

# 上海田家炳中学 2024 学年第一学期期中考试

## 初一年级数学试卷 (2024.10)

(考试时间: 100 分钟, 试卷满分 100 分)

(注意: 所有答案务必写在答题卡上, 写在试卷上不给分.)

### 一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 下列代数式  $\frac{x+a}{2}$ ,  $2x^2y$ ,  $\frac{1}{m}$ ,  $\frac{7a}{3-b}$ ,  $-2$ ,  $x^2+8x-1$  中, 单项式有 ( )

- A. 1 个                      B. 2 个                      C. 3 个                      D. 4 个

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了单项式. 数或字母的积组成的式子叫做单项式, 单独的一个数或字母也是单项式, 由此判断即可.

【详解】 解:  $\frac{1}{m}$ ,  $\frac{7a}{3-b}$  不是整式, 不是单项式,

$\frac{x+a}{2}$ ,  $x^2+8x-1$  不是单项式,

单项式有:  $2x^2y$ ,  $-2$ , 共 2 个.

故选: B.

2. 下列运算正确的是 ( )

- A.  $(a^2)^3 = a^5$               B.  $\left(-\frac{2}{3}y^2\right)^2 = \frac{4}{3}y$               C.  $a^6 \div a^3 = a^2$               D.  $a^2 \cdot a^3 = a^5$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查了幂的乘方、积的乘方、同底数幂的乘法以及同底数幂的除法. 利用幂的乘方、积的乘方、同底数幂的乘法以及同底数幂的除法法则求解即可求得答案.

【详解】 解: A、 $(a^2)^3 = a^6 \neq a^5$ , 故本选项不符合题意;

B、 $\left(-\frac{2}{3}y^2\right)^2 = \frac{4}{9}y^4 \neq \frac{4}{3}y$ , 故本选项不符合题意;

C、 $a^6 \div a^3 = a^3 \neq a^2$ , 故本选项不符合题意;

D、 $a^2 \cdot a^3 = a^5$ ，故本选项符合题意.

故选：D.

3. 在下列多项式乘法中，能用完全平方公式计算的是（ ）

- A.  $(a-b)(a+b)$       B.  $(-a-b)(b-a)$       C.  $(a-b)(b-a)$       D.  $(a-b)(-a-b)$

【答案】C

【解析】

【分析】利用完全平方公式判断即可.

【详解】解：A、 $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ ，能用平方差公式，故此选项不符合题意；

B、 $(-a-b)(b-a) = (-a-b)(-a+b) = a^2 - b^2$ ，能用平方差公式，故此选项不符合题意；

C、 $(a-b)(b-a) = -(a-b)(a-b) = -(a-b)^2$ ，能用完全平方公式，故此选项符合题意；

D、 $(a-b)(-a-b) = -(a-b)(a+b) = b^2 - a^2$ ，能用平方差公式，故此选项不符合题意；

故选：C.

【点睛】此题考查了完全平方公式和平方差公式，熟练掌握完全平方公式是解本题的关键.

4. 下列代数式  $\frac{-6xy}{3x}$ ， $\frac{y^2-x^2}{x-y}$ ， $\frac{x^2+y^2}{x+y}$ ， $\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$ ， $\frac{6}{x^2-9}$  中，最简分式的个数有（ ）

- A. 1 个      B. 2 个      C. 3 个      D. 4 个

【答案】B

【解析】

【分析】本题解题关键是理解最简分式的概念：一个分式的分子与分母没有非零次的公因式时叫最简分式. 把题干中的分式的分子分母通过因式分解的方法找到公因式，然后进行约分. 若分子分母没有公因式则为最简分式.

【详解】解：  $\frac{-6xy}{3x} = -2y$ ，

$$\frac{y^2-x^2}{x-y} = \frac{(y-x)(y+x)}{x-y} = -(y+x) = -y-x,$$

$$\frac{x^2-1}{x^2+2x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x-1}{x+1},$$

$\frac{x^2+y^2}{x+y}$  和  $\frac{6}{x^2-9}$ ，都不能化简，所以是最简分式，共 2 个.

故选：B.

5. 若  $z^2 - kz - 15 = (z+a)(z+b)$ ，则  $a+b$  的值不可能为 ( )

- A. 14                      B. 16                      C. 2                      D. -14

【答案】B

【解析】

【分析】根据  $ab = -15$ ，分类讨论  $a$ 、 $b$  的取值，对各选项分析判断后利用排除法求解.

