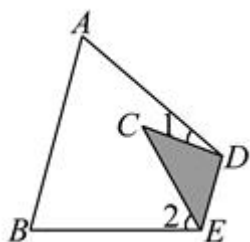


2024-2025 学年上海外国语大学附属外国语学校科创班七年级（上）期

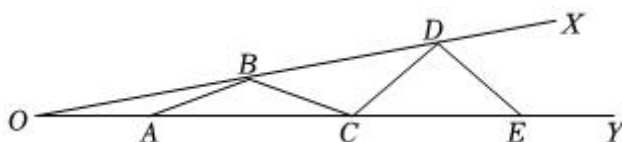
中数学试卷

一、填空题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。

1. 如图，三角形纸片 ABC 中， $\angle A = 65^\circ$ ， $\angle B = 75^\circ$ ，将纸片的一角折叠，使点 C 落在 $\triangle ABC$ 内，若 $\angle 1 = 20^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数为_____.



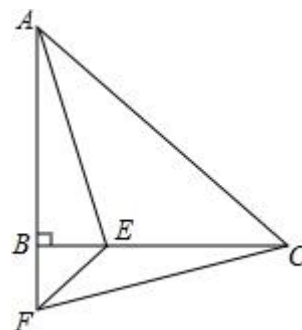
2. 如图， $OA = AB = BC = CD = DE$ ，若 $\angle EDX = 40^\circ$ ，则 $\angle XOY =$ _____.



3. 已知 $A = 5^{1992} + \frac{3}{2} \times 5^{1991} + \frac{1}{2} \times 5^{1990} + 5$ 是一个整数，则 A 被 3 除所得的余数为_____.

4. 回文数是指按数字从前往后和从后往前读都相同的正整数，则最小的能被 99 整除的五位回文数是_____.

5. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = BC$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， F 为 AB 延长线上一点，点 E ，在 BC 上， $BE = BF$ ，连接 AE ， EF 和 CF ，此时，若 $\angle CAE = 30^\circ$ ，那么 $\angle EFC =$ _____.

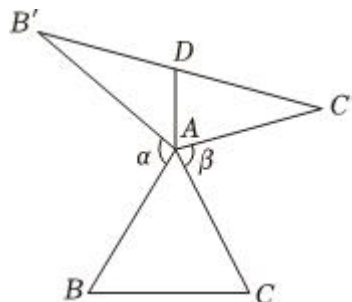


6. 质数 p 使得 $p^2 + 11$ 恰有 6 个不同的正约数，则 $p =$ _____.

7. 等腰三角形一边上的高等于一边的一半，则它的顶角度数为_____.

8. 记 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{23} = \frac{n}{23!}$ ，则 n 被 13 除所得的余数为_____.

9. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，将 AB 绕点 A 顺时针旋转 α 至 AB' ，将 AC 绕点 A 逆时针旋转 β 至 AC' ($0^\circ < \alpha < 180^\circ, 0^\circ < \beta < 180^\circ$)，得到 $\triangle AB'C'$ ，使 $\angle BAC + \angle B'AC' = 180^\circ$ ，我们称 $\triangle AB'C'$ 是 $\triangle ABC$ 的“旋补三角形”，



$\triangle AB'C'$ 的中线 AD 叫做 $\triangle ABC$ 的“旋补中线”，点 A 叫做“旋补中心”. 下列结论正确的有_____.

① $\triangle ABC$ 与 $\triangle AB'C'$ 面积相同;

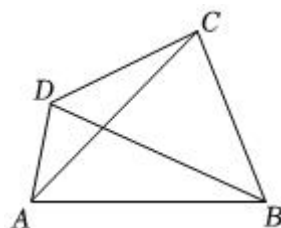
② $BC = 2AD$;

③ 若 $AB = AC$ ，连接 BB' 和 CC' ，则 $\angle B'BC + \angle CC'B' = 180^\circ$;

④ 若 $AB = AC$ ， $AB = 4$ ， $BC = 6$ ，则 $B'C' = 10$.

10. 在四边形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $AD = 49$ ， $BC = 60$ ， $CD = BD = 50$ ，则四边形 $ABCD$ 的面积是_____.

11. 如图，在凸四边形 $ABCD$ 中， $AB = AC = BD$ ，且 $\angle DAB = 72^\circ$ ， $\angle ABC = 66^\circ$ ，则 $\angle BCD =$ _____.



