

2024 学年南模初中七年级第一学期期中考试数学学科试卷

(考试时间 90 分钟, 满分 100 分)

一、选择题 (本大题共 6 小题, 共 12 分)

1. 有下列代数式: $2x^2, -3, x-2y, \frac{n}{m}, m^3+2m^2-m$, 其中单项式的个数是 ().

- A. 4 个 B. 3 个 C. 2 个 D. 1 个

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了单项式的定义, 由数与字母的积组成的代数式叫作单项式 (特别地, 单独一个数或一个字母也是单项式), 据此逐个分析, 即可作答.

【详解】 解: 依题意, $2x^2, -3$ 是单项式,
故单项式的个数是 2 个.

故选: C.

2. 关于整式的概念, 下列说法正确的是 ().

- A. $-\frac{6\pi x^3 y^2}{7}$ 的系数是 $-\frac{6}{7}$ B. $3^2 xy^3$ 的次数是 6
C. 0 是单项式 D. $-xy^2 + xy - 7$ 是五次三项式

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了单项式与多项式的定义、单项式的系数与次数的概念, 熟记各定义是解题关键. 根据单项式的定义、系数与次数的概念、多项式的定义逐项判断即可得.

【详解】 解: A、 $-\frac{6\pi x^3 y^2}{7}$ 的系数是 $-\frac{6\pi}{7}$, 此项说法错误;

B、 $3^2 xy^3$ 的次数是 $1+3=4$, 此项说法错误;

C、0 是单项式, 此项说法正确;

D、 $-xy^2 + xy - 7$ 是三次三项式, 此项说法错误;

故选: C.

3. 下列各式能用平方差公式计算的是 ()

A. $(a+b)(b+a)$

B. $(2a-b)(2b+a)$

C. $(a+1)(1-a)$

D. $(x+2)(-x-2)$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了平方差公式，运用平方差公式计算时的关键是要找相同项和相反项，其结果是相同项的平方减去相反项的平方。

在四个选项中分别找相同项和相反项，只有 C 选项中具有，其他的都不符合，据此即可解答。

【详解】解：A、 $(a+b)(b+a)$ 中不存在相同的项与互为相反数的项，故不能用平方差公式计算，故本选项错误；

B、 $(2a-b)(2b+a)$ 不存在相同的项与互为相反数的项，故不能用平方差公式计算，故本选项错误；

C、 $(a+1)(1-a)$ 能用平方差公式计算，故本选项正确；

D、 $(x+2)(-x-2)$ 两项都互为相反数，故本选项错误。

故选：C。

4. 下列计算中正确的是 ()

A. $(x^2)^2 = x^5$

B. $x^3 - x^2 = x$

C. $(a-b)^2 = a^2 - b^2$

D. $-x^2 \cdot x = -x^3$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了幂的乘方计算，完全平方公式，同底数幂乘法计算和合并同类项，熟知相关计算法则是解题的关键。

【详解】解：A、 $(x^2)^2 = x^4$ ，原式计算错误，不符合题意；

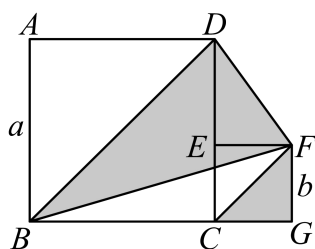
B、 x^3 与 x^2 不是同类项，不能合并，原式计算错误，不符合题意；

C、 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ，原式计算错误，不符合题意；

D、 $-x^2 \cdot x = -x^3$ ，原式计算正确，符合题意；

故选：D。

5. 如图所示，两个正方形的边长分别为 a 和 b ，如果 $a+b=10$ ， $ab=20$ ，那么阴影部分的面积是 ()



- A. 10 B. 20 C. 30 D. 40

【答案】C

【解析】

【分析】 本题考查了完全平方公式的应用，根据题意列出阴影部分面积的表达式是解题的关键.

由图可得阴影部分面积为 $S_{\text{正方形}ABCD} + S_{\text{梯形}DCGF} - S_{\triangle ABD} - S_{\triangle BCF}$ ，列式根据完全平方公式变形再计算即可.