【详解】根据  $ab = -15$ ， $a$ 、 $b$  的值可以是：-1，15；1，-15；-3，5；3，-5 四种，

$$a+b = -1+15=14;$$

$$a+b = 1+(-15)=-14;$$

$$a+b = -3+5=2;$$

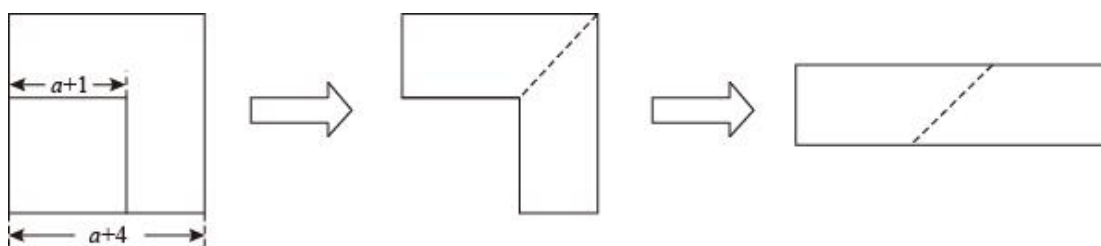
$$a+b = 3+(-5)=-2$$

所以不可能是 16,

故选：B

【点睛】本题考查了因式分解-十字相乘法，熟练掌握十字相乘法是解本题的关键.

6. 如图，从边长为  $(a+4)$  cm 的正方形纸片中剪去一个边长为  $(a+1)$  cm 的正方形 ( $a > 0$ )，剩余部分沿虚线又剪拼成一个矩形 (不重叠无缝隙)，则矩形的面积为 ( )



- A.  $(2a^2 + 5a)\text{cm}^2$       B.  $(3a+15)\text{cm}^2$       C.  $(6a+9)\text{cm}^2$       D.  $(6a+15)\text{cm}^2$

【答案】D

【解析】

【分析】利用大正方形的面积减去小正方形的面积即可，注意完全平方公式的计算.

【详解】解：矩形的面积为：

$$(a+4)^2 - (a+1)^2$$

$$\begin{aligned}
 &= (a^2 + 8a + 16) - (a^2 + 2a + 1) \\
 &= a^2 + 8a + 16 - a^2 - 2a - 1 \\
 &= 6a + 15.
 \end{aligned}$$

故选：D.

## 二、填空题：(本大题共 14 题，每题 2 分，满分 28 分)

7.  $-\frac{5a^2b^3c}{4}$  是 \_\_\_\_\_ 次单项式，它的系数是 \_\_\_\_\_.

【答案】 ①. 6; ②.  $-\frac{5}{4}$ .

【解析】

【分析】根据单项式系数、次数的定义来求解. 单项式中数字因数叫做单项式的系数，所有字母的指数和叫做这个单项式的次数.

【详解】代数式  $-\frac{5a^2b^3c}{4}$  的次数为：2+3+1=6；系数为：  $-\frac{5}{4}$ .

故答案为：6;  $-\frac{5}{4}$ .

【点睛】本题考查了单项式系数、次数的定义. 确定单项式的系数和次数时，把一个单项式分解成数字因数和字母因式的积，是找准单项式的系数和次数的关键.

8. 已知  $A$ 、 $B$  表示两个不同的多项式，且  $A - B = x^2 - 1$ ， $A = -2x^2 + 2x - 3$ ，则多项式  $B$  是 \_\_\_\_\_.

【答案】  $-3x^2 + 2x - 2$

【解析】

【分析】直接去括号进而合并同类项得出答案.

【详解】 $\because A - B = x^2 - 1$ ， $A = -2x^2 + 2x - 3$ ，

$$\begin{aligned}
 \therefore B &= A - (x^2 - 1) \\
 &= -2x^2 + 2x - 3 - (x^2 - 1) \\
 &= -3x^2 + 2x - 2.
 \end{aligned}$$

故答案为：  $-3x^2 + 2x - 2$ .

【点睛】此题主要考查了整式的加减，正确合并同类项是解题关键.

9.  $x^{m-1}y$  与  $\frac{2}{5}x^2y^{n-4}$  的和是一个单项式，则  $m+n=$  \_\_\_\_\_.

【答案】 8.

【解析】

【分析】因单项式  $x^{m-1}y$  与  $\frac{2}{5}x^2y^{n-4}$  的和是一个单项式，说明单项式  $x^{m-1}y$  与  $\frac{2}{5}x^2y^{n-4}$  能合并，即是同类项，结合同类项的定义中相同字母的指数也相同的条件，可求  $m$  和  $n$  的值，再求  $m+n$  的值即可。

【详解】 $\because$  单项式  $x^{m-1}y$  与  $\frac{2}{5}x^2y^{n-4}$  的和是一个单项式

$\therefore$  单项式  $x^{m-1}y$  与  $\frac{2}{5}x^2y^{n-4}$  能合并，即是同类项，

故：  $m-1=2, n-4=1$ , 即  $m=3, n=5$ ,

$\therefore m+n=8$

故答案为 8.

【点睛】此题考查同类项，解题关键在于掌握同类项的定义求解即可。

10. 已知：  $5^m = a$ ,  $5^n = b$ , 则  $5^{2m+3n} =$  \_\_\_\_\_

【答案】  $a^2b^3$

【解析】

【分析】本题考查了同底数幂的乘法及幂的乘方运算的逆用。根据同底数幂的乘法及幂的乘方运算的逆用，即可求解。

【详解】解：  $\because 5^m = a$ ,  $5^n = b$ ,

$\therefore 5^{2m+3n}$

$= 5^{2m} \cdot 5^{3n}$

$= (5^m)^2 \cdot (5^n)^3$

$= a^2b^3$ .