12. $21!$ 有超过 60000 个不同的正约数，其中奇数与偶数的比为_____规定

$$21! = 21 \times 20 \times 19 \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1.$$

二、解答题：本题共 4 小题，共 40 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

13. (本小题 10 分)

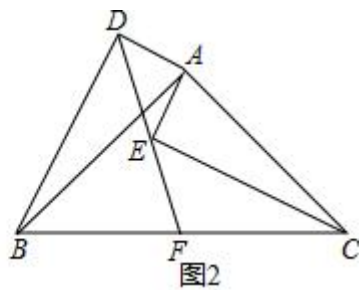
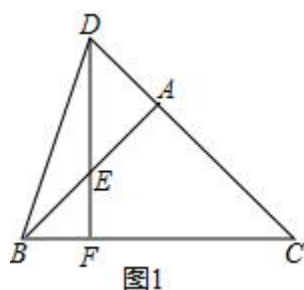
求所有的正整数 n ，使得 $6^n + 1$ 在十进制下的所有数字都相同，

14. (本小题 10 分)

在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 中， $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ， $AD = AE$ ，延长 DE 交 BC 于点 F ，连接 DC ， BE .

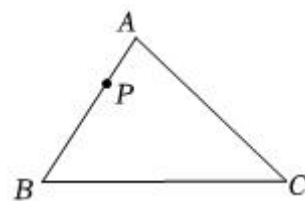
(1) 如图 1，当点 B ， A ， E 同一直线上时，且 $\angle ABD = 30^\circ$ ， $AE = 2$ ，求 BC 的长.

(2) 如图 2，当 F 是中点时，求证： $AE \perp CE$.



15. (本小题 10 分)

点 P 是 $\triangle ABC$ 边 AB 上的任意一点，且 $AP < BP$ ，试过点 P 作一条直线，使得分成的两部分面积相等，并说明理由.



16.(本小题 10 分)

求方程 $17(xyzt + xy + xt + zt + 1) - 54(yzt + y + t) = 0$ 的正整数解.

答案和解析

1. 【答案】 60°

【解析】 【分析】

本题通过折叠变换考查三角形内角和定理，四边形内角和定理。注意折叠前后图形全等；三角形内角和为 180° ，四边形内角和为 360° 。

根据题意，已知 $\angle A = 65^\circ$ ， $\angle B = 75^\circ$ ，可结合三角形内角和定理和折叠变换的性质以及四边形内角和定理求解。

【解答】

解： $\because \angle A = 65^\circ$ ， $\angle B = 75^\circ$ ，

$$\therefore \angle C = 180^\circ - (65^\circ + 75^\circ) = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle CDE + \angle CED = 180^\circ - \angle C = 140^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = 360^\circ - (\angle 1 + \angle A + \angle B + \angle CED + \angle CDE) = 360^\circ - 300^\circ = 60^\circ.$$

故答案为 60° 。

2. 【答案】 8°

【解析】 解： $\because OA = AB = BC = CD = DE$ ，

$$\therefore \angle XOY = \angle ABO, \angle BAC = \angle BCA, \angle CBD = \angle CDB, \angle DCE = \angle DEC,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle BCA = \angle XOY + \angle ABO = 2\angle XOY,$$

$$\therefore \angle CBD = \angle CDB = \angle XOY + \angle BCA = 3\angle XOY,$$

$$\therefore \angle DCE = \angle DEC = \angle XOY + \angle CDB = 4\angle XOY,$$

$$\therefore \angle EDX = \angle XOY + \angle DEC = 5\angle XOY,$$

$$\because \angle EDX = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle XOY = 8^\circ,$$

故答案为： 8° 。

根据等腰三角形的性质及三角形外角性质求解即可。

此题考查了等腰三角形的性质，熟记等腰三角形的性质是解题的关键。

3. 【答案】 2

【解析】 解： $\because A = 5^{1992} + \frac{3}{2} \cdot 5^{1992} + \frac{1}{2} \cdot 5^{1992} + 5 = 3 \cdot 5^{1992} + 5$ ，

又 $\because 3 \cdot 5^{1992}$ 能被 3 整除，

$$\therefore 5 \div 3 = 1 \cdots 2,$$

$\therefore A$ 被 3 除的余数为 2.

故答案为: 2.

首先 A 进行化简, 可得 $A = 3 \cdot 5^{1992} + 5$, 又知 $3 \cdot 5^{1992}$ 能被 3 整除, 于是求 5 被 3 除的余数即可.

本题考查了有理数的乘方, 掌握有理数的乘方的运算法则是关键.

