

2024-2025 学年上海市长宁区七年级（上）期末数学试卷

一、选择题：本题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 下列各代数式中是五次单项式的是（ ）

A. $5a^3b$

B. 3^2a^2b

C. $-a^2b^3$

D. $9a^2 + b^3$

【答案】C

【解析】

【分析】根据单项式的次数及定义逐个判断即可得到答案．

【详解】解： $5a^3b$ 是 4 次单项式，故 A 不符合题意；

3^2a^2b 是 3 次单项式，故 B 不符合题意；

$-a^2b^3$ 是 5 次单项式，故 C 符合题意；

$9a^2 + b^3$ 是多项式，故 D 不符合题意；

故选：C．

【点睛】本题考查单项式的定义及次数：数与字母的积叫单项式，所有字母指数和为单项式的次数．

2. 下列运算正确的是（ ）

A. $2a^2 - a^2 = 1$

B. $(ab^2)^2 = ab^4$

C. $a^2 \cdot a^3 = a^5$

D. $a^8 \div a^4 = a^2$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查整式的运算，根据合并同类项，积的乘方，同底数幂的乘法和除法法则，进行计算即可．

【详解】解：A、 $2a^2 - a^2 = a^2$ ，原选项计算错误；

B、 $(ab^2)^2 = a^2b^4$ ，原选项计算错误；

C、 $a^2 \cdot a^3 = a^5$ ，原选项计算正确；

D、 $a^8 \div a^4 = a^4$ ，原选项计算错误；

故选 C．

3. 下列说法正确的是（ ）

A. $\frac{2\pi a^2}{3}$ 的系数是 $\frac{2}{3}$;

B. $\frac{1}{3x}$ 是单项式;

C. 多项式 $x^2 - 3x + 4$ 的一次项系数是 3;

D. $\frac{5xy}{6}$ 的次数为 2.

【答案】D

【解析】

【分析】利用多项式次数与项数定义以及单项式的次数与系数定义分别判断即可.

【详解】解: A、单项式 $\frac{2\pi a^2}{3}$ 的系数是 $\frac{2\pi}{3}$, 原说法错误, 故此选项不符合题意;

B、 $\frac{1}{3x}$ 不是整式, 原说法错误, 故此选项不符合题意;

C、多项式 $x^2 - 3x + 4$ 的一次项系数是 -3 , 原说法错误, 故此选项不符合题意;

D、 $\frac{5xy}{6}$ 的次数为 2, 原说法正确, 故此选项符合题意;

故选: D.

【点睛】此题考查了多项式, 单项式, 熟练掌握多项式和单项式的相关定义是解本题的关键.

4. 下列各式从左到右的变形是因式分解的是 ()

A. $a(a+b) = a^2 + ab$

B. $a^2 + 2a + 1 = a(a+2) + 1$

C. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

D. $2a^2 - 6ab = 2a(a-3b)$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了因式分解, 解题的关键是理解因式分解的定义. 把一个多项式化为几个最简整式的积的形式, 这种变形叫做把这个多项式因式分解, 也叫作分解因式. 据此作答即可.

【详解】解: A. 等式右边不是乘积形式, 故选项错误, 不合题意;

B. 等式右边不是乘积形式, 故选项错误, 不合题意;

C. 等式右边不是乘积形式, 故选项错误, 不合题意;

D. 符合定义, 故选项正确, 符合题意.

故选: D.

5. 如果将分式 $\frac{a+b}{a^2+b^2}$ 中的 a 和 b 都扩大为原来的 2 倍, 那么分式的值 ()

A. 缩小为原来的 $\frac{1}{2}$

B. 扩大为原来的 4 倍

C. 扩大为原来的 2 倍

D. 缩小为原来的 $\frac{1}{4}$

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查分式的基本性质，分式的分子和分母同时乘以或除以同一个不为 0 的整式，分式的值不变；

先根据题意对分式进行变形，再依据分式的性质进行化简，将化简后的分式与原分式进行对比即可.

【详解】 解：将 a 和 b 都扩大为原来的 2 倍，得 $\frac{2a+2b}{(2a)^2+(2b)^2} = \frac{2a+2b}{4a^2+4b^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a+b}{a^2+b^2}$ ，

故分式的值缩小为原来的 $\frac{1}{2}$ ，

故选：A.

6. 视力表中的字母“E”有各种不同的摆放形式，下面每种组合的两个字母“E”是关于某条直线成轴对称的是（ ）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题主要考查了轴对称的图形，“把一个图形沿某一条直线折叠，如果它能够与另一个图形重合，那么就说这两个图形关于这条直线对称，也称轴对称，这条直线叫做对称轴”。

【详解】 解：ABC 选项中，两个字母“E”不关于某条直线成轴对称，
而 D 选项中，两个字母“E”能沿着直线翻折互相重合，即关于某条直线成轴对称。
故选：D.