故答案为：  $a^2b^3$ .

11. 计算  $(x-2y+z) \cdot (x+2y-z) =$  \_\_\_\_\_

【答案】  $x^2 - 4y^2 + 4yz - z^2$

【解析】

【分析】本题考查的是乘法公式的应用；本题先利用平方差公式计算，再利用完全平方公式进行计算即可。

【详解】解：  $(x-2y+z) \cdot (x+2y-z)$

$= [x - (2y - z)][x + (2y - z)]$

$$= x^2 - (2y - z)^2$$

$$= x^2 - 4y^2 + 4yz - z^2;$$

故答案为:  $x^2 - 4y^2 + 4yz - z^2$ .

12. 若分式  $\frac{2-|x|}{x^2-2x-8}$  的值为零, 则  $x$  的值为\_\_\_\_\_.

【答案】 2

【解析】

【分析】 根据分式的值为零的条件可以求出  $x$  的值.

【详解】 解: 由分式的值为零的条件得  $2-|x|=0$ ,  $x^2-2x-8 \neq 0$ ,

$\therefore x = \pm 2$  且  $x \neq 4$  且  $x \neq -2$ ,

$\therefore x=2$  时, 分式的值为 0,

故答案为 2.

【点睛】 本题考查了分式值为 0 的条件, 若分式的值为零, 需同时具备两个条件: (1) 分子为 0; (2) 分母不为 0. 这两个条件缺一不可.

13. 计算:  $-2a^2\left(\frac{1}{2}ab + b^2\right) - 5a(a^2b - ab^2) =$ \_\_\_\_\_

【答案】  $-6a^3b + 3a^2b^2$

【解析】

【分析】 先计算整式的乘法, 再计算整式的加减法即可得.

【详解】 原式  $= -a^3b - 2a^2b^2 - 5a^3b + 5a^2b^2$ ,

$$= -6a^3b + 3a^2b^2,$$

故答案为:  $-6a^3b + 3a^2b^2$ .

【点睛】 本题考查了整式的乘法与加减法, 熟练掌握整式的运算法则是解题关键.

14.  $16x^2 + kxy + 9y^2$  是完全平方式, 则  $k =$ \_\_\_\_\_.

【答案】  $\pm 24$

【解析】

【分析】 根据两数的平方和加上或减去两数积的 2 倍等于两数和或差的完全平方, 即可求出  $k$  的值.

【详解】 $\because 16x^2+kxy+9y^2$  是完全平方式，

$\therefore k=\pm 24$ ，

故答案为： $\pm 24$ 。

【点睛】此题考查了完全平方公式，熟练掌握完全平方公式是解本题的关键。

15. 化简：  $\frac{18xy}{27x^2y^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ ，  $\frac{x^2-4}{x^2+5x+6} = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案】 ①.  $\frac{2}{3xy}$  ②.  $\frac{x-2}{x+3}$

【解析】

【分析】本题主要考查了分式的约分，掌握分式的基本性质是解答本题的关键。根据分式的基本性质解答即可。

【详解】解：  $\frac{18xy}{27x^2y^2} = \frac{2}{3xy}$ ，

$$\frac{x^2-4}{x^2+5x+6} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x+3)} = \frac{x-2}{x+3}，$$

故答案为：  $\frac{2}{3xy}$ ，  $\frac{x-2}{x+3}$ 。

16. 已知：  $x+y=5$ ，  $x^2+y^2=13$ ， 则代数式  $x^3y-3x^2y^2+xy^3$  的值为  $\underline{\hspace{2cm}}$

【答案】  $-30$

【解析】

【分析】本题考查了完全平方公式的应用。根据题意得出  $(x+y)^2=25$ ，求得  $xy=6$ ，将  $x^3y-3x^2y^2+xy^3$  化简为  $xy(x^2-3xy+y^2)$ ，再整体代入，即可得出答案。

【详解】解：  $\because x+y=5$ ，  $x^2+y^2=13$ ，

$$\therefore (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 25，$$

$$\therefore xy = 6，$$

$$\therefore x^3y - 3x^2y^2 + xy^3$$

$$= xy(x^2 - 3xy + y^2)$$

$$= 6 \times (13 - 3 \times 6)$$

$$= -30,$$

故答案为：-30.

17. 已知  $a = 2017x + 2016$ ,  $b = 2017x + 2017$ ,  $c = 2017x + 2018$ , 那么  $a^2 - ab - ac + bc =$  \_\_\_\_\_

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查了利用因式分解进行简便计算，解题关键是要将  $a^2 - ab - ac + bc$  因式分解. 先将  $a^2 - ab - ac + bc$  因式分解为  $(a-b)(a-c)$ ，再将其值代入计算即可.

