

2024 学年第一学期期末质量调研卷

七年级数学学科

(时间: 90 分钟 分值: 100 分)

一、填空题 (本大题共 14 题, 每小题 2 分, 满分 28 分)

1. 单项式 $-\frac{x^2y}{3}$ 的系数是_____.

【答案】 $-\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了单项式系数的定义, 单项式中数字因数叫做单项式的系数, 据此可得答案.

【详解】 解: 单项式 $-\frac{x^2y}{3}$ 的系数是 $-\frac{1}{3}$,

故答案为: $-\frac{1}{3}$.

2. 已知单项式 $-5x^{m+2}y^3$ 和 $7xy^n$ 是同类项, 那么 $mn =$ _____.

【答案】 -3

【解析】

【分析】 本题考查同类项的概念及代数式求值, 熟记同类项的概念是解题的关键. 根据同类项: 所含字母相同, 并且相同字母的指数也相同, 可得出关于 m 和 n 的方程, 解出即可得出 m 和 n 的值, 进而代入可得出 mn 的值.

【详解】 解: $\because$ 单项式 $-5x^{m+2}y^3$ 和 $7xy^n$ 是同类项,

$$\therefore m+2=1, \quad n=3,$$

$$\therefore m=-1,$$

$$\therefore mn=-1 \times 3=-3,$$

故答案为: -3 .

3. 计算: $a \div a^{-1} \div a =$ _____.

【答案】 a

【解析】

【分析】 本题主要考查同底数幂的除法, 根据同底数幂的除法法则进行计算即可得到答案.

【详解】 解: $a \div a^{-1} \div a = a^{1-(-1)-1} = a,$

故答案为: a .

4. 因式分解: $16x^3 - 9xy^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x(4x+3y)(4x-3y)$

【解析】

【分析】 本题主要考查因式分解, 合理的选择因式分解的方法是解题的关键. 利用提取公因式法和公式法直接因式分解即可.

【详解】 解: $16x^3 - 9xy^2 = x(16x^2 - 9y^2) = x(4x+3y)(4x-3y)$,

故答案为: $x(4x+3y)(4x-3y)$.

5. 计算: $(2a^3x^2 - a^2x^3 + 3ax^2) \div \frac{1}{3}ax^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $6a^2 - 3ax + 9$

【解析】

【分析】 本题考查了整式的除法运算, 熟练掌握运算法则是解题的关键, 根据多项式除以单项式的运算法则计算即可.

【详解】 解: $(2a^3x^2 - a^2x^3 + 3ax^2) \div \frac{1}{3}ax^2 = 6a^2 - 3ax + 9$,

故答案为: $6a^2 - 3ax + 9$.

6. 计算: $a^{n+1} \cdot (-a) + (-3a)^2 \cdot a^n = \underline{\hspace{2cm}}$. (n 是整数)

【答案】 $8a^{n+2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了积的乘方计算, 同底数幂乘法计算, 先计算积的乘方, 再计算同底数幂乘法, 最后合并同类项即可得到答案.

【详解】 解: $a^{n+1} \cdot (-a) + (-3a)^2 \cdot a^n$

$$= -a^{n+2} + 9a^2 \cdot a^n$$

$$= -a^{n+2} + 9a^{n+2}$$

$$= 8a^{n+2},$$

故答案为: $8a^{n+2}$.

7. 当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 分式 $\frac{9-x^2}{x-3}$ 的值为零.

【答案】 -3

【解析】

【分析】 本题考查了分式值为零的条件, 根据分式的值为零时, 分子为零且分母不为零, 即可求解.

【详解】 解: $\because$ 分式 $\frac{9-x^2}{x-3}$ 的值为零,

$$\therefore 9-x^2=0, \text{ 且 } x-3 \neq 0,$$

解得: $x=-3$,

故答案为: -3 .

8. 计算: $\frac{3}{a^2-9} - \frac{a}{9-a^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{a-3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了分式的减法计算, 直接根据分式的减法计算法则求解即可.

【详解】 解: $\frac{3}{a^2-9} - \frac{a}{9-a^2}$

$$= \frac{3+a}{(a+3)(a-3)}$$

$$= \frac{1}{a-3},$$

故答案为: $\frac{1}{a-3}$.