【详解】解：根据题意得：

$$S_{\text{正方形}ABCD} + S_{\text{梯形}DCGF} - S_{\triangle ABD} - S_{\triangle BCF},$$

$$= a^2 + \frac{1}{2}(a+b)b - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}ab$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{2},$$

$$\because a+b=10, \quad ab=20,$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 10^2 - 2 \times 20 = 60,$$

$$\therefore \text{阴影部分的面积} = \frac{a^2 + b^2}{2} = 30.$$

故选：C.

6. 利用如图 1 的二维码可以进行身份识别.某校建立了一个身份识别系统，图 2 是某个学生的识别图案，黑色小正方形表示 1，白色小正方形表示 0.将第一行数字从左到右依次记为 a, b, c, d ，那么可以转换为该生所在班级序号，其序号为 $a \times 2^3 + b \times 2^2 + c \times 2^1 + d \times 2^0$.如图 2 第一行数字从左到右依次为 0, 1, 0, 1，序号为 $0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 5$ ，表示该生为 5 班学生.表示 6 班学生的识别图案是 ()



图1

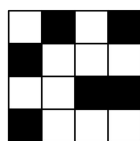
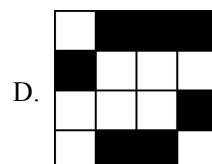
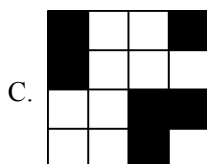
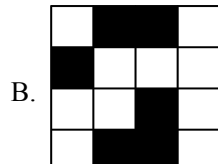
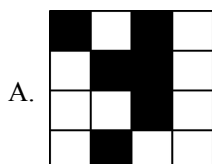


图2



【答案】B

【解析】

【分析】根据班级序号的计算方法一一进行计算即可.

【详解】A. 第一行数字从左到右依次为 1, 0, 1, 0, 序号为 $1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 10$, 表示该生为 10 班学生.

B. 第一行数字从左到右依次为 0, 1, 1, 0, 序号为 $0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 6$, 表示该生为 6 班学生.

C. 第一行数字从左到右依次为 1, 0, 0, 1, 序号为 $1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 9$, 表示该生为 9 班学生.

D. 第一行数字从左到右依次为 0, 1, 1, 1, 序号为 $0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 7$, 表示该生为 7 班学生.
故选 B.

【点睛】属于新定义题目, 读懂题目中班级序号的计算方法是解题的关键.

二、填空题 (本大题共 12 小题, 共 36 分)

7. 在代数式: $\frac{1}{3}x^2$, $2ab$, $x+5$, $\frac{y}{3x}$, -4 , a^3b-a 中, 整式有 _____ 个.

【答案】5

【解析】

【分析】本题主要考查了整式的概念, 掌握整式是单项式与多项式的统称成为解题关键. 根据整式的概念是单项式与多项式的统称逐个判断即可.

【详解】解: 代数式: $\frac{1}{3}x^2$, $2ab$, $x+5$, $\frac{y}{3x}$, -4 , a^3b-a 中的按整式有 $\frac{1}{3}x^2$, $2ab$, $x+5$, -4 , a^3b-a 共有 5 个.

故答案为：5.

8. 如果单项式 $-5a^2b^{m+2}$ 与 $2a^nb$ 的和仍然是一个单项式，则 $m^n = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 1

【解析】

【分析】 本题考查整式的加法、同类项的概念、代数式求值，根据和仍为一个单项式可得单项式 $-5a^2b^{m+2}$ 与 $2a^nb$ 是同类项，然后根据同类项的定义：字母相同，并且相同字母的指数也相同的两个单项式叫同类项求得 m 、 n 值，进而代值求解即可.

【详解】 解： $\because$ 单项式 $-5a^2b^{m+2}$ 与 $2a^nb$ 的和仍然是一个单项式，

$\therefore$ 单项式 $-5a^2b^{m+2}$ 与 $2a^nb$ 是同类项，

$\therefore n = 2, m + 2 = 1$ ，则 $m = -1$ ，

$\therefore m^n = (-1)^2 = 1$ ，

故答案为：1.

9. 多项式 $-\frac{3x^2+4xy-2y^3+6y^2}{5}$ 中，其中三次项的系数是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{2}{5}$ ## 0.4

【解析】

【分析】 本题主要考查了多项式的项的系数，找到该多项式的三次项为 $\frac{2}{5}y^3$ ，即可求解.