【详解】 解：  $\because a = 2017x + 2016$ ,  $b = 2017x + 2017$ ,  $c = 2017x + 2018$ ,

$$\therefore a^2 - ab - ac + bc$$

$$= a(a-b) - c(a-b)$$

$$= (a-b)(a-c)$$

$$= [2017x + 2016 - (2017x + 2017)][2017x + 2016 - (2017x + 2018)]$$

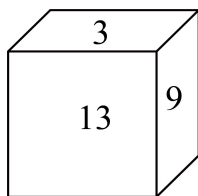
$$= (2017x + 2016 - 2017x - 2017)(2017x + 2016 - 2017x - 2018)$$

$$= (-1) \times (-2)$$

$$= 2$$

故答案为：2.

18. 如图，正方体的每一个面上都有一个正整数，已知相对的两个面上两数之和都相等. 如果 13、9、3 对面的数分别为  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ，则  $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$  的值为 \_\_\_\_\_



【答案】 76

【解析】

【分析】 本题主要考查了整式的混合运算—化简求值问题. 本题须先求出  $a-b=-4$ ,  $b-c=-6$ ,  $c-a=10$ , 再通过对要求的式子进行化简整理，代入相应的值即可求出结果.

【详解】解：∵正方体的每一个面上都有一个正整数，相对的两个面上两数之和都相等，

$$\therefore a+13=b+9=c+3,$$

$$\therefore a-b=-4, \quad b-c=-6, \quad c-a=10,$$

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$

$$= \frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$$

$$= \frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2}$$

$$= \frac{(-4)^2+(-6)^2+10^2}{2}$$

$$= 76,$$

故答案为：76.

### 三、计算题：（本题共4题，每题4分，满分16分）

19. 化简： $(2x+5)^2-(2x-1)(2x+1)$

【答案】 $20x+26$

【解析】

【分析】本题考查了平方差公式，以及完全平方公式。利用完全平方公式和平方差公式去括号，再合并同类项即可。

【详解】解： $(2x+5)^2-(2x-1)(2x+1)$

$$= (4x^2+20x+25)-(4x^2-1)$$

$$= 4x^2+20x+25-4x^2+1$$

$$= 20x+26.$$

20. 化简： $(a^2b+ab^2-3b^3) \cdot (4ab^2) - (-2ab^2)^2$

【答案】 $4a^3b^3-12ab^5$

【解析】

【分析】本题考查了单项式乘多项式，积的乘方。利用单项式乘多项式，积的乘方计算，再合并同类项即可求解。

【详解】解： $(a^2b+ab^2-3b^3) \cdot (4ab^2) - (-2ab^2)^2$

$$\begin{aligned}
 &= a^2b \cdot (4ab^2) + ab^2 \cdot (4ab^2) - 3b^3 \cdot (4ab^2) - 4a^2b^4 \\
 &= 4a^3b^3 + 4a^2b^4 - 12ab^5 - 4a^2b^4 \\
 &= 4a^3b^3 - 12ab^5.
 \end{aligned}$$

21. 化简:  $\frac{x^2-1}{x^2+2x+1} \div \frac{2x^2-2}{4x^2+8x+4} \div (x-1)^2$

【答案】  $\frac{2}{(x-1)^2}$

【解析】

【分析】 本题考查了分式的除法运算，解题的关键是掌握分式的除法运算法则．先将分式的分子和分母分别因式分解，再根据分式的除法运算法则计算即可．

【详解】 解:  $\frac{x^2-1}{x^2+2x+1} \div \frac{2x^2-2}{4x^2+8x+4} \div (x-1)^2$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x^2-1}{(x+1)^2} \div \frac{2(x^2-1)}{4(x+1)^2} \div (x-1)^2 \\
 &= \frac{x^2-1}{(x+1)^2} \cdot \frac{4(x+1)^2}{2(x^2-1)} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{2}{(x-1)^2}
 \end{aligned}$$

22. 计算:  $\frac{2x}{x-1} + \frac{1}{x+3} - \frac{3x+5}{x^2+2x-3}$

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查的是分式的加减运算，先通分，再约分即可．

【详解】 解:  $\frac{2x}{x-1} + \frac{1}{x+3} - \frac{3x+5}{x^2+2x-3}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2x(x+3)}{(x-1)(x+3)} + \frac{x-1}{(x-1)(x+3)} - \frac{3x+5}{(x-1)(x+3)} \\
 &= \frac{2x^2+4x-6}{(x-1)(x+3)}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{2(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+3)}$$