9. 计算: $8^6 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{17} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题考查了有理数的乘方运算, 积的乘方的逆用, 解题的关键是掌握相关知识. 将所求式子变形为 $8^6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^5$, 再利用积的乘方的逆用求解即可.

【详解】 解: $8^6 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{17}$

$$= 8^6 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^6 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^6 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^5$$

$$= 8^6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^5$$

$$= \left(8 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right)^6 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^5$$

$$= 2^6 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^5$$

$$= 2 \times 2^5 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^5$$

$$= 2 \times \left(-\frac{1}{2} \times 2\right)^5$$

$$= 2 \times (-1)$$

$$= -2;$$

故答案为：-2.

10. 已知 $(x+m)(x-3) = x^2 - 4x + n$ ，那么 $m+n =$ _____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查了整式的乘法运算，解题的关键是掌握多项式乘多项式的运算法则．先计算出 $(x+m)(x-3)$ ，再根据 $(x+m)(x-3) = x^2 - 4x + n$ ，可得 $m-3 = -4$ ， $-3m = n$ ，求出 m 、 n ，即可求解.

【详解】 解： $(x+m)(x-3) = x^2 - 3x + mx - 3m = x^2 + (m-3)x - 3m$ ，

$$\therefore (x+m)(x-3) = x^2 - 4x + n,$$

$$\therefore m-3 = -4, \quad -3m = n,$$

$$\text{解得： } m = -1, \quad n = 3,$$

$$\therefore m+n = -1+3 = 2,$$

故答案为：2.

11. 如果 $x-2y+2=0$ ，那么 $\frac{1}{4}x^2 - xy + y^2 - 3 =$ _____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题主要考查代数式求值，先把 $x-2y+2=0$ 变形为 $x-2y=-2$ ，再把 $\frac{1}{4}x^2-xy+y^2-3$ 变形为 $\frac{1}{4}(x-2y)^2-3$ ，再整体代入进行计算即可.

【详解】 解： $\because x-2y+2=0$,

$$\therefore x-2y=-2,$$

$$\therefore \frac{1}{4}x^2-xy+y^2-3$$

$$= \frac{1}{4}(x^2-4xy+4y^2)-3$$

$$= \frac{1}{4}(x-2y)^2-3$$

$$= \frac{1}{4} \times (-2)^2-3$$

$$= \frac{1}{4} \times 4-3$$

$$= 1-3$$

$$= -2;$$

故答案为： -2.

12. 若关于 x 的方程 $\frac{mx+1}{x-4}+2=\frac{1}{x-4}$ 无解，则 m 的值为_____.

【答案】 0或-2

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程无解的问题，分式方程无解分为分式方程有增根、化简后的整式方程无解两种情况，据此即可求解.

【详解】 解： $\frac{mx+1}{x-4}+2=\frac{1}{x-4}$

方程两边同时乘以 $x-4$ 得： $mx+1+2(x-4)=1$,

$$\text{解得： } x=\frac{8}{m+2},$$

$\because$ 关于 x 的方程 $\frac{mx+1}{x-4}+2=\frac{1}{x-4}$ 无解，

$$\therefore m+2=0 \text{ 或 } x-4=0,$$

$$\therefore m=-2, \quad x=4,$$

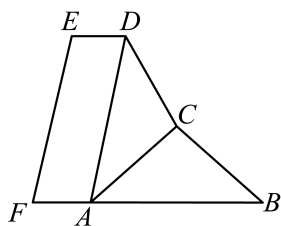
当 $x = 4$ 时, $4 = \frac{8}{m+2}$,

解得: $m = 0$,

综上所述: m 的值为 0 或 -2 ,

故答案为: 0 或 -2 .

13. 如图, 将 $\triangle ABC$ 沿 AC 所在的直线翻折后, 使点 B 落在点 D 处, 再将线段 AD 沿着射线 BA 向左平移若干单位长度得到 FE , 如果四边形 $ADEF$ 的周长是 10 , 那么 $BF =$ _____.