二、填空题：本题共 12 小题，每小题 2 分，共 24 分.

7. 已知单项式 $-\frac{4}{3}a^{n+1}b^3$ 与单项式 $3a^2b^{m-2}$ 是同类项，则 $m+n=$ _____.

【答案】 6.

【解析】

【分析】 由这两个单项式为同类项值 a 、 b 的指数相同，故可列出方程即可求解.

【详解】 依题意 $n+1=2, 3=m-2$,

$\therefore n=1, m=5$,

故 $m+n=6$.

【点睛】此题主要考查同类项的定义.

8. 将多项式 $x^2 - y^2 + xy^3 - 2x^3y$ 按字母 x 降幂排列, 结果是_____.

【答案】 $-2x^3y + x^2 + xy^3 - y^2$

【解析】

【分析】按字母 x 降幂排列即按照字母 x 次数从高到低进行排序, 据此求解即可.

【详解】将多项式 $x^2 - y^2 + xy^3 - 2x^3y$ 按字母 x 降幂排列为 $-2x^3y + x^2 + xy^3 - y^2$,

故答案为: $-2x^3y + x^2 + xy^3 - y^2$

【点睛】本题主要考查了多项式的降幂排序, 解题的关键是熟知降幂排序的定义.

9. 若分式 $\frac{2x-1}{x+1}$ 的值为 0, 则 x 的值为_____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】本题主要考查的是分式值为零的条件, 熟练掌握分式值为零的条件是解题的关键. 分式值为零的条件是分子等于零且分母不等于零.

【详解】解: $\frac{2x-1}{x+1}$ 分式的值为 0,

$\therefore x+1 \neq 0$ 且 $2x-1=0$.

解得: $x = \frac{1}{2}$.

故答案为: $\frac{1}{2}$.

10. 计算: $\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x} =$ _____.

【答案】 $\frac{5}{6x}$

【解析】

【分析】先通分再按照同分母分式加减计算即可.

【详解】 $\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{3}{6x} + \frac{2}{6x} = \frac{5}{6x}$

故答案为: $\frac{5}{6x}$.

【点睛】本题考查异分母分式的加减法, 一般先通分把异分母分式化成同分母分式再进行计算.

11. 分解因式: $2m^2n - mn^2 =$ _____.

【答案】 $mn(2m-n)$

【解析】

【分析】 根据分解因式的方法求解即可.

【详解】 $2m^2n - mn^2 = mn(2m - n)$.

故答案为: $mn(2m - n)$.

【点睛】 此题考查了因式分解的方法, 解题的关键是熟练掌握因式分解的方法. 因式分解的方法有: 提公因式法, 平方差公式法, 完全平方公式法, 十字相乘法等.

12. 分解因式: $x^2 - 4y^2 =$ _____.

【答案】 $(x-2y)(x+2y)$

【解析】

【分析】 根据平方差公式分解因式, 即可.

【详解】 解: $x^2 - 4y^2 = (x-2y)(x+2y)$,

故答案是: $(x-2y)(x+2y)$.

【点睛】 本题主要考查因式分解, 掌握平方差公式是解题的关键.

13. 一个多项式减去 $-x^2 + x - 3$ 的差是 $4x^2 - 3x + 4$, 则这个多项式是_____.

【答案】 $3x^2 - 2x + 1$

【解析】

【分析】 本题考查整式加减运算. 根据题意, 由多项式减去 $-x^2 + x - 3$ 的差是 $4x^2 - 3x + 4$ 可得这个多项式为 $(4x^2 - 3x + 4) + (-x^2 + x - 3)$, 去括号、合并同类项即可得到答案.

【详解】 解: $\because$ 多项式减去 $-x^2 + x - 3$ 的差是 $4x^2 - 3x + 4$,

$\therefore$ 这个多项式为 $(4x^2 - 3x + 4) + (-x^2 + x - 3)$

$= 4x^2 - 3x + 4 - x^2 + x - 3$

$= 3x^2 - 2x + 1,$

故答案为: $3x^2 - 2x + 1$.

14. 计算: $(12ax^3 - 27ax) \div (-3ax) =$ _____.

【答案】 $-4x^2 + 9$

【解析】

【分析】 用多项式的每一项除以单项式即可求解.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 } & (12ax^3 - 27ax) \div (-3ax) \\ &= 12ax^3 \div (-3ax) - 27ax \div (-3ax) \\ &= -4x^2 + 9 \end{aligned}$$

【点睛】 本题考查多项式除以单项式, 解题的关键是掌握多项式除以单项式的运算法则.

15. 已知: $2^x \times 16 = 2^7$, 那么 $x =$ _____.

