

2024 学年第一学期期中检测

七年级数学试卷

(考试时间: 90 分钟 满分 100 分)

考生注意: 请将所有答案写在答题卡上, 写在试卷上不计分

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 2 分, 共 12 分)

1. 下列单项式的次数是 5 次的是 ()

A. $5xy$

B. $-x^4y$

C. 2^5x

D. $x^3 + x^2$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查单项式的次数, 解题的关键是掌握单项式次数的定义: 一个单项式中, 所有字母的指数的和叫做这个单项式的次数. 据此解答即可.

【详解】 解: A. $5xy$ 的次数是 2, 故此选项不符合题意;

B. $-x^4y$ 的次数是 5, 故此选项符合题意;

C. 2^5x 的次数是 1, 故此选项不符合题意;

D. $x^3 + x^2$ 是多项式, 故此选项不符合题意.

故选: B.

2. 下列语句中正确的是 ()

A. $\frac{1}{3}$ 是单项式

B. $(2a^2)^3 = 8a^5$

C. $a^0 = 1$ (a 是有理数)

D. -3^5 底数是 -3

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查单项式, 积的乘方和幂的乘方, 零指数幂, 有理数的乘方, 根据单项式的定义、积的乘方和幂的乘方的运算法则、零指数幂及有理数的乘方依次对选项进行判断即可. 掌握相应的定义, 运算法则和公式解题的关键.

【详解】 解: A. $\frac{1}{3}$ 是单项式, 故此选项符合题意;

B. $(2a^2)^3 = 2^3 \times (a^2)^3 = 8a^6 \neq 8a^5$, 故此选项不符合题意;

C. $a^0 = 1$ ($a \neq 0$), 故此选项不符合题意;

D. -3^5 底数是 3, 故此选项不符合题意.

故选: A.

3. 下列多项式能用完全平方公式因式分解的是 ()

A. $a^2 + 2a - 1$

B. $x^2 - xy + y^2$

C. $a^2 - 2a + \frac{1}{4}$

D. $a^2 - ab + \frac{1}{4}b^2$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题主要考查了用完全平方公式分解因式, 熟知 $x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$ 是解题的关键.

【详解】 解: A、 $a^2 + 2a - 1$ 不能用完全平方公式分解因式, 不符合题意;

B、 $x^2 - xy + y^2$ 不能用完全平方公式分解因式, 不符合题意;

C、 $a^2 - 2a + \frac{1}{4}$ 不能用完全平方公式分解因式, 不符合题意;

D、 $a^2 - ab + \frac{1}{4}b^2 = \left(a - \frac{1}{2}b\right)^2$ 能用完全平方公式分解因式, 符合题意;

故选: D.

4. 下列式子: ① $(x-y)(x+y)$; ② $(x-y)(-x+y)$; ③ $(x+y)(y-x)$; ④ $(-y-x)(y-x)$;

⑤ $(x+y)(-y-x)$; ⑥ $(-x-y)(x-y)$ 中符合平方差公式特征的有 ()

A. 2 个

B. 3 个

C. 4 个

D. 5 个

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查平方差公式: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, 解题的关键是掌握平方差公式的特点: 左边是两个二项式相乘, 且两个二项式中有一项相同, 另一项互为相反数; 右边是两项的平方差 (相同项的平方减去相反项的平方); 公式中的 a 和 b 可以是单项式, 也可以是多项式. 据此判断即可.

【详解】 解: ① $(x-y)(x+y)$ 符合平方差公式的特点;

② $(x-y)(-x+y)$ 不符合平方差公式的特点;

③ $(x+y)(y-x)=(y+x)(y-x)$ ，符合平方差公式的特点；

④ $(-y-x)(y-x)=(-x-y)(-x+y)$ ，符合平方差公式的特点；

⑤ $(x+y)(-y-x)$ 不符合平方差公式的特点；

⑥ $(-x-y)(x-y)=(-y-x)(-y+x)$ ，符合平方差公式的特点；

∴符合平方差公式特征的有 4 个.

故选：C.

5. 若 $a^2-a-5=0$ ，则 $(3-a)(a+2)$ 的值是 ()

A. 0

B. 1

C. -1

D. 2

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了整式的化简求值，先求出 $a^2-a=5$ ，再根据多项式乘以多项式的计算法则求出 $(3-a)(a+2)=-\left(a^2-a\right)+6$ ，据此代值计算即可.