【答案】 5

【解析】

【分析】 本题主要考查了平移的性质, 折叠的性质, 先由平移的性质得到 $EF = AD$, $DE = AF$, 再由四边形周长计算公式推出 $AF + AD = 5$, 进一步由折叠的性质得到 $AD = AB$, 据此根据线段的和差关系可得答案.

【详解】 解: 由平移的性质可得 $EF = AD$, $DE = AF$,

$\because$ 四边形 $ADEF$ 的周长是 10 ,

$$\therefore AD + DE + EF + AF = 10,$$

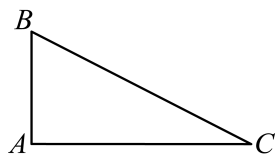
$$\therefore AF + AD = 5,$$

由折叠的性质可得 $AD = AB$,

$$\therefore BF = AB + AF = AD + AF = 5,$$

故答案为: 5 .

14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, 如果将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转得到 $\triangle ADE$, 点 D 、 E 分别与点 B 、 C 对应, 如果 $\angle DAC : \angle EAC = 1 : 3$, 那么旋转角 (大于 0° 且小于 180°) 的大小为 _____ $^\circ$.



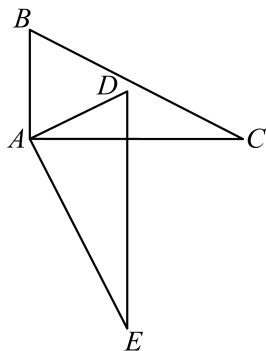
【答案】 67.5 或 135

【解析】

【分析】 本题主要考查了旋转的性质, 分点 D 在 AC 上方, 点 D 在 AC 下方两种情况, 根据角的和差关系

分别求出 $\angle BAD$ 的度数即可得到答案.

【详解】解：如图所示，当点 D 在 AC 上方时，



由旋转的性质可得 $\angle DAE = \angle BAC = 90^\circ$,

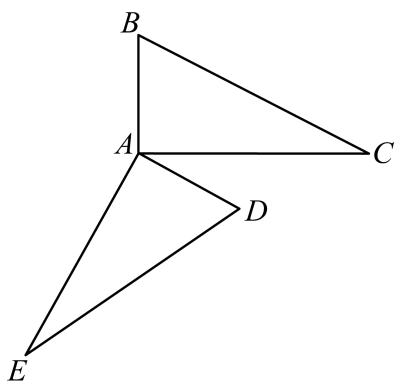
$$\therefore \angle DAC : \angle EAC = 1 : 3,$$

$$\therefore \angle DAC = \frac{1}{1+3} \angle DAE = 22.5^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle BAC - \angle DAC = 67.5^\circ,$$

$\therefore$ 旋转角的大小为 67.5° ;

如图所示，当点 D 在 AC 下方时，



由旋转的性质可得 $\angle DAE = \angle BAC = 90^\circ$,

$$\therefore \angle DAC : \angle EAC = 1 : 3,$$

$$\therefore \angle DAC : \angle DAC = 1 : 2,$$

$$\therefore \angle CAD = 45^\circ$$

$$\therefore \angle BAD = \angle BAC + \angle DAC = 135^\circ,$$

$\therefore$ 旋转角的大小为 135° ;

综上所述，旋转角的大小为 67.5° 或 135° ;

故答案为：67.5 或 135.

二、选择题（本大题共 4 题，每小题 3 分，满分 12 分）

15. 下列运算中，正确的是（ ）

A. $a^2 + a^2 = 2a^4$

B. $(-3x)^3 = -9x^3$

C. $a^6 \cdot a^4 = a^{10}$

D. $(-a^2)^3 = a^5$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了积的乘方计算，幂的乘方计算，同底数幂乘法计算，合并同类项，根据相关计算法则求出对应选项中式子的结果即可得到答案.

【详解】解：A、 $a^2 + a^2 = 2a^2$ ，原式计算错误，不符合题意；

B、 $(-3x)^3 = -27x^3$ ，原式计算错误，不符合题意；

C、 $a^6 \cdot a^4 = a^{10}$ ，原式计算正确，符合题意；

D、 $(-a^2)^3 = -a^6$ ，原式计算错误，不符合题意；

故选：C.