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题考查了同底数幂的乘法, 熟练掌握同底数幂的基本法则是解题的关键. 转化成以 2 为底的幂的乘法, 根据指数相等建立等式计算.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 } & \because 2^x \times 16 = 2^7 \\ & \therefore 2^x \times 2^4 = 2^7 \\ & \therefore 2^{x+4} = 2^7 \\ & \therefore x+4 = 7 \\ & \therefore x = 3. \end{aligned}$$

故答案为: 3.

16. 已知: $a+b=3$, $ab=\frac{2}{3}$, 化简 $(a-1)(b-1)$ 的结果是_____.

【答案】 $-\frac{4}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了整式的混合运算和求值的应用. 先算乘法, 再变形, 最后整体代入求出即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & \because a+b=3, \quad ab=\frac{2}{3}, \\ & \therefore (a-1)(b-1) \\ &= ab - a - b + 1 \\ &= ab - (a+b) + 1 \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3} - 3 + 1$$

$$= -\frac{4}{3},$$

故答案为: $-\frac{4}{3}$.

17. 化简 $(x^{-1} - 1)^{-1}$ 的结果是 _____.

【答案】 $\frac{x}{1-x}$ 且 $x \neq 1$

【解析】

【分析】根据 $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ ($a \neq 0$, p 为正整数) 先计算 x^{-1} , 再计算括号里面的减法, 然后再次计算 $(\frac{1-x}{x})^{-1}$ 即可.

【详解】解: 原式 = $(\frac{1}{x} - 1)^{-1}$

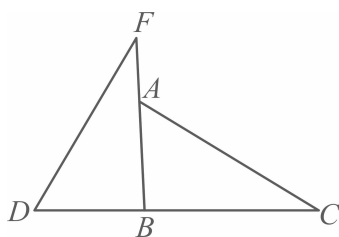
$$= (\frac{1-x}{x})^{-1}$$

$$= \frac{x}{1-x}.$$

故答案为: $\frac{x}{1-x}$ 且 $x \neq 1$.

【点睛】此题主要考查了负整数指数幂, 关键是掌握负整数指数为正整数指数的倒数.

18. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DBF$ 是形状、大小完全相同的两个直角三角形, 点 B 、 C 、 D 在同一条直线上, 点 B 、 A 、 F 也在同一条直线上, $\triangle ABC$ 的位置不动, 将 $\triangle DBF$ 绕点 B 顺时针旋转 x° ($0 < x < 180$), 点 F 的对应点为点 F_1 , 点 D 的对应点为点 D_1 , 当 $\angle F_1BC = \frac{1}{3}\angle ABF_1$ 时, $\angle D_1BC$ 的度数为_____.

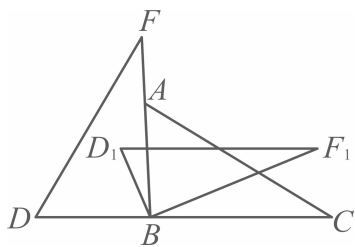


【答案】 112.5° 或 45°

【解析】

【分析】本题考查了旋转的性质, 根据题意分类讨论; 当 BF_1 在 $\angle ABC$ 内部时, 得出 $\angle F_1BC = 22.5^\circ$, 当 BF_1 在 $\angle ABC$ 外部时, $\angle F_1BC = 45^\circ$ 结合图形, 即可求解.

【详解】解: 如图所示, 当 BF_1 在 $\angle ABC$ 内部时,

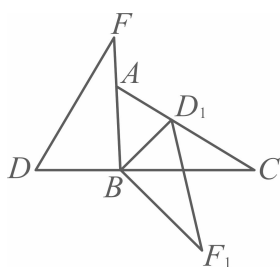


$$\because \angle F_1BC = \frac{1}{3} \angle ABF_1, \quad \angle F_1BC + \angle ABF_1 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle F_1BC = \frac{90^\circ}{4} = 22.5^\circ$$

$$\therefore \angle D_1BC = \angle D_1BF_1 + \angle F_1BC = 90^\circ + 22.5^\circ = 112.5^\circ,$$

如图所示，当 BF_1 在 $\angle ABC$ 外部时，



$$\because \angle F_1BC = \frac{1}{3} \angle ABF_1, \quad \angle ABF_1 - \angle F_1BC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle F_1BC = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

$$\therefore \angle D_1BC = \angle D_1BF_1 - \angle F_1BC = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ,$$

综上所述， $\angle D_1BC$ 的度数为 112.5° 或 45° 。

故答案为： 112.5° 或 45° 。

三、计算题： 本大题共 5 小题，共 25 分。

19. 计算： $a^2 \cdot a^4 + (-2a^2)^3 + a^8 \div a^2$.

【答案】 $-6a^6$

【解析】

【分析】 本题考查了幂的混合运算，先根据积的乘方幂的乘方以及同底数幂的乘除法法则计算，再合并即可。

【详解】 解： $a^2 \cdot a^4 + (-2a^2)^3 + a^8 \div a^2$

$$= a^6 - 8a^6 + a^6$$

$$= -6a^6.$$

20. 计算: $(a-2b)(a+2b) - (a-2b)^2 + 8b^2$.