【详解】 解： $-\frac{3x^2+4xy-2y^3+6y^2}{5} = -\frac{3}{5}x^2 - \frac{4}{5}xy + \frac{2}{5}y^3 - \frac{6}{5}y^2$ ，

$\therefore$ 三次项为 $\frac{2}{5}y^3$ ，

$\therefore$ 三次项的系数是 $\frac{2}{5}$.

故答案为： $\frac{2}{5}$

10. 计算： $2024^2 - 2023 \times 2025 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 1

【解析】

【分析】 本题考查了平方差的应用，熟练掌握平方差公式是关键．把原式变形为 $2024^2 - (2024 - 1) \times (2024 + 1)$ ，再利用平方差公式计算即可得到答案．

$$\begin{aligned} \text{【详解】解：} & 2024^2 - 2023 \times 2025 \\ &= 2024^2 - (2024 - 1) \times (2024 + 1) \\ &= 2024^2 - (2024^2 - 1) \\ &= 2024^2 - 2024^2 + 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

故答案为：1.

11. 计算： $4^{2022} \times (-0.25)^{2023} =$ _____ .

【答案】 $-0.25 \times -\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】 逆用同底数幂的乘法法则变形，再利用积的乘方的法则进行运算即可．

$$\begin{aligned} \text{【详解】解：} & 4^{2022} \times (-0.25)^{2023} \\ &= 4^{2022} \times (-0.25)^{2022} \times (-0.25) \\ &= (-4 \times 0.25)^{2022} \times (-0.25) \\ &= (-1)^{2022} \times (-0.25) \\ &= -0.25. \end{aligned}$$

故答案为：-0.25.

【点睛】 本题主要考查同底数幂的乘法，积的乘方，解答的关键是对相应的运算法则的掌握．

12. 计算，结果用幂的形式表示： $-(b-a)(a-b)^3(b-a)^4 =$ _____ .

【答案】 $(a-b)^8$

【解析】

【分析】 利用同底数幂的乘法的法则进行运算即可．

【详解】解： $-(b-a)(a-b)^3(b-a)^4 = (a-b)(a-b)^3(a-b)^4 = (a-b)^{1+3+4} = (a-b)^8$ ，

故答案为: $(a-b)^8$.

【点睛】 本题主要考查同底数幂的乘法, 解答的关键是对相应的运算法则的掌握.

13. 若多项式 $(m-2)x^2y^3 - \pi^2xy^{n-1} + 2xy + 1$ 是四次三项式, 则 $m-n = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题考查多项式的定义, 根据多项式是四次三项式可知 $m-2=0$, $n-1=2$, 可得 m 、 n 的值, 即可得解. 掌握多项式的定义是解题的关键. 也考查了求代数式的值.

【详解】 解: $\because$ 多项式 $(m-2)x^2y^3 - \pi^2xy^{n-1} + 2xy + 1$ 是四次三项式,

$$\therefore m-2=0, \quad 1+n-1=4,$$

$$\therefore m=2, \quad n=4,$$

$$\therefore m-n=2-4=-2.$$

故答案为: -2.

14. 已知 $a+b=2$, 则 $\frac{1}{2}a^2 + ab + \frac{1}{2}b^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题主要考查了完全平方公式, 根据 $\frac{1}{2}a^2 + ab + \frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{2}(a+b)^2$ 进行求解即可.

【详解】 解: $\because a+b=2$,

$$\therefore \frac{1}{2}a^2 + ab + \frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{2}(a^2 + 2ab + b^2) = \frac{1}{2}(a+b)^2 = \frac{1}{2} \times 2^2 = 2,$$

故答案为: 2.

15. 已知 $(a^2+b^2+3)(a^2+b^2-3)=7$, 则 $a^2+b^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 4

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程的应用, 掌握换元法成为解题的关键.

设 $t = a^2 + b^2 (t \geq 0)$, 则 $t^2 - 9 = 7$, 然后解关于 t 的方程即可解答.

【详解】 解: 设 $t = a^2 + b^2 (t \geq 0)$, 则原方程转化为 $(t+3)(t-3) = 7$,

整理, 得 $t^2 - 9 = 7$.