【详解】解：∵ $a^2-a-5=0$ ，

$$\therefore a^2-a=5,$$

$$\therefore (3-a)(a+2)$$

$$=3a-a^2+6-2a$$

$$=a-a^2+6$$

$$=-\left(a^2-a\right)+6$$

$$=-5+6$$

$$=1,$$

故选：B.

6. 已知实数 a ， b ， c ， d 满足 $ac \leq -13-bd$ ，且 $a=c-6$ ， $b=d+4$ ，则 ()

A. a 、 c 都是正数

B. a 、 c 都是负数

C. a 、 c 互为相反数

D. 以上都不对

【答案】C

【解析】

【分析】 本题考查了完全平方公式进行因式分解，熟练掌握 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ 是解答本题的关键. 由 $ac \leq -13 - bd$ 得 $ac + bd + 13 \leq 0$ ，把 $a = c - 6$ ， $b = d + 4$ 代入整理得 $(c - 3)^2 + (d + 2)^2 = 0$ ，求出 c ， d 的值，进而可求出 a ， b 的值，即可求解.

【详解】 解： $\because ac \leq -13 - bd$ ，
 $\therefore ac + bd + 13 \leq 0$ ，
 $\because a = c - 6$ ， $b = d + 4$ ，
 $\therefore c(c - 6) + d(d + 4) + 13 \leq 0$ ，
 $\therefore c^2 - 6c + 9 + d^2 + 4d + 4 \leq 0$ ，
 $\therefore (c - 3)^2 + (d + 2)^2 \leq 0$ ，
 $\because (c - 3)^2 \geq 0, (d + 2)^2 \geq 0$ ，
 $\therefore c - 3 = 0, d + 2 = 0$ ，
 $\therefore c = 3, d = -2$ ，
 $\therefore a = c - 6 = -3$ ， $b = d + 4 = 2$

故选 C.

二、填空题 (本大题共 12 题，每题 2 分，共 24 分)

7. 多项式 $\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{3}$ 的常数项是_____

【答案】 $-\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查多项式的常数项，解题的关键是掌握多项式的项、次数：①多项式中每一个单项式称为该多项式的项（带符号）；②次数最高的项的次数即为该多项式的次数；③不含字母的项称为常数项. 据此解答即可.

【详解】 解： 多项式 $\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{3}$ 的常数项是 $-\frac{1}{3}$.
故答案为： $-\frac{1}{3}$.

8. 多项式 $3a^3m - 6a^2m + 12am$ 的公因式是_____.

【答案】 $3am$

【解析】

【分析】此题考查了提公因式因式分解法的应用能力，关键是能准确理解并运用该知识进行求解.

运用提公因式因式分解法进行求解.

【详解】解：系数的最大公约数是3，字母的公因式为 am ，

$\therefore$ 多项式 $3a^3m - 6a^2m + 12am$ 的公因式是 $3am$ ，

故答案为： $3am$.

9. 关于 x 、 y 的单项式 $\frac{2}{5}x^{n-1}y^m$ 与 $-\frac{4}{3}x^{2m}y^4$ 是同类项，则 $2m - n =$ _____

【答案】 -1

【解析】

【分析】本题考查同类项，解题的关键是根据同类项的定义（所含字母相同，并且相同字母的指数也分别相等的项）列出关于 m ， n 的方程，求得 m ， n 的值后再代入 $2m - n$ 计算即可，

【详解】解： $\because$ 关于 x 、 y 的单项式 $\frac{2}{5}x^{n-1}y^m$ 与 $-\frac{4}{3}x^{2m}y^4$ 是同类项，

$\therefore m = 4$ ， $n - 1 = 2m$ ，

$\therefore n = 9$ ，

$\therefore 2m - n = 2 \times 4 - 9 = -1$.

故答案为：-1 .

10. 将整式 $-\frac{1}{2}xyz + x^3 - 2y^2z + \frac{3}{4}x^2y^3$ 按 y 的升幂排列_____

【答案】 $x^3 - \frac{1}{2}xyz - 2y^2z + \frac{3}{4}x^2y^3$

【解析】

【分析】本题考查多项式，我们把一个多项式的各项按照某个字母的指数从大到小或从小到大的顺序排列，称为按这个字母的降幂或升幂排列. 要注意，在排列多项式各项时，要保持其原有的符号. 正确理解降幂排列或升幂排列的定义是解题的关键.