4. 【答案】 54945

【解析】解: 先考虑被 99 整除, 即同时被 9 和 11 整除,

被 9 整除的数具有的特征的每位数的和为 9 的倍数,

$$10000 \div 11 = 909 \cdots \cdots 1, \text{ 即所选的数至少为 } 11 \text{ 的 } 910 \text{ 倍,}$$

被 11 整除的数其具有的特征是其奇位数字之和与偶位数字之和的差能被 11 整除,

设该五位数为: $abcde$,

$\therefore$ 该五位数为回文数,

$$\therefore a = e, \quad b = d,$$

$\therefore$ 该五位数可以被 9 和 11 整除,

$$\therefore a + b + c + d + e \text{ 的和为 } 9 \text{ 的倍数, 即 } 2(a + b) + c = 9x, \text{ 其中 } x \text{ 为整数,}$$

$$a + c + e - b - d = 11y, \text{ 即 } 2(a - b) + c = 11y, \text{ 其中 } y \text{ 为整数;}$$

$$910 \times 11 = 10010, \text{ 非回文数, 且不能被 } 9 \text{ 整除,}$$

$911 \times 11 = 10021$, 非回文数, 且不能被 9 整除, 以此类推, 得到 $4995 \times 11 = 54945$, 为回文数, 且位数为 27, 能被 9 整除.

故答案为: 54945.

将 99 拆成 9 和 11, 分别考虑被这两个数整除的数所具有的特征, 从最小的开始试, 直到找到符合题意的.

此题考查数的整除中, 被数整除的数具有的特征.

5. 【答案】 30°

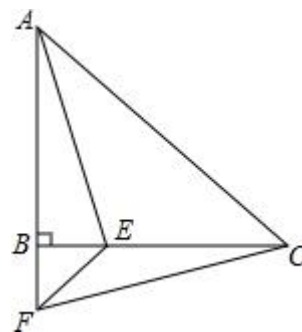
【解析】解: 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CBF$ 中,

$$\therefore \begin{cases} BE = BF \\ \angle ABC = \angle CBF, \\ AB = BC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBF(SAS),$$

$$\therefore AB = BC, \quad \angle ABC = 90^\circ, \quad \angle CAE = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle CAB = \angle ACB = \frac{1}{2}(180^\circ - 90^\circ) = 45^\circ, \quad \angle EAB = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ.$$



$$\because \triangle ABE \cong \triangle CBF,$$

$$\therefore \angle EAB = \angle FCB = 15^\circ.$$

$$\because BE = BF, \angle EBF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BFE = \angle FEB = 45^\circ.$$

$$\therefore \angle EFC = 180^\circ - 90^\circ - 15^\circ - 45^\circ = 30^\circ,$$

故答案为: 30° .

根据已知利用 SAS 判定 $\triangle ABE \cong \triangle CBF$, 由此可求得 $\angle EAB = \angle FCB$, 根据已知利用角之间的关系可求得 $\angle EFC$ 的度数.

此题主要考查了全等三角形的判定方法及等腰三角形的性质等知识点的掌握情况, 本题的关键是能证得 $\triangle ABE \cong \triangle CBF$, 证出 $\angle EAB = \angle FCB$.

6. 【答案】3

【解析】解: 通过对约数公式进行分析可知, 可设: $p^2 + 11 = q^5$ 或 $p^2 + 11 = qr^2$,

其中 q, r 为质数,

若为前者, 得 p 奇 q 偶, 所以 $q = 2$, 但不满足题意,

若为后者, 显然 $p \neq 2$, 从而右边为偶数, 所以 $q = 2$ 或 $r = 2$, 若 $p = 3$, 满足题意; 若 $p > 3$, 得 p^2 是 $3k + 1$ 形数, 所以 $3|qr^2$, 得 $(q, r) = (3, 2)$ 或 $(2, 3)$, 但均不符合题意;

所以 $p = 3$,

故答案为: 3.

根据质数和奇偶性的分析解答即可.

此题考查质数与合数, 关键是根据约数公式分类讨论解答.