16. 下列分式中，是最简分式的是（ ）

A. $\frac{1-x}{3x-3}$

B. $\frac{x+y}{x^2+y^2}$

C. $\frac{3ab}{5a^2}$

D. $\frac{a-3}{a^2-9}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了最简分式的定义，若一个分式的分子和分母没有公共的因式和因数，那么这个分式就叫做最简分式，据此可得答案.

【详解】解：A、 $\frac{1-x}{3x-3} = \frac{1-x}{3(x-1)} = -\frac{1}{3}$ ，原分式不是最简分式，不符合题意；

B、 $\frac{x+y}{x^2+y^2}$ 是最简分式，符合题意；

C、 $\frac{3ab}{5a^2} = \frac{3b}{5a}$ ，原分式不是最简分式，不符合题意；

D、 $\frac{a-3}{a^2-9} = \frac{a-3}{(a+3)(a-3)} = \frac{1}{a+3}$ ，原分式不是最简分式，不符合题意；

故选：B.

17. 平行四边形、等边三角形、正方形、圆、长方形中，是轴对称图形但不是中心对称图形的个数有（ ）

A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

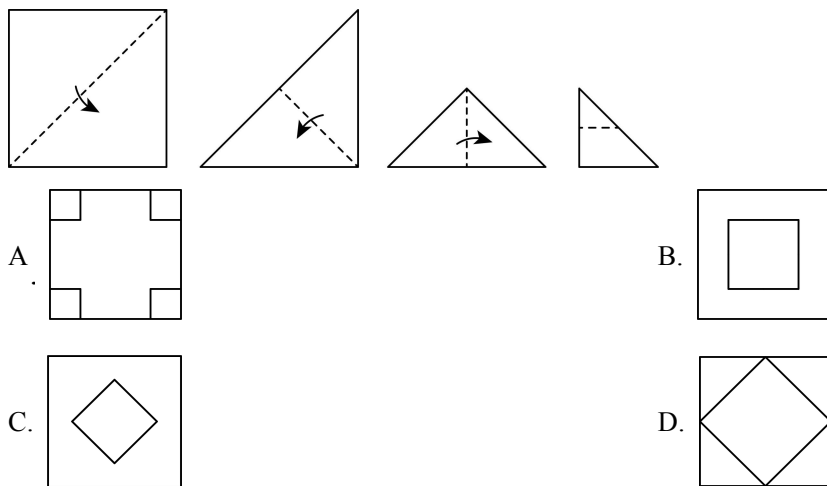
【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了中心对称图形与轴对称图形的概念：轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分沿对称轴折叠后可重合；中心对称图形是要寻找对称中心，旋转180度后与原图重合．根据轴对称图形与中心对称图形的概念求解．

【详解】解：平行四边形是中心对称图形但不是轴对称图形，
等边三角形是轴对称图形，不是中心对称图形，
正方形、长方形、圆既是轴对称图形，又是中心对称图形，
故选：A．

18. “一把剪刀蕴神技，一方红纸酿年味”，剪纸是中国传统的民间艺术，是中国的非物质文化遗产，随着社会的发展形成了一定特征的数学文化．如图，小明在剪纸活动中，将一张长方形纸片对折三次后，沿着成线剪去一个角，再打开后的形状是（　　）

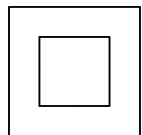


【答案】B

【解析】

【分析】本题考查剪纸问题，动手操作判断即可．

【详解】解：将一张长方形纸片对折三次后，沿着虚线剪去一个角，再打开后的形状是：



故选：B．

三、简答题（本大题共6题，每小题6分，满分36分）

19. 计算: $(-x+1)(x+1)-(x-3)(3x+1)$

【答案】 $-4x^2+8x+4$

【解析】

【分析】 本题主要考查了整式的混合计算, 先根据平方差公式和多项式乘以多项式的计算法则去括号, 然后合并同类项即可得到答案.

【详解】 解: $(-x+1)(x+1)-(x-3)(3x+1)$
 $= -x^2+1-(3x^2-9x+x-3)$
 $= -x^2+1-3x^2+9x-x+3$
 $= -4x^2+8x+4.$

20. 计算: $(xy^{-1}-x^{-1}y)\div(x^{-1}-y^{-1})$ (结果不含负整数指数幂)

【答案】 $-x-y$

【解析】

【分析】 本题主要考查了负整数指数幂, 分式的混合计算, 先把负整数指数幂化为分式的形式, 再根据分式的混合计算法则求解即可.