【详解】解：将整式 $-\frac{1}{2}xyz + x^3 - 2y^2z + \frac{3}{4}x^2y^3$ 按 y 的升幂排列是： $x^3 - \frac{1}{2}xyz - 2y^2z + \frac{3}{4}x^2y^3$.

故答案为： $x^3 - \frac{1}{2}xyz - 2y^2z + \frac{3}{4}x^2y^3$.

11. 已知 $A + B = -3x^2 - 5x - 1$ ， $A - C = -2x + 3x^2 - 5$ ，则 $B + C =$ _____.

【答案】 $-6x^2 - 3x + 4$

【解析】

【分析】直接根据已知条件进行整理即可求解.

【详解】 $\because A+B=-3x^2-5x-1, A-C=-2x+3x^2-5,$

$$\therefore A+B-(A-C)=-3x^2-5x-1-(-2x+3x^2-5),$$

$$\therefore B+C=-3x^2-5x-1+2x-3x^2+5,$$

$$\therefore B+C=-6x^2-3x+4.$$

故答案为: $-6x^2-3x+4$.

【点睛】 本题考查了整式的加减, 利用整式的加减运算化简求值.

12. 若 $a^m=3, a^n=4$, 则 $a^{2m+n}=\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 36

【解析】

【分析】 本题主要考查幂的乘方与同底数幂的乘法的逆运算. 将 $a^m=3, a^n=4$ 代入原式

$$=a^{2m} \cdot a^n = (a^m)^2 \cdot a^n, \text{ 计算可得.}$$

【详解】 解: 当 $a^m=3, a^n=4$ 时,

$$\text{原式} = a^{2m} \cdot a^n = (a^m)^2 \cdot a^n = 3^2 \times 4 = 36,$$

故答案为: 36.

$$13. \text{ 计算: } \left(x^3y^2 - \frac{3}{2}x^2y^3\right) \div \frac{3}{2}x^2y^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

【答案】 $\frac{2}{3}x-y$

【解析】

【分析】 本题考查多项式除以单项式, 解题的关键是掌握: 多项式除以单项式, 先把这个多项式的每一项除以单项式, 再把所得的商相加. 据此解答即可.

$$\text{【详解】 解: } \left(x^3y^2 - \frac{3}{2}x^2y^3\right) \div \frac{3}{2}x^2y^2$$

$$= x^3y^2 \div \frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{3}{2}x^2y^3 \div \frac{3}{2}x^2y^2$$

$$= \frac{2}{3}x - y.$$

$$\text{故答案为: } \frac{2}{3}x - y.$$

14. 因式分解: $1-16a^4 =$ _____

【答案】 $(1+4a^2)(1+2a)(1-2a)$

【解析】

【分析】 此题考查了因式分解.

连续两次利用平方差公式进行分解即可.

【详解】 解: $1-16a^4$

$$= (1+4a^2)(1-4a^2)$$

$$= (1+4a^2)(1+2a)(1-2a)$$

故答案为: $(1+4a^2)(1+2a)(1-2a)$

15. 如果 $x+y=4, x^2+y^2=14$, 那么 $(x-y)^2 =$ _____.

【答案】 12

【解析】

【分析】 把 $x+y=4$ 两边同时平方可得 $x^2+2xy+y^2=16$, 根据 $x^2+y^2=14$ 可求出 $2xy=2$, 把 $(x-y)^2$ 利用完全平方公式展开, 再代入 $2xy=2, x^2+y^2=14$ 即可得答案.

【详解】 $\because x+y=4,$

$$\therefore (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2=16,$$

$$\because x^2+y^2=14,$$

$$\therefore 2xy=2,$$

$$\therefore (x-y)^2 = x^2-2xy+y^2=14-2=12.$$

故答案为 12

【点睛】 本题考查完全平方公式, 利用完全平方公式求出 $2xy=2$, 是解题关键.

16. 如果关于 x 的二次三项式 $9x^2 - (k-3)x + 4$ 是完全平方式, 那么 k 的值是 _____.

【答案】 15 或 -9

【解析】

【分析】 本题考查完全平方式, 解题的关键是掌握: 如果一个二次三项是完全平方式, 则满足如下特征: 两项符号相同且为平方形式, 第三项为前面两项 (在平方的形式下) 的底数积的 2 倍且符号不限. 据此解答即可.