解得 $t_1 = 4$, $t_2 = -4$ (舍去).

$$\therefore a^2 + b^2 = 4.$$

故答案为: 4.

16. 如果 $9a^2 - (2k-1)ab + \frac{1}{4}b^2$ 是完全平方公式, 则 $k =$ _____.

【答案】 -1 或 2

【解析】

【分析】 本题主要考查求完全平方公式中的字母系数, 根据完全平方公式中的字母系数的关系进行求解即可

【详解】 解: $\because 9a^2 - (2k-1)ab + \frac{1}{4}b^2 = (3a)^2 - (2k-1)ab + \left(\frac{1}{2}b\right)^2$

$$\therefore -(2k-1) = \pm 2 \times 3 \times \frac{1}{2}$$

解得, $k = -1$ 或 2 ,

故答案为: -1 或 2

17. 已知 $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 = 0$, 那么 $x - y =$ _____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 先将 $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 = 0$, 整理成平方和的形式, 再根据非负数的性质可求出 x, y 的值, 进而可求出 $x - y$ 的值.

【详解】 解: $\because x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 = 0$,

$$\therefore (x+1)^2 + (y-1)^2 = 0,$$

由非负数的性质得: $x = -1$, $y = 1$,

则 $x - y = -2$.

故答案为: -2.

【点睛】 本题考查了完全平方公式, 非负数的性质, 解题的关键是掌握完全平方公式的结构特征.

18. 现有若干根长度相同的火柴棒, 用 a 根火柴棒, 按如图①摆放时可摆成 m 个正方形, 用 b 根火柴棒, 按如图②摆放时可摆成 $2n$ 个正方形. (m, n 是正整数). 当若干根长度相同的火柴棒, 既可以摆成图①的

形状，也可以摆成图②的形状时， m 与 n 之间的数量关系是_____.



图①



图②

【答案】 $3m = 5n + 1$

【解析】

【分析】 本题主要考查了图形类的规律探索，由图可知，图①每多 1 个正方形，多用 3 根火柴棒，则 m 个小正方形共用 $(3m + 1)$ 根火柴棒，图②每多 2 个正方形，多用 5 根火柴棒，则 $2n$ 个小正方形共用 $(5n + 2)$ 根火柴棒，再由若干根长度相同的火柴棒，既可以摆成图①的形状，也可以摆成图②的形状，可得 $3m + 1 = 5n + 2$ ，据此可得答案.

【详解】 解：由图可知，图①每多 1 个正方形，多用 3 根火柴棒，

$\therefore m$ 个小正方形共用 $(3m + 1)$ 根火柴棒，

图②每多 2 个正方形，多用 5 根火柴棒，

$\therefore 2n$ 个小正方形共用 $(5n + 2)$ 根火柴棒，

$\therefore$ 若干根长度相同的火柴棒，既可以摆成图①的形状，也可以摆成图②的形状，

$\therefore 3m + 1 = 5n + 2$ ，

$\therefore 3m = 5n + 1$ ，

故答案为： $3m = 5n + 1$.

三、计算题 (本大题共 8 小题，共 32 分)

19. (1) 分解因式： $(x^2 + 1)^2 - x^2$

(2) 分解因式： $3a + 3a^5 - 6a^3$

【答案】 (1) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$ ； (2) $3a(a + 1)^2(a - 1)^2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了分解因式：

(1) 利用平方差公式分解因式即可；

(2) 先提取公因式 $3a$ ，再利用平方差公式和完全平方公式分解因式即可.

【详解】解: (1) $(x^2 + 1)^2 - x^2$

$$= (x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1);$$

$$(2) 3a + 3a^5 - 6a^3$$

$$= 3a(a^4 - 2a^2 + 1)$$

$$= 3a(a^2 - 1)^2$$

$$= 3a(a + 1)^2(a - 1)^2.$$

$$20. (1) \text{化简: } \left(-\frac{1}{2}ab^2c\right)^2 \cdot \left(-\frac{4}{3}abc^2\right)^3 \cdot 12a^3b$$

$$(2) \text{计算: } (2y - x)(2y + x) - 2(y - x)^2$$

$$(3) \text{计算: } \left(4x^3y^2 - 3x^2y^2 - \frac{1}{2}x^2y^5\right) \div \left(-\frac{1}{2}xy\right)$$

$$(4) \text{化简: } \left(3xy - 2x^2 + \frac{1}{2}y^2\right)\left(3xy + 2x^2 - \frac{1}{2}y^2\right), \text{ 并求当 } x = \frac{1}{2}, y = 2 \text{ 时的代数式的值.}$$