【答案】 $4ab$

【解析】

【分析】 根据整式的乘法公式及运算法则化简，合并即可求解.

【详解】 $(a-2b)(a+2b) - (a-2b)^2 + 8b^2$

$$= a^2 - 4b^2 - a^2 + 4ab - 4b^2 + 8b^2$$

$$= 4ab.$$

【点睛】 此题主要考查整式的乘法运算，解题的关键是熟知其运算法则及运算公式.

21. 因式分解: $(a^2 + a)^2 + 4(a^2 + a) - 12$

【答案】 $(a-1)(a+2)(a^2 + a + 6)$

【解析】

【分析】 此题考查了因式分解的方法，解题的关键是熟练掌握因式分解的方法：提公因式法，平方差公式法，完全平方公式法，十字相乘法等.

连续利用十字相乘法分解因式即可.

【详解】 $(a^2 + a)^2 + 4(a^2 + a) - 12$

$$= (a^2 + a - 2)(a^2 + a + 6)$$

$$= (a-1)(a+2)(a^2 + a + 6).$$

22. 分解因式: $x^2 + 4y^2 - 4xy - 25$

【答案】 $(x-2y-5)(x-2y+5)$

【解析】

【分析】 先根据完全平方公式将前三项分解，再根据平方差公式分解即可.

【详解】 解：原式 $= (x - 2y)^2 - 25$

$$= (x - 2y + 5)(x - 2y - 5).$$

【点睛】 本题主要考查了根据公式法因式分解，掌握完全平方公式和平方差公式是解题的关键. 注意：因式分解要分到不能再分为止.

23. 解方程: $\frac{4}{x^2-1} = \frac{x+2}{x-1} - 1$.

【答案】 $x = \frac{1}{3}$

【解析】

【分析】先通分，将分式方程化为整式方程，再解方程，检验，即可作答.

【详解】解: $\frac{4}{x^2-1} = \frac{x+2}{x-1} - 1$,

两边同时乘以 $(x+1)(x-1)$,

得: $4 = (x+2)(x+1) - (x+1)(x-1)$,

解得: $x = \frac{1}{3}$,

经检验, $x = \frac{1}{3}$ 是原方程的解,

即: $x = \frac{1}{3}$.

【点睛】本题主要考查了解分式方程，掌握分式方程的解法是解答本题的关键. 解分式方程记得对根进行检验.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 33 分.

24. 先化简 $\frac{x+1}{x+2} \div \frac{x^2-2x}{x^2-4} - \frac{x+2}{x+1}$, 再在 $-2, -1, 0, 1, 2$ 中选取一个合适的 x 的值代入, 求出代数式的值.

【答案】 $\frac{1}{x^2+x}$, $x=1$ 时, 原式 $= \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】本题考查分式的化简求值, 先将除法转化为乘法, 然后约分, 再算减法, 最后从 $-2, -1, 0, 1, 2$ 中选取一个使得原分式有意义的值代入化简后的式子计算即可.

【详解】解: $\frac{x+1}{x+2} \div \frac{x^2-2x}{x^2-4} - \frac{x+2}{x+1}$

$$= \frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)} - \frac{x+2}{x+1}$$
$$= \frac{x+1}{x} - \frac{x+2}{x+1}$$
$$= \frac{(x+1)^2 - x(x+2)}{x(x+1)}$$

$$= \frac{x^2 + 2x + 1 - x^2 - 2x}{x(x+1)}$$

$$= \frac{1}{x^2 + x},$$

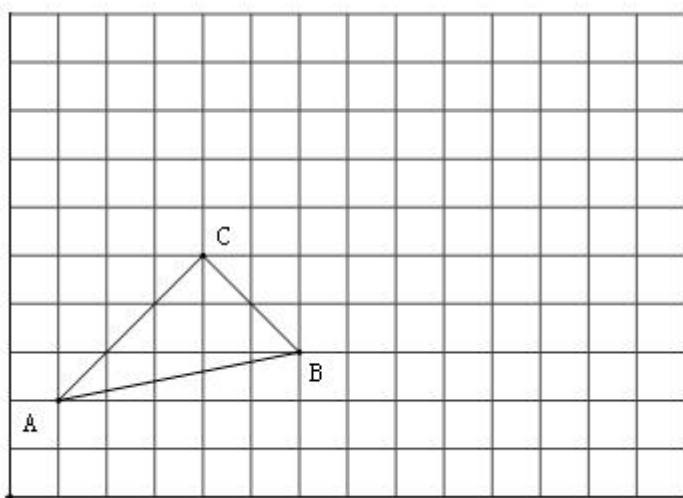
∴ 当 $x = -2, 0, 2$ 或 -1 时，原分式无意义，

$$\therefore x = 1,$$

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时, 原式} = \frac{1}{1^2 + 1} = \frac{1}{2}.$$

25. 如图， $\triangle ABC$ 是格点三角形（各顶点是网格线的交点），每个小方格都是边长为 1 个单位长度的小正方形.