7. 【答案】 30° 、 90° 、 120° 或 150°

【解析】解: 如图, 分四种情况:

1、 $AB = BC$, $AD \perp BC$, AD 在三角形的内部, 由题意

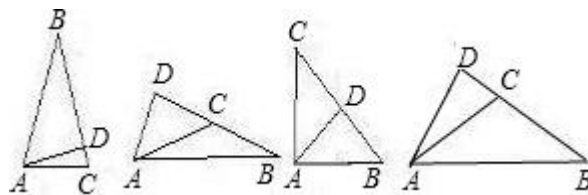
$$\text{知, } AD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore \sin \angle B = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle B = 30^\circ;$$

2、 $AC = BC$, $AD \perp BC$, AD 在三角形的外部, 由题意知, $AD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AC$,

$$\therefore \sin \angle ACD = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{2},$$



$$\therefore \angle ACD = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ;$$

3、 $AB = AC$ ， $AD \perp BC$ ， BC 边为等腰三角形的底边，

由等腰三角形的底边上的高、底边上中线、顶角的平分线互相重合知，点 D 为 BC 的中点，

$$\text{由题意知， } AD = \frac{1}{2}BC = CD = BD,$$

$\therefore \triangle ABD$ ， $\triangle ADC$ 均为等腰直角三角形，

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ.$$

4、 $AC = BC$ ， $AD \perp BC$ ， AD 在三角形的外部，由题意知， $AD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AB$ ，

$$\therefore \sin \angle DAC = \frac{CD}{CA} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle DAC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ;$$

故填 30° 、 90° 、 120° 或 150° 。

认真阅读题目，已知没有明确三角形的类型，没有说明是此边腰还是底边，根据高在三角形内部、三角形外部两种情况；而在内部时又可以是作腰上的高和底边的高两种情况；逐一进行讨论即可求解。

本题考查了等腰三角形的性质及三角形的内角和定理、三角形外角的性质；认真读题，想到各种可能性并进行逐一讨论是正确解答本题的关键。

8. 【答案】7

$$\text{【解析】解：} \because 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{23} = \frac{n}{23!},$$

$$\therefore n = 23! + \frac{23!}{2} + \frac{23!}{3} + \cdots + \frac{23!}{23},$$

$$\therefore \frac{n}{13} = \frac{23!}{13} + \frac{23!}{2 \times 13} + \frac{23!}{3 \times 13} \cdots \frac{23!}{12 \times 13} + \frac{23!}{13 \times 13} + \frac{23!}{14 \times 13} \cdots + \frac{23!}{23 \times 13},$$

$$\therefore n \text{ 被 } 13 \text{ 除所得的余数即为 } \frac{23!}{13 \times 13} \text{ 的余数},$$

$$\therefore \frac{23!}{13 \times 13} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 12 \times 14 \times \cdots \times 23}{13} = \frac{1988616672221921280000}{13} = 152970513247840098461$$

$\cdots 7$,

$$\therefore n \text{ 被 } 13 \text{ 除所得的余数即为：} 7,$$

故答案为：7.

根据题意可得 $\frac{n}{13} = \frac{23!}{13} + \frac{23!}{2 \times 13} + \frac{23!}{3 \times 13} \cdots \frac{23!}{12 \times 13} + \frac{23!}{13 \times 13} + \frac{23!}{14 \times 13} \cdots + \frac{23!}{23 \times 13}$, 故 n 被 13 除所得的余数即为 $\frac{23!}{13 \times 13}$ 的余数, 然后进行计算求解即可解.

本题考查了数的整除, 余数有理数的混合运算的知识, 熟练掌握以上知识是解题的关键.

9. 【答案】①②③

【解析】证明: 延长 AD 至 E , 使 $DE = AD$, 连接 $B'E$, $C'E$,

$\because AD$ 是中线,

$\therefore B'D = C'D$,

$\therefore$ 四边形 $AC'EB'$ 是平行四边形,

$\therefore B'E \parallel AC'$, $B'E = AC'$, $S_{\triangle B'C'A} = \frac{1}{2} S_{\square B'EC'A} = S_{\triangle AB'E}$,

$\therefore \angle B'AC' + \angle AB'E = 180^\circ$,

$\therefore \angle BAC + \angle B'AC' = 180^\circ$,

$\therefore \angle BAC = \angle AB'E$,

$\therefore$ 将 AB 绕点 A 顺时针旋转 α 至 AB' , 将 AC 绕点 A 逆时针旋转 β 至 AC' ,

$\therefore AB = AB'$, $AC = AC' = B'E$,

在 $\triangle BAC$ 和 $\triangle AB'E$ 中,

$$\begin{cases} BA = AB' \\ \angle BAC = \angle AB'E, \\ CA = B'E \end{cases}$$

$\therefore \triangle BAC \cong \triangle AB'E (SAS)$,

$\therefore BC = AE$, $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AB'E}$,

$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle B'C'A}$, 故①正确;

$\therefore AE = 2AD$,

$\therefore BC = 2AD$, 故②正确;