$$= 2.$$

#### 四、因式分解（本题共 4 题，每题 4 分，满分 16 分）

23. 因式分解：  $9(x+y)^2 - 4(x-y)^2$

**【答案】**  $(5x+y)(x+5y).$

**【解析】**

**【分析】** 利用平方差公式  $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$  即可得.

**【详解】** 原式  $= [3(x+y)]^2 - [2(x-y)]^2,$

$$= (3x+3y)^2 - (2x-2y)^2,$$

$$= (3x+3y+2x-2y)(3x+3y-2x+2y),$$

$$= (5x+y)(x+5y).$$

**【点睛】** 本题考查了利用平方差公式进行因式分解，因式分解的主要方法包括：提取公因式法、公式法、十字相乘法、分组分解法等，熟练掌握各方法是解题关键.

24. 因式分解：  $x^3 + 5x^2y - 24xy^2$

**【答案】**  $x(x-3y)(x+8y)$

**【解析】**

**【分析】** 本题考查因式分解，熟练掌握因式分解的几种方法是关键，先提公因式  $x$ ，再进行十字相乘法因式分解.

**【详解】** 解：  $x^3 + 5x^2y - 24xy^2$

$$= x(x^2 + 5xy - 24y^2)$$

$$= x(x-3y)(x+8y)$$

25. 因式分解：  $(a^2 - 4a)^2 + 8(a^2 - 4a) + 16$

**【答案】**  $(a-2)^4$

**【解析】**

【分析】 本题考查因式分解的知识，解题的关键是掌握因式分解的方法公式法， $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ ，即可。

$$\begin{aligned} \text{【详解】 } & (a^2 - 4a)^2 + 8(a^2 - 4a) + 16 \\ &= (a^2 - 4a + 4)^2 \\ &= [(a - 2)^2]^2 \\ &= (a - 2)^4. \end{aligned}$$

26. 因式分解：  $x^2 - 8xy + 16y^2 - 3x + 12y - 10$

$$\text{【答案】 } (x - 4y - 5)(x - 4y + 2)$$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解. 前三项利用十字相乘法分解，再将  $(x - 4y)$  看作整体，然后利用十字相乘法分解继续分解即可。

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解： } & x^2 - 8xy + 16y^2 - 3x + 12y - 10 \\ &= (x - 4y)^2 - 3(x - 4y) - 10 \\ &= (x - 4y - 5)(x - 4y + 2). \end{aligned}$$

五、解答题：（本大题共 4 题，4+6+6+6，满分 22 分）

27. 已知  $3 \times 9^m \times 27^m = 3^{21}$ ，求  $(-m^2)^3 \div (m^3 \cdot m^2)$  的值。

$$\text{【答案】 } -4$$

【解析】

【分析】 根据幂的乘方，可得同底数幂的乘法，根据同底数幂的乘法，可得底数相等的幂，可得关于  $m$  的方程，根据解方程，可得  $m$  的值，根据积的乘方、同底数幂的乘法，可得同底数幂的除法，再根据同底数幂的除法，可得答案。

【详解】 转化为同底数幂的乘法，求出  $m$  的值，即可解答。

$$\text{解： } 3 \times 9^m \times 27^m = 3 \times 3^{2m} \times 3^{3m} = 3^{1+5m} = 3^{21},$$

$$\therefore 1+5m=21,$$

$$\therefore m=4,$$

$$\therefore (-m^2)^3 \div (m^3 \cdot m^2) = -m^6 \div m^5 = -m = -4.$$

【点睛】此题考查了整式的混合运算，幂的乘方与积的乘方，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

28. 已知  $P = 3x^2 + mx - \frac{1}{3}y + 4$ ,  $Q = 2x - 3y + 1 - nx^2$ ,

(1) 关于  $x, y$  的式子  $P - 2Q$  的取值与字母  $x$  的取值无关, 求式子  $(m + 3n) - (3m - n)$  的值;

(2) 当  $x \neq 0$  且  $y \neq 0$  时, 若  $3P - \frac{1}{3}Q = \frac{35}{3}$  恒成立, 求  $m, n$  的值.

【答案】(1)  $-14$ ; (2)  $m = \frac{2}{9}$ ,  $n = -27$ .

【解析】

【分析】(1) 首先化简  $P - 2Q$ , 然后根据其取值与字母  $x$  的取值无关列出  $m, n$  的方程, 求出  $m, n$  的值, 再代入求值即可;

(2) 首先化简  $3P - \frac{1}{3}Q$ , 然后根据  $3P - \frac{1}{3}Q = \frac{35}{3}$  恒成立列出  $m, n$  的方程, 求出  $m, n$  的值即可.

【详解】解: (1)  $P - 2Q = 3x^2 + mx - \frac{1}{3}y + 4 - 2(2x - 3y + 1 - nx^2)$ ,  
 $= 3x^2 + mx - \frac{1}{3}y + 4 - 4x + 6y - 2 + 2nx^2$ ,  
 $= (3 + 2n)x^2 + (m - 4)x + \frac{17}{3}y + 2$ ,