- (1) 将 $\triangle ABC$ 向右平移 6 个单位长度，画出平移后的 $\triangle A_1B_1C_1$.
- (2) 将平移后的 $\triangle A_1B_1C_1$ 绕点 B_1 顺时针旋转 90° ，画出旋转后的 $\triangle A_2B_1C_2$.
- (3) 将 $\triangle ABC$ 沿直线 BC 翻折，画出翻折后的 $\triangle A_3BC$.
- (4) 试问 $\triangle ABC$ 能否经过一次旋转后与 $\triangle A_2B_1C_2$ 重合，若能，请在图中用字母 O 表示旋转中心并写出旋转角的大小；若不能，请说明理由.



【答案】 (1) 见解析；(2) 见解析；(3) 见解析；(4) 旋转角 90°

【解析】

【分析】 (1) 利用网格特点和平移的性质画出点 A, B, C 的对应点分别是点 A_1, B_1, C_1 即可；

(2) 利用网格特点和旋转的性质画出点 A, C 的对应点分别是点 A_2, C_2 即可；

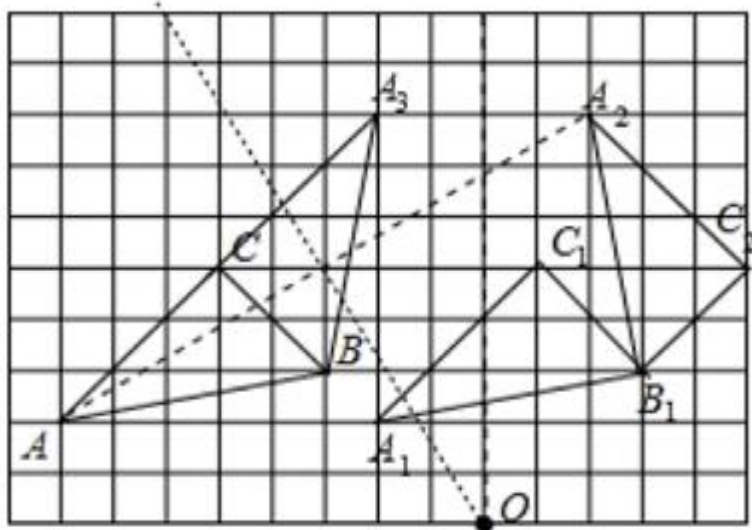
(3) 利用网格特点和轴对称的性质点 A 的对应点 A_3 即可；

(4) 作 BB_1, AA_2 的垂直平分线得到点 O ，则 $\angle AOA_2$ 为旋转角.

【详解】 (1) 如图， $\triangle A_1B_1C_1$ 为所作；

(2) 如图， $\triangle A_2B_1C_2$ 为所作；

(3) 如图, $\triangle A_3BC$ 为所作;



(4) $\triangle ABC$ 能经过一次旋转后与 $\triangle A_2B_1C_2$ 重合.

如图, 点 O 为所作, 旋转角为 90° .

【点睛】本题考查了作图-旋转变换: 根据旋转的性质可知, 对应角都相等都等于旋转角, 对应线段也相等, 由此可以通过作相等的角, 在角的边上截取相等的线段的方法, 找到对应点, 顺次连接得出旋转后的图形. 也考查了轴对称和平移变换.

26. 某化工厂要在规定的时间内搬运 1800 千克化工原料, 现有 A , B 两种机器人可供选择, 已知 A 型机器人每小时完成的工作量是 B 型机器人的 1.5 倍, A 型机器人单独完成所需的时间比 B 型机器人少 10 小时. 求两种机器人每小时分别搬运多少千克化工原料.

【答案】 A 型机器人每小时搬运 90 千克, B 型机器人每小时搬运 60 千克

【解析】

【分析】设 B 型机器人每小时搬运 x 千克, 则 A 型机器人每小时搬运 $1.5x$ 千克, 根据题意列出分式方程求解, 然后检验即可.

【详解】解: 设 B 型机器人每小时搬运 x 千克, 则 A 型机器人每小时搬运 $1.5x$ 千克,

根据题意得: $\frac{1800}{x} - \frac{1800}{1.5x} = 10$,

解得: $x = 60$,

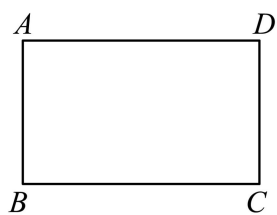
经检验: $x = 60$ 为分式方程的解,

则 $1.5x = 90$,

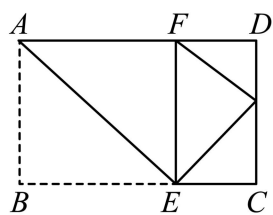
$\therefore A$ 型机器人每小时搬运 90 千克, B 型机器人每小时搬运 60 千克.