$\therefore AB = AC$,

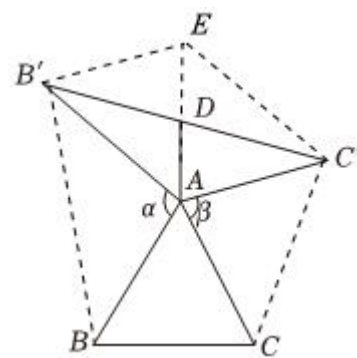
$\therefore AB' = AC' = AB = AC$,

$\therefore \angle ABC = \angle ACB$, $\angle ABB' = \angle AB'B$, $\angle ACC' = \angle AC'C$, $\angle AB'C' = \angle AC'B'$,

$\therefore \angle BAC + \angle B'AC' = 180^\circ$,

$\therefore \alpha + \beta = 180^\circ$, $\angle B'C'A + \angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore \angle ABB' + \angle AC'C = 90^\circ$,



$\therefore \angle B'BC + \angle CC'B' = 180^\circ$; 故③正确;

$\therefore BC = 6$,

$\therefore AD = 3$,

$\therefore AB' = AC' = AB = AC = 4$,

$\therefore$ 平行四边形 $AC'EB'$ 是菱形,

$\therefore B'C' \perp AE$, $B'D = C'D$,

$\therefore B'D = \sqrt{B'A^2 - AD^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$,

$\therefore B'C' = 2\sqrt{7}$, 故④错误,

故答案为: ①②③.

由“SAS”可证 $\triangle BAC \cong \triangle AB'E$, 可得 $BC = AE$, $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AB'E}$, 可求 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle B'C'A}$,

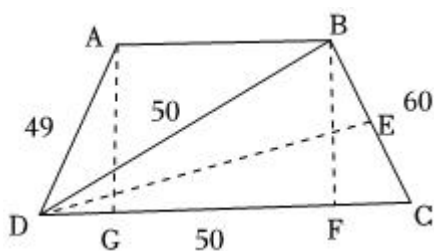
$BC = 2AD$, 故①②正确; 由等腰三角形的性质和三角形内角和定理可求 $\angle B'BC + \angle CC'B' = 180^\circ$; 故

③正确; 通过证明平行四边形 $AC'EB'$ 是菱形, 可得 $B'C' \perp AE$, $B'D = C'D$, 由勾股定理可求 $B'C'$ 的长, 即可判断④, 即可求解.

本题是三角形综合题, 考查了全等三角形的判定和性质, 等腰三角形的性质, 勾股定理, 平行四边形的判定和性质, 菱形的判定和性质, 灵活运用这些性质解决问题是解题的关键.

10. 【答案】 $1536 - 24\sqrt{97}$

【解析】解: 如图, 作 $DE \perp BC$, $AG \perp DC$, $BF \perp DC$,



$\therefore CD = BD$, $DE \perp CB$,

$\therefore BE = CE = \frac{1}{2}BC = 30$ (三线合一),

$\therefore DE = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40$,

$\therefore \frac{1}{2} \times DC \times BF = \frac{1}{2} \times BC \times DE$,

$\therefore 50 \times BF = 60 \times 40$,

$\therefore BF = 48$,

$\therefore CF = \sqrt{60^2 - 48^2} = 36$,

同理, $DG = \sqrt{49^2 - 48^2} = \sqrt{97}$,

$$\therefore AB = GF = 50 - 36 - \sqrt{97} = 14 - \sqrt{97},$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积为:

$$\frac{1}{2} \times (14 - \sqrt{97} + 50) \times 48 = 1536 - 24\sqrt{97},$$

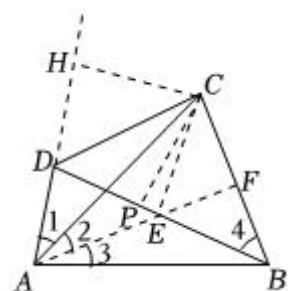
故答案为: $1536 - 24\sqrt{97}$.

依题意, 由三线合一和勾股定理, 先求得 $DE = 40$, 再用等面积法求得 BF , 进一步求得 FC , DG , 可得 GF , 进一步求解即可.

本题考查了勾股定理和面积的计算, 做题的关键是等面积法求高.