$\therefore$  式子  $P - 2Q$  的取值与字母  $x$  的取值无关,

$$\therefore 3 + 2n = 0, \quad m - 4 = 0,$$

$$\therefore m = 4, \quad n = -\frac{3}{2},$$

$$\therefore (m + 3n) - (3m - n) = 4n - 2m = -6 - 8 = -14;$$

$$(2) \quad 3P - \frac{1}{3}Q = 3\left(3x^2 + mx - \frac{1}{3}y + 4\right) - \frac{1}{3}(2x - 3y + 1 - nx^2),$$

$$= (9x^2 + 3mx - y + 12) - \left(\frac{2}{3}x - y + \frac{1}{3} - \frac{n}{3}x^2\right),$$

$$= 9x^2 + 3mx - y + 12 - \frac{2}{3}x + y - \frac{1}{3} + \frac{n}{3}x^2,$$

$$= \left(9 + \frac{n}{3}\right)x^2 + \left(3m - \frac{2}{3}\right)x + \frac{35}{3},$$

$$\therefore 3P - \frac{1}{3}Q = \frac{35}{3} \text{ 恒成立,}$$

$$\therefore 9 + \frac{n}{3} = 0, \quad 3m - \frac{2}{3} = 0,$$

$$\therefore m = \frac{2}{9}, \quad n = -27.$$

【点睛】本题主要考查了整式的加减运算，熟练掌握去括号法则与合并同类项法则是解题关键.

29. 先化简，再求值：  $\frac{x^2-4x+4}{x+1} \div \left( \frac{3}{x+1} - x + 1 \right)$ ，请从不等式组  $\begin{cases} 5-2x \geq 1 \\ x+1 > 0 \end{cases}$  的整数解中选择一个合适的

值代入求值

【答案】  $\frac{2-x}{2+x}$ ，当  $x=1$  时，原式为  $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】本题考查了分式的化简求值，解不等式组，解题的关键是掌握相关知识. 先求出不等式组的解集，再将所求的分式化简，最后代入合适的值计算即可，注意不要选使原分式无意义的值.

【详解】解：  $\begin{cases} 5-2x \geq 1 \text{ ①} \\ x+1 > 0 \text{ ②} \end{cases}$ ，

解不等式①得：  $x \leq 2$ ，

解不等式②得：  $x > -1$ ，

$\therefore$  不等式组的解集为  $-1 < x \leq 2$ ，

$\therefore$  不等式组的整数解为： 0， 1， 2，

$$\begin{aligned} & \frac{x^2-4x+4}{x+1} \div \left( \frac{3}{x+1} - x + 1 \right) \\ &= \frac{(x-2)^2}{x+1} \div \left( \frac{3}{x+1} - \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} \right) \\ &= \frac{(x-2)^2}{x+1} \div \frac{4-x^2}{x+1} \\ &= \frac{(x-2)^2}{x+1} \cdot \frac{x+1}{4-x^2} \\ &= \frac{(2-x)^2}{x+1} \cdot \frac{x+1}{(2+x)(2-x)} \end{aligned}$$

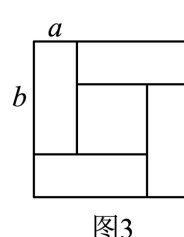
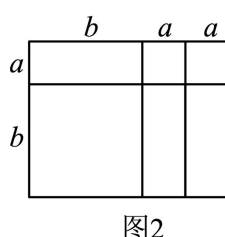
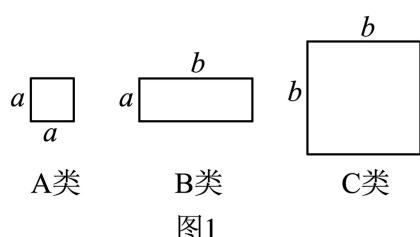
$$= \frac{2-x}{2+x};$$

$$\because x+1 \neq 0, \frac{4-x^2}{x+1} \neq 0,$$

$$\therefore x \neq -1, x \neq \pm 2,$$

$$\text{当 } x=1 \text{ 时, 原式} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}.$$

30. 数形结合是解决数学问题的重要思想方法, 借助图形可以对很多数学问题进行直观推导和解释. 如图 1, 有足够多的边长为  $a$  的小正方形, 长为  $b$ 、宽为  $a$  的长方形以及边长为  $b$  的大正方形.



利用图①中的三种材料各若干可以拼出一些长方形来解释某些等式, 例如图 2 可以解释整式乘法:

$$(2a+b)(a+b) = 2a^2 + 3ab + b^2, \text{ 也可以解释因式分解: } 2a^2 + 3ab + b^2 = (2a+b)(a+b).$$

(1) 若用 4 个 B 类材料围成图 3 的形状, 设外围大正方形的边长为  $x$ , 内部小正方形的边长为  $y$ , 观察图案, 指出下列关系式中正确的是 (写出所有正确结论的序号) \_\_\_\_\_.

①  $a+b=x$ ; ②  $(x-y)^2 = 2a^2$ ; ③  $ab = \frac{x^2-y^2}{4}$ ; ④  $b^2 = a^2 + xy$ ; ⑤  $a^2 + b^2 = \frac{x^2+y^2}{2}$ .

(2) 若取其中的若干个 (三种图形都要取到) 拼成一个长方形, 使其面积为  $3a^2 + 5ab + 2b^2$ , 在虚框中画出图形, 并根据所画图形, 将多项式  $3a^2 + 5ab + 2b^2$  分解因式为\_\_\_\_\_.