【详解】 解: $(xy^{-1}-x^{-1}y)\div(x^{-1}-y^{-1})$
 $=\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)\div\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$
 $=\frac{x^2-y^2}{xy}\div\frac{y-x}{xy}$
 $=\frac{(x+y)(x-y)}{xy}\cdot\frac{xy}{y-x}$
 $=-x-y.$

21. 因式分解: $(x^2-2x)^2-6(x^2-2x)+9$

【答案】 $(x-3)^2(x+1)^2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了分解因式, 先利用完全平方公式分解因式, 再利用十字相乘法分解因式即可.

【详解】解： $(x^2 - 2x)^2 - 6(x^2 - 2x) + 9$

$$= (x^2 - 2x - 3)^2$$

$$= [(x - 3)(x + 1)]^2$$

$$= (x - 3)^2 (x + 1)^2.$$

22. 因式分解： $x^2 - x - 2y - 4y^2$

【答案】 $(x + 2y)(x - 2y - 1)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解因式，先分组得到 $(x^2 - 4y^2) - (x + 2y)$ ，再利用平方差公式和提公因式法分解因式即可.

【详解】解： $x^2 - x - 2y - 4y^2$

$$= (x^2 - 4y^2) - (x + 2y)$$

$$= (x + 2y)(x - 2y) - (x + 2y)$$

$$= (x + 2y)(x - 2y - 1).$$

23. 先化简： $\left(\frac{5}{x-2} - x - 2\right) \div \frac{x^2 - 2x - 3}{x-2}$ ，然后从 $-1 \leq x \leq 3$ 中选一个合适的整数作为 x 的值代入求值.

【答案】 $-\frac{x+3}{x+1}$ ，当 $x=0$ 时，原式 $= -3$ ；当 $x=1$ 时，原式 $= -2$.

【解析】

【分析】 本题主要考查了分式的化简求值，先把小括号内的式子通分，再把除法变成乘法后约分化简，最后根据分式有意义的条件确定整数 x 的值，进而代值计算即可得到答案.

【详解】解： $\left(\frac{5}{x-2} - x - 2\right) \div \frac{x^2 - 2x - 3}{x-2}$

$$= \frac{5 - x^2 + 2x - 2x + 4}{x-2} \div \frac{(x-3)(x+1)}{x-2}$$

$$= \frac{9 - x^2}{x-2} \cdot \frac{x-2}{(x-3)(x+1)}$$

$$= \frac{(3+x)(3-x)}{x-2} \cdot \frac{x-2}{(x-3)(x+1)}$$

$$= -\frac{x+3}{x+1},$$

∴ 分式有意义,

$$\therefore \begin{cases} (x-3)(x+1) \neq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases},$$

$$\therefore x \neq -1 \text{ 且 } x \neq 2 \text{ 且 } x \neq 3,$$

$$\therefore \text{当 } x=0 \text{ 时, 原式} = -\frac{0+3}{0+1} = -3;$$

$$\text{当 } x=1 \text{ 时, 原式} = -\frac{1+3}{1+1} = -2.$$

$$24. \text{ 解方程: } \frac{3}{x} - \frac{4}{x-1} = \frac{2}{x-x^2}$$

【答案】 $x = -1$

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程, 解题的关键是掌握分式方程的解法. 根据去分母、去括号、合并同类项、化系数为 1, 即可求解.