【答案】(1) $-\frac{64}{9}a^8b^8c^8$; (2) $2y^2 - 3x^2 + 4xy$; (3) $-8x^2y + 6xy + xy^4$; (4) $11x^2y^2 - 4x^4 - \frac{1}{4}y^4$,

$\frac{27}{4}$

【解析】

【分析】本题主要考查了整式的混合计算，整式的化简求值:

(1) 先计算积的乘方，再计算单项式乘以单项式即可得到答案;

(2) 先根据乘法公式去括号，然后合并同类项即可得到答案;

(3) 根据多项式除以单项式的计算法则求解即可;

(4) 先把原式变形为 $\left[3xy - \left(2x^2 - \frac{1}{2}y^2\right)\right]\left[3xy + \left(2x^2 - \frac{1}{2}y^2\right)\right]$ ，再利用乘法公式去括号，接着合并同

类项化简，最后代值计算即可.

【详解】解：(1) $\left(-\frac{1}{2}ab^2c\right)^2 \cdot \left(-\frac{4}{3}abc^2\right)^3 \cdot 12a^3b$

$$= \frac{1}{4}a^2b^4c^2 \cdot \left(-\frac{64}{27}a^3b^3c^6\right) \cdot 12a^3b$$

$$= -\frac{64}{9}a^8b^8c^8;$$

(2) $(2y-x)(2y+x) - 2(y-x)^2$

$$= 4y^2 - x^2 - 2(x^2 - 2xy + y^2)$$

$$= 4y^2 - x^2 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

$$= 2y^2 - 3x^2 + 4xy;$$

(3) $\left(4x^3y^2 - 3x^2y^2 - \frac{1}{2}x^2y^5\right) \div \left(-\frac{1}{2}xy\right)$

$$= 4x^3y^2 \div \left(-\frac{1}{2}xy\right) - 3x^2y^2 \div \left(-\frac{1}{2}xy\right) - \frac{1}{2}x^2y^5 \div \left(-\frac{1}{2}xy\right)$$

$$= -8x^2y + 6xy + xy^4;$$

(4) $\left(3xy - 2x^2 + \frac{1}{2}y^2\right)\left(3xy + 2x^2 - \frac{1}{2}y^2\right)$

$$= \left[3xy - \left(2x^2 - \frac{1}{2}y^2\right)\right]\left[3xy + \left(2x^2 - \frac{1}{2}y^2\right)\right]$$

$$= 9x^2y^2 - \left(2x^2 - \frac{1}{2}y^2\right)^2$$

$$= 9x^2y^2 - \left(4x^4 - 2x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4\right)$$

$$= 9x^2y^2 - 4x^4 + 2x^2y^2 - \frac{1}{4}y^4$$

$$= 11x^2y^2 - 4x^4 - \frac{1}{4}y^4,$$

当 $x = \frac{1}{2}, y = 2$ 时, 原式 $= 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 2^2 - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{1}{4} \times 2^4$

$$\begin{aligned}
 &= 11 \times \frac{1}{4} \times 4 - 4 \times \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \times 16 \\
 &= 11 - \frac{1}{4} - 4 \\
 &= \frac{27}{4}.
 \end{aligned}$$

21. 已知 $x - \frac{1}{x} = 3$, 求 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 与 $x^4 + \frac{1}{x^4}$ 的值.

【答案】 11, 119

【解析】

【分析】 将已知的等式左右两边分别平方, 再展开求得.

【详解】 解: $\because x - \frac{1}{x} = 3$,

$$\therefore \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 3^2,$$

$$\therefore x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = 9,$$

$$\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = 11.$$

$$\therefore \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = 11^2,$$

$$\therefore x^4 + 2 + \frac{1}{x^4} = 121,$$

$$\therefore x^4 + \frac{1}{x^4} = 119.$$

【点睛】 本题考查了完全平方公式, 关键是把所求代数式整理为与所给等式相关的形式或与得到结果相关的形式.