11. 【答案】 96°

【解析】解: 过点 A 作 $AF \perp BC$ 于 F , 交 BD 于 E , 连接 CE , 过点 C 作 $CP \perp BD$ 于 P , $CH \perp AD$ 交 AD 的延长线于 H , 如图所示:



$$\because AB = AC = BD, \text{ 且 } \angle DAB = 72^\circ, \angle ABC = 66^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle DAB = 72^\circ, \angle ABC = \angle ABC = 66^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = 180^\circ - (\angle ADB + \angle DAB) = 36^\circ, \angle BAC = 180^\circ - (\angle ABC + \angle ACB) = 48^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle DAB - \angle BAC = 72^\circ - 48^\circ = 24^\circ,$$

$$\because AC = AB, AF \perp BC,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle 3 = \frac{1}{2} \angle BAC = 24^\circ, CF = BF,$$

$$\therefore BE = CE,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 = 24^\circ,$$

即 AC 是 $\angle DAB$ 的平分线,

又 $\because CP \perp BD, CH \perp AD$

$$\therefore CP = CH,$$

$$\text{在 Rt}\triangle BEF \text{ 中, } \angle 4 = \angle ABC - \angle ABD = 66^\circ - 36^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BEF = 90^\circ - \angle 4 = 60^\circ,$$

$$\because EF \perp BC, BE = CE,$$

$$\therefore \angle CEF = \angle BEF = 60^\circ, \angle ECB = \angle 4 = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle CED = 180^\circ - (\angle CEF + \angle BEF) = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle CED = \angle CEF = 60^\circ,$$

即 EF 是 $\angle CEB$ 的平分线,

$$\text{又} \because CP \perp BD, CF \perp EF,$$

$$\therefore CP = CF,$$

$$\therefore CH = CF,$$

$\therefore CD$ 是 $\angle HDE$ 的平分线,

$$\because \angle HDE = 180^\circ - \angle ADB = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ,$$

$$\therefore \angle CDE = \frac{1}{2} \angle HDE = 54^\circ,$$

$$\therefore \angle DCE = 180^\circ - (\angle CDE + \angle CED) = 180^\circ - (54^\circ + 60^\circ) = 66^\circ,$$

$$\therefore \angle BCD = \angle DCE + \angle ECB = 66^\circ + 30^\circ = 96^\circ.$$

故答案为: 96° .

过点 A 作 $AF \perp BC$ 于 F , 交 BD 于 E , 连接 CE , 过点 C 作 $CP \perp BD$ 于 P , $CH \perp AD$ 交 AD 的延长线于 H , 利用等腰三角形的性质及三角形的内角和定理得 AC 是 $\angle DAB$ 的平分线, EF 是 $\angle CEB$ 的平分线, 则 $CP = CH$, $CP = CF$, 进而得 $CH = CF$, 则 CD 是 $\angle HDE$ 的平分线, 由此得 $\angle CDE = 1/2 \angle HDE = 54^\circ$, 继而得 $\angle DCE = 66^\circ$, 据此可得 $\angle BCD$ 的度数.

此题主要考查了等腰三角形的性质, 三角形内角和定理, 角平分线的性质, 熟练掌握等腰三角形的性质, 角平分线的性质, 灵活运用三角形内角和定理进行角的计算是解决问题的关键.

12. 【答案】 $\frac{1}{18}$

$$\begin{aligned} \text{【解析】} \because 21! &= 21 \times 20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \\ &\times 2 \times 1 \end{aligned}$$

$$= 3 \times 7 \times 22 \times 5 \times 2 \times 32 \times 24 \times 3 \times 5 \times 2 \times 7 \times 22 \times 3 \times 2 \times 5 \times 32 \times 23 \times 2 \times 3 \times 22 \times 19 \times 17$$

$$\times 13 \times 11 \times 7 \times 5 \times 3 \times 2,$$

$$= 2^{18} \times 3^9 \times 5^4 \times 7^3 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19,$$

$$\therefore 21! \text{ 的任一正约数的形式为 } 2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d \times 11^e \times 13^f \times 17^g \times 19^h,$$

其中 $a = 0, 1, 2, \dots, 18$, $b = 0, 1, 2, \dots, 9$, $c = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, $d = 0, 1, 2, 3, 4$,

$e = 0, 1$, $f = 0, 1$, $g = 0, 1$, $h = 0, 1$,

∴正奇数约数有: $10 \times 6 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 4800$ (个),

∴偶数时 $a \neq 0$,

∴正偶数约数有: $18 \times 10 \times 6 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 86400$ (个),

∴奇数与偶数的比: $\frac{4800}{86400} = \frac{1}{18}$,

故答案为: $\frac{1}{18}$.