【详解】解：∵关于 x 的二次三项式 $9x^2 - (k-3)x + 4$ 是完全平方式，

$$\therefore 9x^2 - (k-3)x + 4 = (3x)^2 \pm 2 \times 3x \times 2 + 2^2,$$

$$\therefore -(k-3) = \pm 12,$$

解得： $k = 15$ 或 -9 ，

∴ k 的值是15或-9.

17. 已知 $(2023-x)(2025-x) = 2024$ ，则 $(2023-x)^2 + (2025-x)^2 =$ _____

【答案】 4052

【解析】

【分析】本题考查了完全平方公式的变形变形求值. 解题的关键在于熟练掌握 $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$. 根据

$a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$ 变形求解求解即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解：} & (2023-x)^2 + (2025-x)^2 = [(2023-x) - (2025-x)]^2 + 2(2023-x)(2025-x) \\ & = [2023-x-2025+x]^2 + 2 \times 2024 \\ & = 4052. \end{aligned}$$

故答案为：4052.

18. 式子 $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$ ，此时，3叫做以2为底8的对数，记为 $\log_2 8$ （即 $\log_2 8 = 3$ ）. 一般地，若 $a^n = b$

（ $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ， $b > 0$ ），则 n 叫做以 a 为底 b 的对数，记为 $\log_a b$ （即 $\log_a b = n$ ）. 如 $3^4 = 81$ ，则4叫做以3为底81的对数，记为 $\log_3 81$ ，则 $\log_3 81 = 4$ ，同理 $\log_3 27 = 3$ ， $\log_3 3 = 1$. 由此可以得到下列式子： $\log_3 81 = \log_3 27 + \log_3 3$ ，根据以上的信息及运算关系，若 $\log_3 (x+12) + \log_3 x = 2 \log_3 (x+2)$ ，

则 $x =$ _____

【答案】 $\frac{1}{2}$ ## 0.5

【解析】

【分析】本题考查新定义，同底数幂的乘法，设 $a = \log_3 (x+12)$ ， $b = \log_3 x$ ， $c = \log_3 (x+2)$ ，则 $3^a = x+12$ ， $3^b = x$ ， $3^c = x+2$ ，再根据同底数幂的乘法及新定义得到 $(x+12)$ ， x 和 $(x+2)$ 的关系，求解即可. 正确理解新定义是解题的关键.

【详解】解：设 $a = \log_3 (x+12)$ ， $b = \log_3 x$ ， $c = \log_3 (x+2)$ ，

$$\therefore a+b=2c, \quad 3^a=x+12, \quad 3^b=x, \quad 3^c=x+2,$$

$$\therefore 3^{a+b}=3^a \times 3^b = x(x+12), \quad 3^{2c}=3^c \times 3^c = (x+2) \cdot (x+2) = (x+2)^2,$$

$$\therefore a+b=\log_3 x(x+12), \quad 2c=\log_3 (x+2)^2,$$

$$\therefore \log_3 x(x+12)=\log_3 (x+2)^2,$$

$$\therefore x(x+12)=(x+2)^2,$$

$$\text{解得: } x=\frac{1}{2}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{1}{2}.$$

三、计算题 (本大题共 6 题, 每题 6 分, 共 36 分)

$$19. \text{ 计算: } (2xy)^2 \cdot 3xy^2 + 3x \left(4x^2y^4 - \frac{1}{3}xy^2 \right)$$

$$\text{【答案】 } 24x^3y^4 - x^2y^2$$

【解析】

【分析】 本题考查整式的混合运算, 先根据积的乘方将原式化简, 然后根据单项式乘单项式、单项式乘多项式的运算法则进行运算, 最后合并同类项即可. 解题的关键是掌握单项式乘单项式运算法则: 单项式与单项式相乘, 把它们的系数、同底数幂分别相乘, 对于只在一个单项式里含有字母, 则连同它的指数作为积的一个因式.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & (2xy)^2 \cdot 3xy^2 + 3x \left(4x^2y^4 - \frac{1}{3}xy^2 \right) \\ &= 4x^2y^2 \cdot 3xy^2 + 3x \cdot 4x^2y^4 - 3x \cdot \frac{1}{3}xy^2 \\ &= 12x^3y^4 + 12x^3y^4 - x^2y^2 \\ &= 24x^3y^4 - x^2y^2. \end{aligned}$$

$$20. \text{ 计算: } (-x)^3 \cdot (-x^5)^2 \cdot (-x) - (-x^6) \cdot (-x^2)^4$$

$$\text{【答案】 } 2x^{14}$$

【解析】

【分析】 本题考查整式的加减运算, 先根据符号的化简法则将原式化简, 然后进行同底数幂的乘法运算, 最后进行合并. 掌握相应的运算法则和运算顺序是解题的关键.