22. 已知 $2^n = a$, $5^n = b$, $20^n = c$, 试探究 a , b , c 之间有什么关系.

【答案】 a^2b .

【解析】

【详解】 试题分析: 因为 $20 = 2^2 \times 5$, 所以 $c = 20^n = (2^2 \times 5)^n$, 再根据积的乘方的性质得出 $(2^2 \times 5)^n = 2^{2n} \times 5^n$, 运用幂的乘方的性质得出 $2^{2n} \times 5^n = (2^n)^2 \times 5^n$, 然后将 $2^n = a$, $5^n = b$ 代入即可.

试题解析:

$$\because 20^n = (2^2 \times 5)^n = 2^{2n} \times 5^n = (2^n)^2 \times 5^n = a^2b, \text{ 且 } 20^n = c, \therefore c = a^2b.$$

点睛: 本题考查了幂的乘方与积的乘方, 牢记幂的运算性质, 理清指数的变化是解题的关键.

四、解答题 (27 题 5 分, 28 题 7 分, 29 题 8 分, 共 20 分)

23. 某地光纤上网有两种收费方式, 用户可以任选其一.

A : 计时制: 0.05 元/分, B : 包月制: 50 元/月, 每一种上网时间都要再收取通信费 0.02 元/分

(1) 某用户某月上网时间为 x 小时, 请写出两种收费方式下该用户应该支付的费用.

(2) 用户选哪一种收费方式更合算?

【答案】(1) A 种收费方式的费用为 $4.2x$ 元; B 种收费方式的费用为 $(1.2x + 50)(0.02x + 50)$ 元;

(2) 当上网时间低于 $\frac{5}{3}$ 小时, 选择甲种收费方式合算; 当上网时间等于 $\frac{5}{3}$ 小时, 选择两种收费方式一样合算; 当上网时间高于 $\frac{5}{3}$ 小时, 选择乙种收费方式合算

【解析】

【分析】本题主要考查了列代数式, 一元一次不等式的实际应用, 一元一次方程的实际应用:

(1) A 种收费等于上网费用加上通信费, B 种收费等于包月费用加上通信费, 据此求解即可;

(2) 根据 (1) 所求分别求出 $4.2x < 1.2x + 50$ 时, $4.2x = 1.2x + 50$ 时, $4.2x > 1.2x + 50$ 时的 x 的值或取值范围即可得到答案.

【小问 1 详解】

解: 由题意得, A 种收费方式的费用为 $60 \times (0.05 + 0.02)x = 4.2x$ 元;

B 种收费方式的费用为 $60 \times 0.02x + 50 = (1.2x + 50)$ 元;

【小问 2 详解】

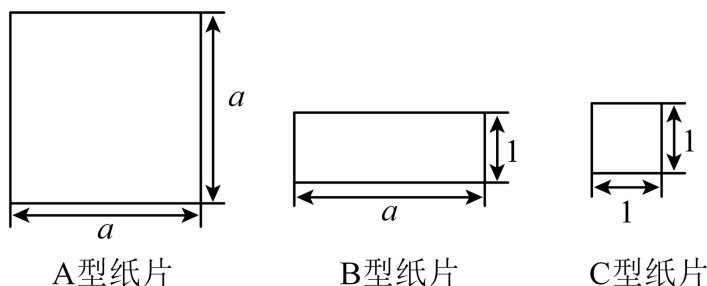
解: 当 $4.2x < 1.2x + 50$ 时, 解得 $x < \frac{5}{3}$;

当 $4.2x = 1.2x + 50$ 时, 解得 $x = \frac{5}{3}$;

当 $4.2x > 1.2x + 50$ 时, 解得 $x > \frac{5}{3}$;

$\therefore$ 当上网时间低于 $\frac{5}{3}$ 小时, 选择甲种收费方式合算; 当上网时间等于 $\frac{5}{3}$ 小时, 选择两种收费方式一样合算; 当上网时间高于 $\frac{5}{3}$ 小时, 选择乙种收费方式合算.

24. 如图, 有 A 型、 B 型、 C 型三种不同的纸板, 其中 A 型: 边长为 a 厘米的正方形; B 型: 长为 a 厘米, 为 1 厘米的长方形; C 型: 边长为 1 厘米的正方形.