(3) 若取其中的若干个 (三种图形都要取到) 拼成一个长方形, 使其面积为  $4a^2 + mab + 5b^2$  则  $m$  的值为\_\_\_\_\_. (直接写出结果)

【答案】(1) ①③④⑤

(2) 画图见解析,  $(3a+2b)(a+b)$

(3) 9 或 21 或 12

### 【解析】

【分析】 本题考查整式乘法与图形面积的关系, 掌握数形结合思想成为解题关键.

(1) 根据图形表示出两个正方形边长与  $a$ 、 $b$  的关系  $x=b+a$ 、 $y=b-a$ , 结合面积加减计算逐个判断即可;

(2) 根据整式得到两个大正方形、两个小正方形、五个长方形, 然后画出图形即可解答;

(3) 根据因式分解平方项凑长宽展开求解即可解答.

### 【小问 1 详解】

解: 由图形可得,  $x=b+a$ 、 $y=b-a$ , 故①正确,

$\therefore (x-y)^2 = (b+a-b+a)^2 = 4a^2$ , 即②错误;

由图形可得,  $4ab = x^2 - y^2$ , 即  $ab = \frac{x^2 - y^2}{4}$ , 即③正确;

$\because x=b+a$ 、 $y=b-a$ ,

$\therefore xy = b^2 - a^2$ , 即  $b^2 = xy + a^2$ , 即④正确;

$\because x^2 + y^2 = (a+b)^2 + (b-a)^2 = 2a^2 + 2b^2$ ,  $a^2 + b^2 = \frac{x^2 + y^2}{2}$ , 即故⑤正确.

故答案为: ①③④⑤.

### 【小问 2 详解】

解: 由题意可得, 图形如图所示,

|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

$\therefore 3a^2 + 5ab + 2b^2 = (3a+2b)(a+b)$ .

故答案为:  $(3a+2b)(a+b)$ .

### 【小问 3 详解】

解: 由题意可得,

①当  $4a^2 + mab + 5b^2 = (4a + 5b)(a + b) = 4a^2 + 9ab + 5b^2$ ,  $m = 9$ ,

②当  $4a^2 + mab + 5b^2 = (4a + b)(a + 5b) = 4a^2 + 21ab + 5b^2$ ,  $m = 21$ ,

③当  $4a^2 + mab + 5b^2 = (2a + b)(2a + 5b) = 4a^2 + 12ab + 5b^2$ ,  $m = 12$ .

故答案为: 9 或 21 或 12.

## 六、附加题 (共 20 分)

31. 已知  $a^2(b+c) = b^2(a+c) = 2023$ , 且  $a \neq b$ , 求  $abc$  的值.

【答案】 -2023

【解析】

【分析】 本题考查了利用公式法, 提取公因式法结合分组分解法因式分解, 解题的关键是读懂题意, 合理分组, 将两多项式相减得到  $a, b, c$  的关系, 代入等式求解即可得到答案;

【详解】 解:  $\because a^2(b+c) = b^2(a+c) = 2023$ ,

$$\therefore a^2(b+c) - b^2(a+c) = 0,$$

$$\therefore (a-b)(ab+bc+ac) = 0,$$

$$\because a \neq b,$$

$$\therefore ab+bc+ac = 0,$$

$$\text{即: } ab + bc = -ac,$$

$$\therefore b(ab+bc) = -abc, \text{ 即 } b^2(a+c) = -abc,$$

$$\because b^2(a+c) = 2023,$$

$$\therefore abc = -2023.$$

32. 正数  $a, b, c$  满足  $ab+2a+2b = bc+2b+2c = ac+2a+2c = 12$ , 求  $(a+2)(b+2)(c+2)$  的值.

【答案】 64

【解析】

【分析】 本题考查因式分解的应用; 能够将所给式子进行正确的因式分解是解题的关键. 将式子  $ab+2a+2b = bc+2b+2c$  因式分解为  $(a-c)(b+2) = 0$ , 求得  $a=c$ , 同理可得  $a=b, b=c$ , 推出  $a=b=c$ , 再  $ab+2a+2b=12$  可化为  $a^2+4a-12=0$ , 求出  $a$  的值, 即可求解.

【详解】 解:  $\because ab+2a+2b = bc+2b+2c$ ,

$$\therefore ab - bc + 2(a - c) = 0, \text{ 即 } (a - c)(b + 2) = 0,$$

$$\because b > 0,$$

$$\therefore b + 2 \neq 0,$$

$$\therefore a - c = 0,$$

$$\therefore a = c,$$

同理求得:  $a = b, b = c,$

$$\therefore a = b = c,$$

$$\therefore ab + 2a + 2b = 12 \text{ 可化为 } a^2 + 4a - 12 = 0,$$

解得:  $a = 2$  或  $a = -6$  (不合题意, 舍去),

$$\therefore a = b = c = 2,$$

$$\therefore (a + 2)(b + 2)(c + 2)$$

$$= (2 + 2) \times (2 + 2) \times (2 + 2)$$

$$= 64.$$

33. 使得  $m^2 + m + 7$  是完全平方数的整数  $m$  的和等于多少?