将 $21!$ 进行质因数分解, 得 $2^{18} \times 3^9 \times 5^4 \times 7^3 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19$, 可知 $21!$ 的任一正约数的形式为

$2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d \times 11^e \times 13^f \times 17^g \times 19^h$, 其中 $a = 0, 1, 2, \dots, 18$, $b = 0, 1, 2, \dots, 9$, $c = 0,$

$1, 2, 3, 4, 5$, $d = 0, 1, 2, 3, 4$, $e = 0, 1$, $f = 0, 1$, $g = 0, 1$, $h = 0, 1$, 所以共有

$10 \times 6 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 4800$ 个不同的正奇数约数, $18 \times 10 \times 6 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 86400$ 个不同的

正偶数约数, 即可求出奇数与偶数的比值.

本题主要考查了约数. 熟练掌握约数, 奇数, 偶数的定义, 分解质因数, 是解题的关键.

13. 【答案】解: 由于 6^n 个位数为 6, 则 $6^n + 1$ 的个位数为 7.

当 $n = 1$ 时, $6 + 1 = 7$, 符合题意;

当 $n = 2$ 时, $6^2 + 1 = 37$, 不符合题意;

当 $n = 3$ 时, $6^3 + 1 = 217$, 不符合题意;

当 $n = 4$ 时, $6^4 + 1 = 1297$, 不符合题意;

当 $n = 5$ 时, $6^n + 1 = 7777$. 符合题意.

即 $6^5 + 1 = \frac{7 \times (10^4 - 1)}{9}$.

假设存在 $n = 5 + j$, $m = 4 + k$, m, j, k 均为正整数, 使得 $6^{5+j} + 1 = \frac{7 \times (10^{4+k} - 1)}{9}$.

∴ $6^{5+j} - 6^5 = 6^5(6^j - 1) = \frac{7 \times 10^4 \times (10^k - 1)}{9}$.

由于 6^5 的个位数为 6, $(6^j - 1)$ 的个位数为 5, 故 $6^5(6^j - 1) \equiv 0 \pmod{10}$, 而不能被 10^4 整除.

而 $\frac{7 \times 10^4 \times (10^k - 1)}{9} \equiv 0 \pmod{10000}$.

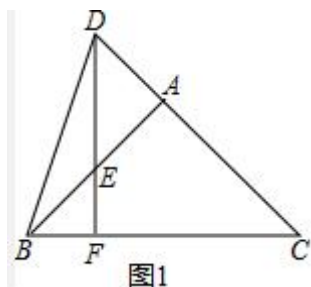
因此当 $n > 5$ 时, $6^n + 1$ 在十进制下不可能所有数字都相同.

故答案为 n 的值为 1 和 5.

【解析】先列举 $n = 1 \sim 5$ 时的情况, 再证明当 $n > 5$ 时 $6^n + 1$ 在十进制下的所有数字不会再出现都相同的情况, 进而求出 n 符合题意的情况.

本题考查了正整数的 n 次幂的个位数规律, 十进制数的表示方法, 反证法等知识点. 通过反证法证明当 $n > 5$ 的情况是本题的难点.

14. 【答案】 (1) 解: 如图 1 中,



$$\because AD = AE = 2, \quad AB = AC, \quad \angle BAC = \angle DAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle AED = \angle BEF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BFE = 90^\circ, \quad BF = EF, \quad \text{设 } BF = EF = x.$$

$$\text{在 Rt}\triangle ADB \text{ 中, } BD = 2AD = 4,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ADE \text{ 中, } DE = \sqrt{2}AE = 2\sqrt{2},$$

$$\text{在 Rt}\triangle BFD \text{ 中, } \because BD^2 = BF^2 + DF^2,$$

$$\therefore 4^2 = x^2 + (x + 2\sqrt{2})^2,$$

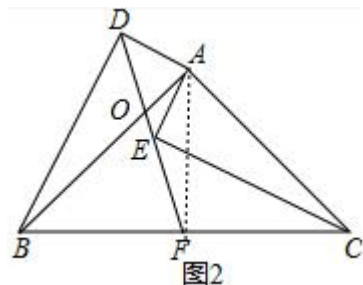
$$\text{解得 } x = \sqrt{6} - \sqrt{2} \text{ 或 } -\sqrt{2} - \sqrt{6} (\text{舍去}),$$

$$\therefore BF = \sqrt{6} - \sqrt{2}, \quad BE = \sqrt{2}BF = 2\sqrt{3} - 2,$$

$$\therefore AB = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore BC = \sqrt{2}AB = 2\sqrt{6}.$$

(2) 证明: 如图 2 中, 连接 AF , AB 交 DF 于 O .