- (1) A 型 2 块, B 型 4 块, C 型 4 块. 此时纸板的总面积为_____;
- (2) 从这 10 块纸板中拿掉 1 块 A 型纸板, 剩下的纸板在不重叠的情况下, 可以紧密的排出一个大正方形. 这个大正方形的边长为_____;
- (3) 从这 10 块纸板中拿掉 2 块同类型的纸板, 使得剩下的纸板在不重叠的情况下, 可以紧密的排出两个相同形状的大正方形, 请问拿掉的是 2 块哪种类型的纸板? 此时大正方形的面积是多少平方厘米? (计算说明)

【答案】(1) $(2a^2 + 4a + 4)\text{cm}^2$

(2) $(a + 2)\text{cm}$

(3) $(a^2 + 2a + 1)\text{cm}^2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了列代数式, 因式分解的应用:

(1) 由于 1 块 A 型的面积为 $a^2\text{cm}^2$, 1 块 B 型的面积为 $a\text{cm}^2$, 1 块 C 型的面积为 1cm^2 所以 A 型 2 块, B 型 4 块, C 型 4 块的总面积为 $(2a^2 + 4a + 4)\text{cm}^2$;

(2) 把 $2a^2 + 4a + 4$ 减去 a^2 , 然后根据完全平方公式得到 $a^2 + 4a + 4 = (a + 2)^2$, 由此得到正方形的边长;

(3) 把 $2a^2 + 4a + 4$ 减去 2, 然后根据完全平方公式得到 $2a^2 + 4a + 2 = 2(a + 1)^2$, 由此得到正方形的边长与面积, 所以从这 10 块纸板中拿掉 2 块 C 类型的纸板满足要求, 据此求出正方形边长, 进而求出其面积即可.

【小问 1 详解】

解: 1 块 A 型纸板的面积为 $a^2\text{cm}^2$, 1 块 B 型纸板的面积为 $a\text{cm}^2$, 1 块 C 型纸板的面积为 cm^2 ,

$\therefore$ A 型 2 块, B 型 4 块, C 型 4 块的总面积为 $(2a^2 + 4a + 4)\text{cm}^2$;

故答案为: $(2a^2 + 4a + 4)\text{cm}^2$

【小问 2 详解】

解：从这 10 块纸板中拿掉 1 块 A 型纸板，剩下纸板的总面积为 $2a^2 + 4a + 4 - a^2 = a^2 + 4a + 4$ ，

$\therefore$ 剩下的纸板在不重叠的情况下，可以紧密的排出一个大正方形，且 $a^2 + 4a + 4 = (a + 2)^2$

$\therefore$ 此正方形的边长为 $(a + 2)\text{cm}$ ；

故答案为： $(a + 2)\text{cm}$ ；

【小问 3 详解】

解：从这 10 块纸板中拿掉 2 块 C 类型的纸板，使得剩下的纸板在不重叠的情况下，可以紧密地排出两个相同的大正方形。理由如下：

$$2a^2 + 4a + 4 - 2 = 2a^2 + 4a + 2 = 2(a^2 + 2a + 1) = 2(a + 1)^2,$$

此时正方形的边长为 $(a + 1)\text{cm}$ ，

$$\therefore \text{大正方形面积为：} (a + 1)^2 = (a^2 + 2a + 1)\text{cm}^2.$$

25. 阅读材料：

两个两位数相乘，如果这两个因数的十位数字相同，个位数字的和是 10，该类乘法的速算方法是：将一因数的十位数字与另一个因数的十位数字加 1 的和相乘，所得的积作为计算结果的前两位，将两个因数的个位数字之积作为计算结果的后两位（数位不足两位，用零补齐），比如 47×43 ，它们的乘积的前两位是 $4 \times (4 + 1) = 20$ ，它们乘积的后两位是 $7 \times 3 = 21$ ，所以 $47 \times 43 = 2021$ ；再如 62×68 ，它们乘积的前两位是 $6 \times (6 + 1) = 42$ ，它们乘积的后两位是 $2 \times 8 = 16$ ，所以 $62 \times 68 = 4216$ ；又如 21×29 ， $2 \times (2 + 1) = 6$ ，不足两位，就将 6 写在百位； $1 \times 9 = 9$ ，不足两位，就将 9 写在个位，十位上写零，所以 $21 \times 29 = 609$ 。