【详解】 解: $\frac{3}{x} - \frac{4}{x-1} = \frac{2}{x-x^2}$

$$\frac{3}{x} - \frac{4}{x-1} = \frac{2}{x(1-x)}$$

$$3(1-x) + 4x = 2$$

$$3 - 3x + 4x = 2$$

$$x = 2 - 3$$

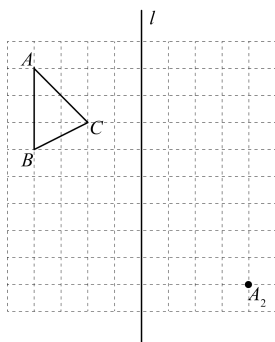
$$x = -1$$

经检验, $x = -1$ 是原方程的解,

$$\therefore x = -1.$$

四、解答题 (本大题共 4 题, 每小题 6 分, 满分 24 分)

25. 在如图所示的方格中, 每个小方格都是边长为 1 个单位的正方形, ABC 的三个顶点都在格点上 (每个小方格的顶点叫格点)



- (1) 画出 ABC 向右平移 2 个单位，再向下平移 4 个单位后的 $\triangle A_1B_1C_1$ ；
- (2) 如果点 A 与点 A_2 关于某点成中心对称，请标出这个对称中心点 O ，并画出 ABC 关于点 O 成中心对称的 $\triangle A_2B_2C_2$ ；
- (3) 画出 ABC 关于直线 l 成轴对称的图形 $\triangle A_3B_3C_3$ 。

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

(3) 见解析

【解析】

【分析】本题主要考查了画平移图形，画中心对称图形和画轴对称图形：

- (1) 根据平移方式确定 A 、 B 、 C 对应点 A_1 、 B_1 、 C_1 的位置，描出 A_1 、 B_1 、 C_1 ，再顺次连接 A_1 、 B_1 、 C_1 即可；
- (2) 由中心对称图形的性质可得 O 是 AA_2 的中点，据此确定点 O 的位置，再连接 CO 并延长到 C_2 使得 $C_2O = CO$ ，同理作出 B_2 ，再顺次连接 A_2 、 B_2 、 C_2 ；
- (3) 根据轴对称图形的特点，找到 A 、 B 、 C 对应点 A_3 、 B_3 、 C_3 的位置，描出 A_3 、 B_3 、 C_3 并顺次连接 A_3 、 B_3 、 C_3 即可。

【小问 1 详解】

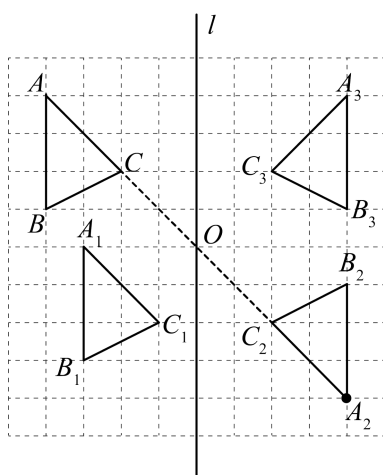
解：如图所示， $\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求；

【小问 2 详解】

解：如图所示，点 O 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 即为所求；

【小问 3 详解】

解：如图所示， $\triangle A_3B_3C_3$ 即为所求。



26. 进入防汛期后，某地驻军在河堤加固的工程中出色完成任务，下面是记者与驻军工程指挥官的对话：记者：“你们是用 11 天时间完成 5400 米长的大坝加固任务的？”驻军指挥官：“是的，我们加固 1200 米后，采用新的加固模式，这样每天加固长度是原来的 2 倍。”根据对话，求该驻军原来每天加固河堤多少米？

【答案】该地驻军原来每天加固 300 米

【解析】

【分析】 本题主要考查分式方程的实际应用，找出等量关系，列出分式方程，是解题的关键。设该地驻军原来每天加固 x 米，根据“用 11 天完成 5400 米长的大坝加固任务”，列出分式方程，即可求解。

【详解】解：设该地驻军原来每天加固 x 米，根据题意，得：

$$\frac{1200}{x} + \frac{5400 - 1200}{2x} = 11,$$

解得： $x = 300$,

经检验： $x = 300$ 是原方程的解，符合题意。

答：该地驻军原来每天加固 300 米。

27. 阅读材料：我们知道，分子比分母小的分数叫做“真分数”；分子比分母大，或者分子、分母同样大的分数，叫做“假分数”。类似的，我们定义：在分式中，对于只含有一个字母的分式，当分子的次数大于或等于分母的次数时，我们称之为“假分式”；当分子的次数小于分母的次数时，我们称之为“真分式”。例