$$\because \angle ADO = \angle FBO, \quad \angle DOA = \angle BOF,$$

$$\therefore \triangle AOD \sim \triangle FOB,$$

$$\therefore \frac{OA}{OF} = \frac{OD}{OB},$$

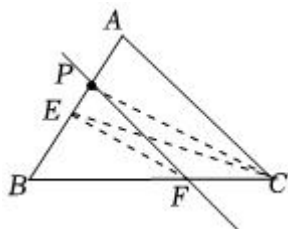
$$\begin{aligned}
&\therefore \frac{OA}{OD} = \frac{OF}{OB}, \\
&\therefore \triangle DOB \sim \triangle AOF, \\
&\therefore \angle BDO = \angle OAF = 45^\circ, \\
&\therefore \angle BDA = \angle BDO + \angle ADO = 90^\circ, \\
&\therefore \angle DAE = \angle BAC = 90^\circ, \\
&\therefore \angle DAB = \angle EAC, \\
&\therefore AD = AE, \quad AB = AC, \\
&\therefore \triangle ADB \cong \triangle AEC, \\
&\therefore \angle ADB = \angle AEC = 90^\circ, \\
&\therefore AE \perp EC.
\end{aligned}$$

【解析】 (1) 设 $BF = EF = x$ ，在 $\text{Rt}\triangle DFB$ 中，利用勾股定理即可解决问题；

(2) 首先证明 $\angle ADB = 90^\circ$ ，再证明 $\triangle ADB \cong \triangle AEC$ ，可得 $\angle ADB = \angle AEC = 90^\circ$ 解决问题；

本题是三角形综合题，考查了全等三角形的判定和性质、相似三角形的判定和性质、勾股定理等知识，解题的关键是灵活运用所学知识，学会添加常用辅助线，构造全等三角形解决问题，属于中考常考题型。

15. 【答案】 解：如图，直线 PF 即为所求。



方法：连接 PC ，作 $\triangle ABC$ 的中线 CE ，过点 E 作 $EF \parallel PC$ 交 BC 一点 F ，作直线 PF 即可。

理由： $\because EC$ 是 $\triangle ABC$ 的中线，

$$\therefore S_{\triangle ACE} = S_{\triangle BCE},$$

$$\therefore EF \parallel CP,$$

$$\therefore S_{\triangle PCE} = S_{\triangle PCF},$$

$$\therefore S_{\triangle BPF} = S_{\text{四边形}APCF},$$

$\therefore$ 直线 PF 即为所求。

【解析】 连接 PC ，作 $\triangle ABC$ 的中线 CE ，过点 E 作 $EF \parallel PC$ 交 BC 一点 F ，作直线 PF 即可。

本题考查作图-应用与设计作图，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题。

16. 【答案】解: $17(xyzt + xy + xt + zt + 1) - 54(yzt + y + t) = 0$,

变形为: $17x(yzt + y + t) + 17(zt + 1) - 54(yzt + y + t) = 0$,

$$17(zt + 1) = 54(yzt + y + t) - 17x(yzt + y + t),$$

$$17(zt + 1) = (54 - 17x)(yzt + y + t),$$

∴求方程的正整数解,

∴ x, y, z, t 都是正整数,

$$\therefore yzt + y + t > zt + 1 > 0,$$

$$\therefore 0 < 54 - 17x < 17,$$

$$\text{解得: } \frac{37}{17} < x < \frac{54}{17},$$

$$\therefore x = 3,$$

$$\therefore 17(zt + 1) = 3(yzt + y + t),$$

$$\text{即 } (17 - 3y)(zt + 1) = 3t,$$

∴ y, z, t 都是正整数,

$$\therefore zt + 1 > t > 0,$$

$$\therefore 0 < 17 - 3y < 3,$$

$$\text{解得: } \frac{14}{3} < y < \frac{17}{3},$$

$$\therefore y = 5,$$

$$\therefore (3 - 2z)t = 2,$$

∴ z, t 都是正整数,

$$\therefore 3 - 2z > 0,$$

$$\text{解得: } z < \frac{3}{2},$$

∴ z 是正整数,

$$\therefore z = 1,$$

$$\therefore t = 2,$$

∴方程 $17(xyzt + xy + xt + zt + 1) - 54(yzt + y + t) = 0$ 的正整数解是 $x = 3, y = 5, z = 1, t = 2$.

【解析】将原方程化为 $17(zt + 1) = (54 - 17x)(yzt + y + t)$, 根据题意得出 $yzt + y + t > zt + 1 > 0$, 进而利用不等式组解答即可.

此题考查非一次不定方程(组), 关键是原方程化为 $17(zt + 1) = (54 - 17x)(yzt + y + t)$ 解答.