该速算方法可以用我们所学的整式的乘法知识说明其合理性：

设其中一个因数的十位数字为 a ，个位数字是 b ，（ a, b 表示 1 到 9 的整数）则该数可表示为 $10a + b$ ，另一因数可表示为 $10a + (10 - b)$ 。两数相乘可得：

$$\begin{aligned} & (10a + b)[10a + (10 - b)] \\ &= 100a^2 + 10a(10 - b) + 10ab + b(10 - b) \\ &= 100a^2 + 100a + b(10 - b) \\ &= 100a(a + 1) + b(10 - b). \end{aligned}$$

(注：其中 $a(a+1)$ 表示计算结果的前两位， $b(10-b)$ 表示计算结果的后两位)

问题：两个两位数相乘，如果其中一个因数的十位数字与个位数字相同，另一因数的十位数字与个位数字之和是 10。如 44×73 、 77×28 、 55×64 等

(1) 探索该类乘法的速算方法，请以 44×73 为例写出你的计算步骤。

(2) 设十位数字与个位数字相同的因数的十位数字是 a ，则该数可以表示为_____。

设另一因数的十位数字是 b ，则该数可以表示为_____。(a, b 表示 1~9 的正整数)

(3) 请模仿阅读材料中所用的方法说明你速算方法的合理性。

【答案】 (1) 两个两位数相乘，如果其中一个因数的十位数字与个位数字相同，另一因数的十位数字与个位数字之和是 10，那么将十位数字与个位数字相同的因数的十位数字与另一个因数的十位数字加 1 的和相乘，所得的积作为计算结果的前两位，将两个因数的个位数字之积作为计算结果的后两位（数位不足的两，用零补齐），3212

(2) $11a$ ； $9b+10$

(3) 见解析

【解析】

【分析】 本题主要考查了多项式乘以多项式，列代数式，有理数的乘法计算：

(1) 两个两位数相乘，如果其中一个因数的十位数字与个位数字相同，另一因数的十位数字与个位数字之和是 10，那么将十位数字与个位数字相同的因数的十位数字与另一个因数的十位数字加 1 的和相乘，所得的积作为计算结果的前两位，将两个因数的个位数字之积作为计算结果的后两位（数位不足的两，用零补齐），据此求解即可；

(2) 一个两位数的十位数字乘以 10 再加上这个两位数的个位数字即为该两位数表示的数，据此求解即可；

(3) $11a \cdot (9b+10) = (10a+a)[10b+(10-b)]$ ，进一步根据多项式乘以多项式的计算法则得到 $11a \cdot (9b+10) = 100a(b+1) + a(10-b)$ ，据此可证明结论。

【小问 1 详解】

解：两个两位数相乘，如果其中一个因数的十位数字与个位数字相同，另一因数的十位数字与个位数字之和是 10，那么将十位数字与个位数字相同的因数的十位数字与另一个因数的十位数字加 1 的和相乘，所得的积作为计算结果的前两位，将两个因数的个位数字之积作为计算结果的后两位（数位不足的两，用零补齐），

44×73

$$= 100 \times [(7+1) \times 4] + 4 \times 3$$

$$= 3200 + 12$$

$$= 3212;$$

【小问 2 详解】

解：设十位数字与个位数字相同的因数的十位数字是 a ，则该数可以表示为 $10a + a = 11a$ ；

设另一因数的十位数字是 b ，则该数可以表示为 $10b + (10 - b) = 9b + 10$ ，

故答案为： $11a$ ； $9b + 10$ ；

【小问 3 详解】

证明： $11a \cdot (9b + 10)$

$$= (10a + a)[10b + (10 - b)]$$

$$= 100ab + 10ab + 10a(10 - b) + a(10 - b)$$

$$= 100ab + 10ab + 100a - 10ab + a(10 - b)$$

$$= 100a(b + 1) + a(10 - b),$$

$\therefore$ 两个两位数相乘，如果其中一个因数的十位数字与个位数字相同，另一因数的十位数字与个位数字之和是 10，那么将十位数字与个位数字相同的因数的十位数字与另一个因数的十位数字加 1 的和相乘，所得的积作为计算结果的前两位，将两个因数的个位数字之积作为计算结果的后两位（数位不足的两位，用零补齐）。