【点睛】题目主要考查分式方程的应用, 理解题意列出方程是解题关键.

27. 已知: 如图①长方形纸片 $ABCD$ 中, $AB < AD$. 将长方形纸片 $ABCD$ 沿直线 AE 翻折, 使点 B 落在 AD 边上, 记作点 F , 如图②.



图①



图②

- (1) 当 $AD = 10$, $AB = 6$ 时, 求线段 FD 的长度;
- (2) 设 $AD = 10$ 、 $AB = x$, 如果再将 $\triangle AEF$ 沿直线 EF 向右起折, 使点 A 落在射线 FD 上, 记作点 G , 若设线段 $FD = \frac{4}{3}DG$, 请根据题意画出图形, 并求出 x 的值;

- (3) 设 $AD = a$, $AB = b$, $\triangle AEF$ 沿直线 EF 向右翻折后交 CD 边于点 H , 连接 FH , 当 $\frac{S_{\triangle HFE}}{S_{\text{四边形}ABCD}} = \frac{1}{5}$ 时, 求 $\frac{a}{b}$ 的值.

【答案】(1) 4

(2) 2 或 $\frac{70}{11}$, 图见解析

(3) $\frac{5}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了长方形的性质, 折叠的性质, 四边形的面积, 熟练掌握折叠的性质是解题的关键.

- (1) 根据折叠的性质可得 $AF = AB = 6$, 从而求出结论;
- (2) 根据点 G 的位置分类讨论, 分别画出对应的图形, 根据折叠的性质分别用 x 表示出 FD 和 DG , 根据题意列出方程即可求出结论;
- (3) 过点 H 作 $HM \perp EF$ 于 M , 用 a 和 b 表示出 $S_{\triangle HFE}$ 和 $S_{\text{四边形}ABCD}$, 结合已知等式即可求解;

【小问 1 详解】

解: 由折叠的性质可得 $AF = AB = 6$,

$\therefore AD = 10$,

$\therefore FD = AD - AF = 10 - 6 = 4$;

【小问 2 详解】

解: 若点 G 落在线段 FD 上时, 如图1所示,

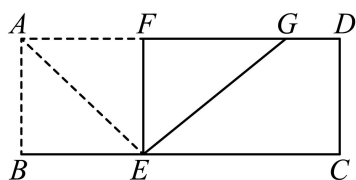


图1

由折叠的性质可得: $FG = AF = AB = x$,

$$\therefore FD = AD - AF = 10 - x,$$

$$\therefore DG = FD - FG = 10 - 2x,$$

$$\therefore FD = \frac{4}{3}DG,$$

$$\therefore 10 - x = \frac{4}{3}(10 - 2x),$$

解得 $x = 2$;

若点 G 落在线段 FD 的延长线上时, 如图 2 所示,

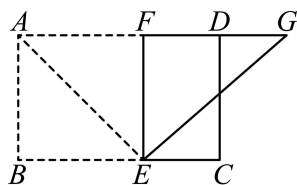


图2

由折叠的性质可得: $FG = AF = AB = x$,

$$\therefore FD = AD - AF = 10 - x,$$

$$\therefore DG = FG - FD = 2x - 10,$$

$$\therefore FD = \frac{4}{3}DG,$$

$$\therefore 10 - x = \frac{4}{3}(2x - 10),$$

解得 $x = \frac{70}{11}$;

综上, x 的值 2 或 $\frac{70}{11}$;

【小问 3 详解】

解: 如图 3 所示, 过点 H 作 $HM \perp EF$ 于 M ,

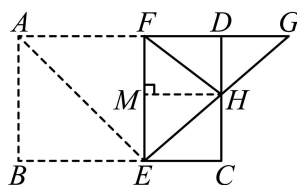


图3

$$\therefore HM = FD,$$

由题意可知: $AF = AB = b$, $EF = AB = b$,

$$\therefore FD = AD - AF = a - b,$$

$$\therefore HM = a - b,$$

$$\therefore S_{\triangle HFE} = \frac{1}{2} EF \cdot HM = \frac{1}{2} b(a - b), \quad S_{\text{四边形}ABCD} = AD \cdot AB = ab,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle HFE}}{S_{\text{四边形}ABCD}} = \frac{1}{5},$$

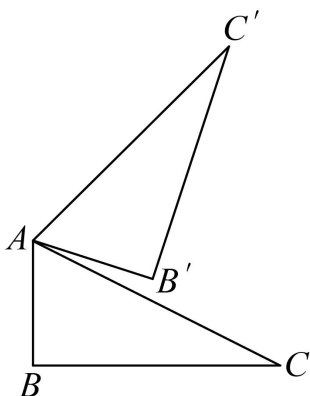
$$\therefore \frac{\frac{1}{2} b(a - b)}{ab} = \frac{1}{5},$$

整理得, $3a = 5b$,

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{5}{3}.$$

一、填空题: 本题共 1 小题, 每小题 4 分, 共 4 分.