【答案】  $-2$ .

【解析】

【分析】 本题考查完全平方数的知识. 将  $m^2 + m + 7$  表示为  $k^2$  的形式, 然后转化可得出  $(2m + 2k + 1)(2m - 2k + 1) = -27$ , 从而讨论可得出  $m$  的值, 从而得到所有整数  $m$  的和.

【详解】 解: 设  $m^2 + m + 7 = k^2$ ,

$$\text{所以 } m^2 + m + \frac{1}{4} + \frac{27}{4} = k^2,$$

$$\text{所以 } \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{4} = k^2,$$

$$\text{所以 } \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - k^2 = -\frac{27}{4},$$

$$\text{所以 } \left(m + \frac{1}{2} + k\right)\left(m + \frac{1}{2} - k\right) = -\frac{27}{4},$$

$$\text{所以 } (2m + 2k + 1)(2m - 2k + 1) = -27,$$

因为  $-27 = -1 \times 27 = 1 \times (-27) = -3 \times 9 = 3 \times (-9)$ ，且  $m$  与  $k$  都为整数，

所以  $2m + 2k + 1 = 27$ ， $2m - 2k + 1 = -1$ ，解得： $m = 6$ ， $k = 7$ ；

$2m + 2k + 1 = -1$ ， $2m - 2k + 1 = 27$ ，解得： $m = 6$ ， $k = -7$ ；

$2m + 2k + 1 = 9$ ， $2m - 2k + 1 = -3$ ，解得： $m = 1$ ， $k = 3$ ；

$2m + 2k + 1 = -3$ ， $2m - 2k + 1 = 9$ ，解得： $m = 1$ ， $k = -3$ ；

$2m + 2k + 1 = 3$ ， $2m - 2k + 1 = -9$ ，解得： $m = -2$ ， $k = 3$ ；

$2m + 2k + 1 = -9$ ， $2m - 2k + 1 = 3$ ，解得： $m = -2$ ， $k = -3$ ；

$2m + 2k + 1 = 1$ ， $2m - 2k + 1 = -27$ ，解得： $m = -7$ ， $k = 7$ ；

$2m + 2k + 1 = -27$ ， $2m - 2k + 1 = 1$ ，解得： $m = -7$ ， $k = -7$ ；

所以所有  $m$  的和为  $6 + 1 + (-2) + (-7) = -2$ 。

34. 若  $a$ ， $b$  为实数且满足  $ab - a - b - 4 = 0$ ， $s = a^2 + 3ab + b^2 + 3a - \frac{5}{2}b$ ，求  $s$  的最小值。

【答案】  $\frac{47}{16}$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解，非负数的性质，先将  $s$  利用分组分解法因式分解，再将已知条件整体代入，化为完全平方式，最后根据非负数的性质确定  $s$  的最小值，掌握分组分解法和整体代入法是解题的关键。

【详解】 解：由题得， $ab = a + b + 4$ ，

$$\therefore s = a^2 + 3ab + b^2 + 3a - \frac{5}{2}b$$

$$= a^2 + 3(a + b + 4) + b^2 + 3a - \frac{5}{2}b,$$

$$= a^2 + 6a + b^2 + \frac{1}{2}b + 12,$$

$$= (a + 3)^2 + \left(b + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{47}{16},$$

$$\therefore (a + 3)^2 \geq 0, \left(b + \frac{1}{4}\right)^2 \geq 0,$$

$$\therefore s \geq \frac{47}{16}, \text{ 当且仅当 } a = -3, b = -\frac{1}{4} \text{ 时取等号,}$$

经检验当  $a = -3$ ， $b = -\frac{1}{4}$  时满足  $ab - a - b - 4 = 0$ ，

$s$  的最小值为  $\frac{47}{16}$ .

35. 已知  $x + y = 1$ ,  $x^2 + y^2 = 2$ , 求  $x^7 + y^7$  的值.

【答案】  $x^7 + y^7 = \frac{71}{8}$

【解析】

【分析】 本题考查了完全平方公式，整式乘法的应用. 先利用完全平方公式求得  $xy = -\frac{1}{2}$ ，再利用  $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$  和  $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2$  结合  $x^7 + y^7 = (x^3 + y^3)(x^4 + y^4) - x^3y^3(x + y)$  即可求解.

【详解】 解:  $\because x + y = 1$ ,

$$\therefore x^2 + 2xy + y^2 = 1,$$

$$\because x^2 + y^2 = 2,$$

$$\therefore xy = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 1 + 3 \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{5}{2}, \quad x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = 4 - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{2},$$

$$\therefore x^7 + y^7 = (x^3 + y^3)(x^4 + y^4) - x^3y^3(x + y)$$

$$= \frac{5}{2} \times \frac{7}{2} - 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= \frac{71}{8}.$$