【详解】解： $(-x)^3 \cdot (-x^5)^2 \cdot (-x) - (-x^6) \cdot (-x^2)^4$

$$= -x^3 \cdot x^{10} \cdot (-x) - (-x^6) \cdot x^8$$

$$= x^3 \cdot x^{10} \cdot x - (-x^6 \cdot x^8)$$

$$= x^{14} + x^{14}$$

$$= 2x^{14}.$$

21. 计算： $(a-2b+3c)(a-3c-2b)$

【答案】 $a^2 - 4ab + 4b^2 - 9c^2$

【解析】

【详解】分析：首先将原式变为： $[(a-2b)+3c][(a-2b)-3c]$ ，然后利用平方差公式，即可得到 $(a-2b)^2 - (3c)^2$ ，继而求得答案.

详解： $(a-2b+3c)(a-2b-3c)$

$$= [(a-2b)+3c][(a-2b)-3c]$$

$$= (a-2b)^2 - (3c)^2$$

$$= (a^2 - 4ab + 4b^2) - 9c^2$$

$$= a^2 - 4ab + 4b^2 - 9c^2$$

点睛：本题考查了平方差公式的应用. 此题难度适中，注意首先把原式变形为： $[(a-2b)+3c][(a-2b)-3c]$ 是解答此题的关键.

22. 计算： $(2a+1)^2 - 2(a+3)(a-3)$

【答案】 $2a^2 + 4a + 19$

【解析】

【分析】本题考查整式的混合运算，根据完全平方公式和平方差公式将原式展开，再合并同类项即可. 掌握完全平方公式和平方差公式是解题的关键.

【详解】解： $(2a+1)^2 - 2(a+3)(a-3)$

$$= 4a^2 + 4a + 1 - 2(a^2 - 9)$$

$$= 4a^2 + 4a + 1 - 2a^2 + 18$$

$$= 2a^2 + 4a + 19.$$

23. 因式分解: $x^2(x+y) - y^2(y+x)$

【答案】 $(x+y)^2(x-y)$

【解析】

【分析】 此题考查了因式分解.

先提取公因式 $(x+y)$, 再利用平方差公式分解因式即可.

【详解】 解: $x^2(x+y) - y^2(y+x)$
 $= (x+y)(x^2 - y^2)$
 $= (x+y)^2(x-y)$

24. 分解因式 $(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2$

【答案】 $(a+b)^2(a-b)^2$

【解析】

【分析】 先利用平方差公式进行因式分解, 然后再利用完全平方公式进行分解即可得.

【详解】 $(a^2+b^2)^2 - 4a^2b^2$
 $= [(a^2+b^2)+2ab][(a^2+b^2)-2ab]$
 $= (a+b)^2(a-b)^2$

【点睛】 本题考查了综合利用平方差公式与完全平方公式因式分解, 熟练掌握平方差公式以及完全平方公式的结构特征是解题的关键.

四、解答题 (本大题共 4 题, 25-26 每题 6 分, 27-28 每题 8 分, 共 28 分)

25. 先化简, 再求值: $xy - [2(2x^2 - xy + y^2) - (x^2 - 4y^2)] - 3y(x - 3y)$, 其中 $x = \frac{2}{3}, y = -3$.

【答案】 $-3x^2 + 3y^2$; $25\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 根据整式的混合运算法则进行化简, 再代入即可求解.

【详解】 $xy - [2(2x^2 - xy + y^2) - (x^2 - 4y^2)] - 3y(x - 3y)$
 $= xy - [4x^2 - 2xy + 2y^2 - x^2 + 4y^2] - 3xy + 9y^2$
 $= xy - 4x^2 + 2xy - 2y^2 + x^2 - 4y^2 - 3xy + 9y^2$
 $= -3x^2 + 3y^2$

把 $x = \frac{2}{3}, y = -3$. 代入得 $-3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3 \times 9 = -\frac{4}{3} + 27 = 25\frac{2}{3}$

【点睛】此题主要考查化简求值，解题的关键是熟知整式的乘方法则.