28. 如图, 直角 ABC 的直角顶点为 B , 且 $AB = 8$, $BC = 15$, $AC = 17$, 将此三角形绕着顶点 A 逆时针旋转 72° 到直角 $AB'C'$ 的位置, 在旋转过程中, 线段 BC 扫过的面积是____. (结果保留 π)



【答案】 45π

【解析】

【分析】 本题考查扇形的面积, 旋转变换, 推出扫过的面积等于两个扇形的面积的差是解题的关键.

$$\text{线段 } BC \text{ 所扫过的面积} = S_{\text{扇形}BAB'} + S_{\triangle AB'C'} - S_{\text{扇形}CAC'} - S_{\triangle ABC} = S_{\text{扇形}BAB'} - S_{\text{扇形}CAC'}.$$

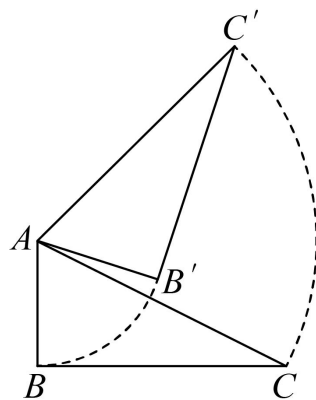
【详解】 解: 线段 BC 所扫过的面积

$$= S_{\text{扇形}BAB'} + S_{\triangle AB'C'} - S_{\text{扇形}CAC'} - S_{\triangle ABC}$$

$$= S_{\text{扇形}BAB'} - S_{\text{扇形}CAC'}$$

$$= \frac{72 \cdot \pi \cdot 17^2}{360} - \frac{72 \cdot \pi \cdot 8^2}{360}$$

$$= 45\pi .$$



故答案为 45π .

二、解答题：本题共 2 小题，共 16 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

29. 根据以下素材，探索完成任务.

如何设计奖品购买及兑换方案？		
素材 材 1	某文具店销售某种钢笔与笔记本，已知钢笔的单价是笔记本的 2 倍，用 120 元购买笔记本的数量比用 160 元购买钢笔的数量多 8 件.	
素材 材 2	某学校花费 400 元购买该文具店的钢笔和笔记本作为奖品颁发给“优秀学生”，两种奖品的购买数量共 50 件.	
素材 材 3	学校花费 400 元后，文具店赠送 m 张 $(1 < m < 10)$ 兑换券（如右）用于商品兑换. 兑换后，笔记本与钢笔数量相同.	兑换券 凭此券可兑换钢笔 10支或笔记本20本
问题解决		
任务 务 1	探求商品单价	请运用适当方法，求出钢笔与笔记本的单价.

任务 2	求奖品的购买方案	购买钢笔和笔记本数量的方案.
任务 3	确定兑换方式	运用数学知识, 确定符合条件的一种兑换方式.

【答案】 任务 1: 笔记本的单价为 5 元, 钢笔的单价为 10 元; 任务 2: 钢笔 30 支, 笔记本 20 本; 任务 3: 文具店赠送 2 张兑换券, 其中 1 张兑换钢笔, 1 张兑换笔记本. (或文具店赠送 5 张兑换券, 其中 3 张兑换钢笔, 2 张兑换笔记本. 或文具店赠送 8 张兑换券, 其中 5 张兑换钢笔, 3 张兑换笔记本.)

【解析】

【分析】 本题主要考查了分式方程和二元一次方程的应用, 解题的关键是根据等量关系, 列出方程, 准确解方程.

任务 1: 设笔记本的单价为 x 元, 根据用 120 元购买笔记本的数量比用 160 元购买钢笔的数量多 8 件列出分式方程, 解方程即可;

任务 2: 设购买钢笔为 a 支, 笔记本为 b 本, 根据数量共 50 件, 总的花费为 400 元, 列出方程, 求出 a 、 b 的值即可;

任务 3: 在 (2) 的基础上, 结合兑换后钢笔和笔记本数量相等进行列式解答即可.

【详解】 解: 任务 1: 设笔记本的单价为 x 元, 根据题意, 得 $\frac{120}{x} = \frac{160}{2x} + 8$,

解得 $x = 5$,

经检验, $x = 5$ 是原方程的根,

这时 $2x = 10$.