如： $\frac{x-1}{x+1}$ 、 $\frac{x^2}{x-1}$ 这样的分式就是假分式；如： $\frac{3}{x+1}$ 、 $\frac{2x}{x^2+1}$ 这样的分式就是真分式，假分数 $\frac{7}{4}$ 可以化成

$1 + \frac{3}{4}$ （即 $1\frac{3}{4}$ ）带分数的形式，类似的；假分式也可以化为带分式（即整式与真分式相加）。

$$\text{如： } \frac{x-1}{x+1} = \frac{(x+1)-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}; \quad \frac{x^2}{x-1} = \frac{(x^2-1)+1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} + \frac{1}{x-1} = x+1 + \frac{1}{x-1}.$$

根据上面材料回答下列问题：

(1) 分式 $\frac{3}{x}$ 是_____；(填“真分式”或“假分式”)

(2) 假分式 $\frac{x+6}{x+4}$ 可化为带分式形式_____；如果分式 $\frac{x+6}{x+4}$ 的值为整数，则满足条件的整数 x 是_____；

(3) 将假分式 $\frac{x^2-6x+4}{x-3}$ 化为带分式.

【答案】(1) 真分式 (2) $1+\frac{2}{x+4}$ ； $x=-3$ 或 $x=-5$ 或 $x=-6$ 或 $x=-2$ ；

(3) $x-3-\frac{5}{x-3}$

【解析】

【分析】本题主要考查了分式的约分：

(1) 根据当分子的次数小于分母的次数时，我们称之为“真分式”，假分式化为带分式的方法，即可求解；

(2) 仿照题意可得 $\frac{x+6}{x+4}=1+\frac{2}{x+4}$ ，则 $\frac{2}{x+4}$ 是整数，据此可得 $x+4=\pm 1$ 或 $x+4=\pm 2$ ，解之即可得到答案；

(3) 把原式先变形为 $\frac{x^2-6x+9-5}{x-3}$ ，再仿照题意进行求解即可.

【小问1详解】

解：由题意得，分式 $\frac{3}{x}$ 是真分式；

【小问2详解】

解： $\frac{x+6}{x+4}=\frac{x+4+2}{x+4}=1+\frac{2}{x+4}$ ；

$\therefore \frac{x+6}{x+4}$ 的值是整数，

$\therefore 1+\frac{2}{x+4}$ 是整数，

$\therefore \frac{2}{x+4}$ 是整数，

$\therefore x+4=\pm 1$ 或 $x+4=\pm 2$ ，

$\therefore x=-3$ 或 $x=-5$ 或 $x=-6$ 或 $x=-2$ ；

【小问3详解】

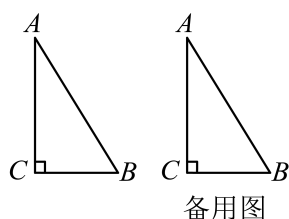
解： $\frac{x^2-6x+4}{x-3}$

$=\frac{x^2-6x+9-5}{x-3}$

$$= \frac{(x-3)^2 - 5}{x-3}$$

$$= x-3 - \frac{5}{x-3}.$$

28. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC = a$, $AC = b$, ($b > a > 0$), 如果将 $\triangle ABC$ 绕点 B 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle A_1BC_1$, 将 $\triangle ABC$ 沿着射线 CB 方向平移得到 $\triangle A_2B_2C_2$.



(1) 画出 $\triangle A_1BC_1$.

(2) 若平移的距离为 a .

①求四边形 $A_1A_2C_2B_2$ 的面积 S_1 . (用 a, b 的代数式表示).

②若四边形 $A_1A_2C_2B_2$ 的面积为 20, $\triangle ABC$ 的面积为 6, 求平移的距离.

