B'D} = S_{\triangle ABD}$ ，

$\therefore$ 线段扫过的面积为 $S_{\text{扇形}DBB'} + S_{\triangle A'B'D} - S_{\text{扇形}DAA'} - S_{\triangle ABD}$

$= S_{\text{扇形}DBB'} - S_{\text{扇形}DAA'}$ ；

$$= \frac{90\pi DB^2}{360} - \frac{90\pi DA^2}{360}$$

$$= \frac{\pi}{4}(d^2 - c^2)；$$

当 $c = 1$ ， $d = \frac{5}{2}$ 时，

$$\text{扫过的面积} = \frac{\pi}{4} \left[\left(\frac{5}{2} \right)^2 - 1^2 \right]$$

$$= \frac{21\pi}{16} .$$

27. 2024 年 4 月第七批上海市非物质文化遗产代表性项目名录发布，青浦有 2 个非遗项目入选，其中一项是

“水印版画”。为宣传非遗文化，学校开设了“水印版画”社团，计划采购 A、B 两种套装的工具，已知某商店 A 种套装的工具的标价比 B 种套装的工具的标价高 30%，如果用 1300 元购买 A 种套装的数量比用 3000 元购买 B 种套装的数量少 20 套，那么 A 种、B 种套装的标价分别为多少元？

【答案】 A 款套装的单价是 130 元，B 款套装的单价是 100 元

【解析】

【分析】 本题考查的是分式方程的应用，设 B 款套装的单价是 x 元，则 A 款套装的单价是 $(1 + 30\%)x$ 元，

利用“用 1300 元购买的 A 款套装数量比用 3000 元购买的 B 款套装数量少 20 套”再建立方程求解即可.

【详解】解：设 B 款套装的单价是 x 元，则 A 款套装的单价是 $(1+30\%)x$ 元，

$$\text{根据题意，得 } \frac{1300}{(1+30\%)x} = \frac{3000}{x} - 20,$$

解得 $x = 100$,

经检验， $x = 100$ 是该分式方程的解，

$$\therefore (1+30\%)x = 130,$$

答：A 款套装的单价是 130 元，B 款套装的单价是 100 元.

28. 【问题提出】唐朝诗人李欣的诗《古从军行》开头两句说：“白日登山望烽火，黄昏饮马傍交河。”诗中隐含着一个有趣的数学问题. 如图所示，诗中将军在观望烽火之后从山脚下的 A 点出发，走到河边饮马后再到 B 点宿营. 请问怎样走才能使总的路程最短？大数学家海伦曾用轴对称的方法巧妙的解决了这个问题.

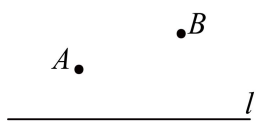


图1

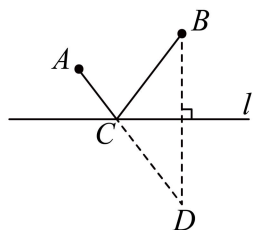


图2

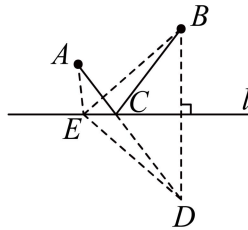


图3

【解决问题】如图 2，作 B 关于直线 l 的对称点 D ，连接 AD 与直线 l 交于点 C ，点 C 就是所求的位置.

证明过程如下：如图 3，在直线 l 上另取任一点 E ，连接 AE ， BE ， DE ，

因为直线 l 是点 B ， D 的对称轴，点 C ， E 在直线 l 上，

所以 $CB = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $BE = \underline{\hspace{2cm}}$.

所以 $AC + CB = AC + CD = \underline{\hspace{2cm}}$.

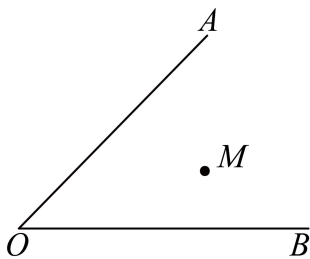
因为在 $\triangle ADE$ 中， $AD < AE + DE$ （三角形的两边之和大于第三边）

所以 $AC + CB < AE + DE$ ，即 $AC + CB$ 最小.

本问题实际上是利用了轴对称变换的思想，把 A，B 在直线同侧的问题转化为在直线的两侧，从而可利用

“两点之间线段最短”，即“三角形两边之和大于第三边”的问题加以解决（其中 C 在 AD 与直线 l 的交点上，即 A，C，B 三点共线），本问题可归纳为“求定直线上一动点与直线外两定点的距离和的最小值”的问题的数学模型.

【拓展延伸】如图所示，点 M 是锐角 AOB 内部的一点. 请你在边 OA 和边 OB 上分别找到点 P ， Q ，使得 $\triangle MPQ$ 的周长最小.



【答案】[解决问题] CD ， DE ， AD ； [拓展延伸]见解析

【解析】

【分析】 本题主要考查了轴对称的性质、三角形三边的关系、以及两点之间线段最短等知识，利用轴对称的性质对线段进行转化是解题的关键.

[解决问题]利用“两点之间线段最短”，即“三角形两边之和大于第三边”的问题加以解决；

[拓展延伸]作出点 M 关于 OA 的对称点 M' ，点 M 关于 OB 的对称点 M'' ，连接 $M'M''$ ，交 OA 于 P ，交 OB 于 Q ，根据两点之间线段最短， P 、 Q 即为所求.

【详解】[解决问题]

证明：如图 3，在直线 l 上另取任一点 E ，连接 AE ， BE ， DE ，

因为直线 l 是点 B ， D 的对称轴，点 C ， E 在直线 l 上，

所以 $CB = CD$ ， $BE = DE$.

所以 $AC + CB = AC + CD = AD$.

因为在 $\triangle ADE$ 中， $AD < AE + DE$ （三角形的两边之和大于第三边）

所以 $AC + CB < AE + DE$ ，即 $AC + CB$ 最小.

故答案为： CD ， DE ， AD ；

[拓展延伸]

解：如图所示，作出点 M 关于 OA 的对称点 M' ，点 M 关于 OB 的对称点 M'' ，连接 $M'M''$ ，交 OA 于 P ，交 OB 于 Q ，此时 $\triangle MPQ$ 的周长最小.