$\therefore$ 笔记本的单价为 5 元, 钢笔的单价为 10 元;

任务 2: 设购买钢笔为 a 支, 笔记本为 b 本, 根据题意, 得

$$\begin{cases} a + b = 50 \\ 10a + 5b = 400 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = 30 \\ b = 20 \end{cases}$$

$\therefore$ 可购买钢笔 30 支, 笔记本 20 本

任务 3: 当有钢笔 30 支, 笔记本 20 本时, 设有 y 张兑换券兑换钢笔,

根据题意, 得 $30 + 10y = 20 + 20(m - y)$,

$$\text{整理得 } y = \frac{2m-1}{3},$$

$\because 1 < m < 10$, 且 m, y 均为正整数,

$$\therefore \text{经尝试求解得 } \begin{cases} m=2 \\ y=1 \end{cases}, \begin{cases} m=5 \\ y=3 \end{cases}, \begin{cases} m=8 \\ y=5 \end{cases}$$

$\therefore$ 文具店赠送 2 张兑换券, 其中 1 张兑换钢笔, 1 张兑换笔记本.

文具店赠送 5 张兑换券, 其中 3 张兑换钢笔, 2 张兑换笔记本.

文具店赠送 8 张兑换券, 其中 5 张兑换钢笔, 3 张兑换笔记本.

30. 阅读理解

材料: 为了研究分式 $\frac{1}{x}$ 与分母 x 的变化关系, 小明制作了表格, 并得到如下数据:

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
$\frac{1}{x}$	...	-0.25	-0.3	-0.5	-1	无意义	1	0.5	0.3	0.25	...

从表格数据观察, 当 $x > 0$ 时, 随着 x 的增大, $\frac{1}{x}$ 的值随之减小, 并无限接近 0; 当 $x < 0$ 时, 随着 x 的增大, $\frac{1}{x}$ 的值也随之减小.

材料 2: 对于一个分子、分母都是多项式的分式, 当分母的次数高于分子的次数时, 我们把这个分式叫做真分式. 当分母的次数不低于分子的次数时, 我们把这个分式叫做假分式. 有时候, 需要把一个假分式化成整式和真分式的代数和, 像这种恒等变形, 称为将分式化为部分分式.

$$\text{如: } \frac{2x+1}{x-4} = \frac{2x-8+8+1}{x-4} = \frac{2x-8}{x-4} + \frac{8+1}{x-4} = 2 + \frac{9}{x-4}.$$

根据上述材料完成下列问题:

(1) 当 $x > 0$ 时, 随着 x 的增大, $1 + \frac{1}{x}$ 的值 _____ (增大或减小);

当 $x < 0$ 时, 随着 x 的增大, $\frac{x+2}{x}$ 的值 _____ (增大或减小);

(2) 当 $x > 1$ 时, 随着 x 的增大, $\frac{2x+2}{x-1}$ 的值无限接近一个数, 请求出这个数;

(3) 当 $0 \leq x \leq 2$ 时, 求代数式 $\frac{5x-2}{x-3}$ 值的范围.

【答案】 (1) 减小; 减小

(2) 2

$$(3) -8 \leq \frac{5x-2}{x-3} \leq \frac{2}{3}$$

【解析】

【分析】(1) 由 $\frac{1}{x}$ 、 $\frac{2}{x}$ 的变化情况，判断 $1+\frac{1}{x}$ 、 $\frac{x+2}{x}$ 的变化情况即可；

(2) 由 $\frac{2x+2}{x-1} = 2 + \frac{4}{x-1}$ ，即可求解；

(3) 由 $\frac{5x-2}{x-3} = 5 + \frac{13}{x-3}$ ，再结合 x 的取值范围即可求解。

【小问 1 详解】

解：∵ 当 $x > 0$ 时， $\frac{1}{x}$ 随着 x 的增大而减小，

∴ 随着 x 的增大， $1 + \frac{1}{x}$ 的值减小；

∵ 当 $x < 0$ 时， $\frac{2}{x}$ 随着 x 的增大而减小，

$$\therefore \frac{x+2}{x} = 1 + \frac{2}{x}$$

∴ 随着 x 的增大， $\frac{x+2}{x}$ 的值减小。

故答案为：减小；减小。

【小问 2 详解】

$$\therefore \frac{2x+2}{x-1} = \frac{2(x-1)+4}{x-1} = 2 + \frac{4}{x-1},$$

∴ 当 $x > 1$ 时， $\frac{4}{x-1}$ 的值无限接近 0，

∴ $\frac{2x+2}{x-1}$ 的值无限接近 2。

【小问 3 详解】

$$\therefore \frac{5x-2}{x-3} = \frac{5(x-3)+13}{x-3} = 5 + \frac{13}{x-3},$$

又 ∵ $0 \leq x \leq 2$ ，

$$\therefore -13 \leq \frac{13}{x-3} \leq -\frac{13}{3},$$

$$\therefore -8 \leq \frac{5x-2}{x-3} \leq \frac{2}{3}.$$

【点睛】本题考查分式的性质，熟练掌握分式的基本性质，理解题中的变量分离的方法是解题的关键。