(3) 若 $\triangle A_1A_2C_2$ 的面积和 $\triangle A_1C_2B_2$ 的面积相等, 直接写出平移的距离. (用 a, b 的代数式表示)

【答案】(1) $\triangle A_1BC_1$

(2) ① $\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$; ② 2

(3) $a + b - \frac{a^2}{b}$ 或 $a + b + \frac{a^2}{b}$

【解析】

【分析】本题主要考查了画旋转图形, 平移的性质, 完全平方公式的变形求值, 解二元一次方程组:

(1) 根据画旋转图形的方法作图即可;

(2) ①证明点 C_2 与点 B 重合, A_2, C_1, B 三点共线, 再根据 $S_1 = S_{\triangle A_1C_1A_2} + S_{\text{四边形}A_1C_1BB_2}$ 列式求解即可; ②

根据题意可得 $\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 = 20$, $\frac{1}{2}ab = 6$, 再根据完全平方公式的变形得到 $(a+b)^2 = 64$, $(a-b)^2 = 16$,

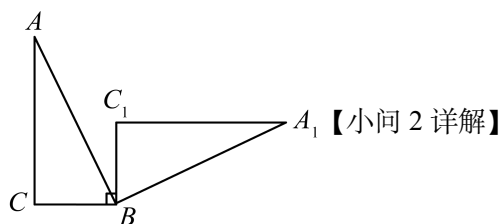
则 $\begin{cases} a+b=8 \\ b-a=4 \end{cases}$, 解方程组即可得到答案;

(3) 求出 $S_{\triangle A_1A_2C_2} = S_{\triangle A_1C_2B_2} = \frac{1}{2}a^2$, 则根据三角形面积计算公式可得 A_1 到 A_2C_2 的距离为 $h = \frac{a^2}{b}$, 据此可得

答案.

【小问 1 详解】

解: 如图所示, A_1BC_1 即为所求;



【小问 2 详解】

解: ①由平移的性质可得 $B_2C_2 = a = BC$, $A_2C_2 = AC = b$, $\angle A_2B_2C_2 = \angle C = 90^\circ$,

$\therefore$ 点 C_2 与点 B 重合,

由旋转的性质可得 $BC_1 = BC = a$, $A_1C_1 = AC = b$, $\angle CBC_1 = \angle A_1C_1B = 90^\circ$,

$\therefore A_2, C_1, B$ 三点共线,

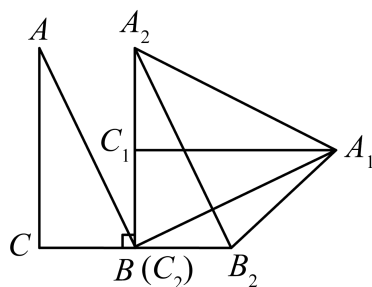
$\therefore A_2C_1 = A_2B - BC_1 = b - a$,

$\therefore S_1 = S_{\triangle A_1C_1A_2} + S_{\text{四边形}A_1C_1BB_2}$

$$= \frac{1}{2}b(b-a) + \frac{a+b}{2} \cdot a$$

$$= \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}ab$$

$$= \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2;$$



② $\because$ 四边形 $A_1A_2C_2B_2$ 的面积为 20, ABC 的面积为 6,

$$\therefore \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 = 20, \quad \frac{1}{2}ab = 6,$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 40, \quad ab = 12,$$

$$\therefore (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 64, \quad (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = 16,$$

$$\therefore b > a > 0,$$

$$\therefore \begin{cases} a+b=8 \\ b-a=4 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} a=2 \\ b=6 \end{cases},$$

$\therefore$ 平移距离为 2;

【小问 3 详解】

解：由平移的性质可得 $B_2C_2 = BC = a$,

由旋转的性质可得 $BC_1 = BC = a$, $A_1C_1 = AC = b$, $\angle CBC_1 = \angle A_1C_1B = 90^\circ$,

$$\therefore A_1C_1 \parallel B_2C_2,$$

$$\therefore S_{\triangle A_1C_2B_2} = \frac{1}{2} B_2C_2 \cdot BC_1 = \frac{1}{2} a^2,$$

$\therefore \triangle A_1A_2C_2$ 的面积和 $\triangle A_1C_2B_2$ 的面积相等,

$$\therefore S_{\triangle A_1A_2C_2} = \frac{1}{2} a^2;$$

设 A_1 到 A_2C_2 的距离为 h ,

$$\therefore \frac{1}{2} bh = \frac{1}{2} a^2,$$

$$\therefore h = \frac{a^2}{b},$$

$$\therefore \text{平移的距离为 } a+b-\frac{a^2}{b} \text{ 或 } a+b+\frac{a^2}{b}.$$