26. 若 $(x-2)(2x^2+ax+b)$ 的展开式中不含 x 的二次项和一次项，求 a 、 b 的值.

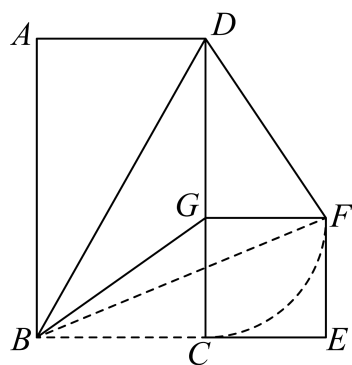
【答案】 $a = 4, b = 8$

【解析】

【分析】本题考查多项式乘以多项式，根据多项式乘以多项式法则进行运算，再将计算结果合并同类项，根据“ $(x-2)(2x^2+ax+b)$ 的展开式中不含 x 的二次项和一次项”建立方程，即可求解. 解题的关键是明确：不含 x 的二次项和一次项，则二次项的系数和一次项的系数都为 0.

【详解】解： $(x-2)(2x^2+ax+b)$
 $= 2x^3 + ax^2 + bx - 4x^2 - 2ax - 2b$
 $= 2x^3 + (a-4)x^2 + (b-2a)x - 2b,$
 $\therefore (x-2)(2x^2+ax+b)$ 的展开式中不含 x 的二次项和一次项，
 $\therefore a-4=0, b-2a=0,$
 $\therefore a=4, b=8.$

27. 如图，已知长方形 $ABCD$ 的边 AD 长为 a ，边 AB 长为 b ，正方形 $CEFG$ 的边长为 c ，点 G 在 CD 上，用 a 、 b 、 c 表示下列图形的面积.



- (1) 求 BDF 的面积;
- (2) 以 G 为圆心，以 c 为半径画弧，求图中虚线所围图形的面积 (结果保留 π)

【答案】 (1) $\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bc - \frac{1}{2}ac$
 (2) $\frac{1}{4}\pi c^2 - \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}ac$

【解析】

【分析】此题考查了单项式与多项式的乘法，整式加减的应用，能把不规则图形的面积变成规则图形的面积是解此题的关键.

(1) 根据 $S_{\triangle BDF} = S_{\text{长方形}ABCD} + S_{\text{正方形}GFEC} + S_{\triangle DGF} - S_{\triangle ABD} - S_{\triangle BFE}$ 求解即可；

(2) 根据虚线所围图形的面积 $= S_{\triangle BEF} - (S_{\text{正方形}CEFG} - S_{\text{扇形}GFC})$ 求解即可.

【小问 1 详解】

解: $S_{\triangle BDF} = S_{\text{长方形}ABCD} + S_{\text{正方形}GFEC} + S_{\triangle DGF} - S_{\triangle ABD} - S_{\triangle BFE}$

$$= ab + c^2 + \frac{1}{2}c(b-c) - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}c(a+c)$$

$$= \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bc - \frac{1}{2}ac,$$

所以 $\triangle BDF$ 的面积为 $\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bc - \frac{1}{2}ac$;

【小问 2 详解】

解: 虚线所围图形的面积 $= S_{\triangle BEF} - (S_{\text{正方形}CEFG} - S_{\text{扇形}GFC})$

$$= \frac{1}{2}c(a+c) - \left(c^2 - \frac{1}{4}\pi c^2 \right)$$

$$= \frac{1}{4}\pi c^2 - \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}ac,$$

所以影部分的面积为 $\frac{1}{4}\pi c^2 - \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}ac$.

28. 阅读理解:

条件①: 无论代数式 A 中的字母取什么值, A 都不小于常数 M ; 条件②: 代数式 A 中的字母存在某个取值, 使得 A 等于常数 M ; 我们把同时满足上述两个条件的常数 M 叫做代数式 A 的下确界.

例如:

$$x^2 + 2x + 5 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 + 5 = (x+1)^2 + 4,$$

$$\because (x+1)^2 \geq 0,$$

$$\therefore x^2 + 2x + 5 \geq 4 \quad (\text{满足条件①})$$

当 $x = -1$ 时, $x^2 + 2x + 5 = 4$ (满足条件②)

$\therefore 4$ 是 $x^2 + 2x + 5$ 的下确界.

又例如:

$x^2 + 2|x| + 5 = |x|^2 + 2 \cdot |x| \cdot 1 + 1^2 - 1^2 + 5 = (|x| + 1)^2 + 4$, 由于 $|x| \neq -1$, 所以 $x^2 + 2|x| + 5 \neq 4$, (不满足条件②) 故 4 不是 $x^2 + 2|x| + 5$ 的下确界.

请根据上述材料, 解答下列问题:

(1) 求 $x^2 - 6x + 4$ 的下确界.

(2) 若代数式 $2x^2 + mx + 3$ 的下确界是 1, 求 m 的值.

(3) 求代数式 $\frac{3}{2}x^2 + y^2 + 2xy - 4x - 4y + 10$ 的下确界.

【答案】(1) -5

(2) $m = \pm 4$

(3) 6

【解析】

【分析】 本题主要考查了根据完全平方公式进行多项式变型和因式分解,

(1) 根据题干示例的方法计算即可作答;

(2) 根据题意设 $2x^2 + mx + 3 = 2(x+t)^2 + 1 \geq 1$, 根据 $2(x+t)^2 + 1 = 2x^2 + 4tx + 2t^2 + 1$ 可得 $\begin{cases} 4t = m \\ 2t^2 + 1 = 3 \end{cases}$,

解方程即可求解;

(3) 先分组得到 $(x^2 + 2xy + y^2) + \frac{1}{2}x^2 - 4(x+y) + 10$, 进而得到 $[(x+y)^2 - 4(x+y) + 4] + \frac{1}{2}x^2 + 6$, 则可得到原式 $= (x+y-2)^2 + \frac{1}{2}x^2 + 6$, 据此仿照题意求解即可.

【小问 1 详解】

解: $x^2 - 6x + 4 = x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 - 3^2 + 4 = (x-3)^2 - 5$,

$\therefore (x-3)^2 \geq 0$,

$\therefore (x-3)^2 - 5 \geq -5$ (满足条件①),

当 $x=3$ 时, $(x-3)^2 - 5 = (3-3)^2 - 5 = 0 - 5 = -5$ (满足条件②),

$\therefore -5$ 是 $x^2 - 6x + 4$ 的下确界;

【小问 2 详解】

解: $\because$ 代数式 $2x^2 + mx + 3$ 的下确界是 1,

$$\therefore \text{可设 } 2x^2 + mx + 3 = 2(x+t)^2 + 1 \geq 1,$$

$$\therefore 2(x+t)^2 + 1 = 2x^2 + 4tx + 2t^2 + 1,$$

$$\therefore 2x^2 + mx + 3 = 2x^2 + 4tx + 2t^2 + 1,$$

$$\therefore \begin{cases} 4t = m \\ 2t^2 + 1 = 3 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} m = \pm 4 \\ t = \pm 1 \end{cases},$$

$$\text{即: } m = \pm 4;$$

【小问 3 详解】

$$\text{解: } \frac{3}{2}x^2 + y^2 + 2xy - 4x - 4y + 10$$

$$= (x^2 + 2xy + y^2) + \frac{1}{2}x^2 - 4(x+y) + 10$$

$$= \left[(x+y)^2 - 4(x+y) + 4 \right] + \frac{1}{2}x^2 + 6$$

$$= (x+y-2)^2 + \frac{1}{2}x^2 + 6,$$

$$\therefore (x+y-2)^2 \geq 0, \quad x^2 \geq 0,$$

$$\therefore (x+y-2)^2 + \frac{1}{2}x^2 + 6 \geq 6 \quad (\text{满足条件①}),$$

当 $x=0$, $x+y-2=0$, 即 $x=0$, $y=2$ 时,

$$\frac{3}{2}x^2 + y^2 + 2xy - 4x - 4y + 10 = 0 + 2^2 + 0 - 0 - 4 \times 2 + 10 = 6 \quad (\text{满足条件②}),$$

$$\therefore 6 \text{ 是 } \frac{3}{2}x^2 + y^2 + 2xy - 4x - 4y + 10 \text{ 的下确界}$$